த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—737

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளும் மாறுபடு நுண்கணிதமும்

ஆசிரியர்
எல். எல்ஸ்கோட்ஸ்

தமிழாக்கம்
ரா. மகாதேவன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
(ஓய்வுபெற்ற) கணிதத்துறைத் தலைவர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — December, 1976

T.N.T.B.S (C.P.) No. 737

© Government of Tamilnadu

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE CALCULUS OF VARIATIONS

L. ELSGOLTS

Translation :
R. MAHADEVAN

Price Rs. 11 - 45

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-600 001.

பதிப்புரை

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளும் மாறுபடு நுண்கணிதமும் என்ற இந் நூல், தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 737 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 772 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

முதற்பாகம்

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

		பக்கம்
தோற்றுவாய்	...	1
1. முதல்வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	...	7
1. முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் வகைக்கெழுத் தீர்வு காணும் வகைகள்	...	7
2. பிரிவுபடும் சமன்பாடுகள்	...	13
3. பிரிவுபடும் சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுங்கும் சமன் பாடுகள்	...	20
4. முதல் வரிசை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்	...	24
5. சரியான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்	...	31
6. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு உள்ளமை நிச்சயிக்கும் தேற்றமும், தீர்வின் தனித்தன்மையும்	...	39
7. முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தோராயமாகத் தீர்வு காணும் முறைகள்	...	68
8. வகைக்கெழுத் தன்மையே பிரிக்கப்படா திருக்கும் எளிய சமன்பாடுகள்	...	77
9. வகைக்கெழு பிரிக்கப்படாத சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உள்ளமையையும் தனித்தன்மையையும் கூறும் தேற்றம்—தனித்தீர்வுகள்	...	86
பயிற்சிக் கணக்குகள்	...	95

பக்கம்

2. இரண்டாம் படியும் அதற்கும் மேற்பட்ட படியுடை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ... 100

1. *n*th படி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உள்ளமை, தனித்தன்மைத் தேற்றம் ... 100

2. படி குறைக்கப்படும் மிக எளிய எடுத்துக் காட்டுகள் ... 102

3. *n* வரிசை ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ... 110

4. நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித் தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகளும், ஆயிலர் சமன்பாடுகளும் ... 127

5. சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன் பாடுகள் ... 135

6. நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித் தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடுகளும் ஆயிலர் சமன்பாடுகளும் ... 149

7. தொடர் வழியாகச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல் ... 165

8. சிறிய துணை அலகு முறையும், பகுதி ஒரு படி அலைவுகளுக்கு அதன் பயன்பாடும் ... 177

9. எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினைகள்—அடிப்படை ... 192

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 200

3. வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் ... 204

1. அடிப்படைக் கொள்கை ... 204

2. ஓர் உயர்வரிசைச் சமன்பாட்டிற்கு மாற்றித் தொகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறை ... 208

3. தீர்வுடைத் தொகைச் சமன்பாடு காணல் ... 216

4. ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் ... 220

5. நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி ... 234

பக்கம்

8. n வரிசைச் சமன்பாடுகட்கும், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கும் தோராயத் தீர்வு காணும் முறை ... 242

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 245

4. உறுதிநிலைக் கோட்பாடு ... 247

1. அடிப்படைகள் ... 247
2. சமநிலைப் புள்ளிகளில் சாமானிய வகைகள் ... 251
3. லியபுனுவின் இரண்டாவது முறை ... 261
4. முதற்கண் தோராயம் காணும் முறையின் அடிப்படையில் அமைந்த உறுதிப்பாட்டு ஆய்வு ... 269
5. பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களின் எதிரெண் மெய்ப்பகுதி யுடையவாக இருக்க அறிகுறிகள் ... 279
6. உயர்வரிசை வகைக்கெழுவின் சிறு குணக வகை ... 281
7. தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடு ... 288

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 293

5. முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகள் ... 296

1. அடிப்படைகள் ... 296
2. ஒருபடித்தானதும், பகுதி ஒருபடித்தானது மான முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ... 299
3. ஃபாஃபியன் சமன்பாடுகள் ... 314
4. முதல் வரிசை ஒருபடித்தானதல்லாத சமன் பாடுகள் ... 321
5. உத்திக் கணக்குகள் ... 342

இரண்டாம் பாகம்

மாறுபடு நுண்கணிதம்

பக்கம்

முன்னுரை ... **347**

6. நிலையான வரம்புடைய தீர்வமைவுகளில் மாறல் முறைகள் ... **352**

1. மாறல்களும் அதன் பண்புகளும் ... 352
2. ஆய்லரின் சமன்பாடு ... 363
3. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx$ என்ற அமைப்புடைய சார்பரங்கள் ... 381
4. பல வரிசை வகைக்கெழுக்களைச் சார்ந்த சார்பரங்கள் ... 384
5. பல சாரா மாறிகளைச் சார்ந்த சார்புகளைச் சார்ந்த சார்பரங்கள் ... 390
6. துணை அலகு அமைப்பில் மாறுபடு தீர் வமைவுகள் ... 397
7. சில பயன்பாடுகள் 401

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 406

7. நகரும் வரம்புகளுடன் கூடிய மாறுபடு தீர்வமைவு களும் மற்றும் சில தீர்வமைவுகளும் ... **410**

1. நகரும் வரம்புகளுடன் கூடிய ஓர் எளிய தீர்வமைவு ... 410
2. $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$ என்ற சார்பரத்தின் நகரும் வரம்புத் தீர்வமைவு ... 419
3. மூலைகளுள்ள எல்லைய வரை ... 426
4. ஒருபக்க மாறல்கள் ... 437

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 441

பக்கம்

8. எல்லயம் உள்ளமைக்குப் போதுமான நியதிகள் ... 444

1. எல்லய வரைக்களம் ... 444

2. $E(x, y, p, y')$ எனும் சார்பலன் ... 451

3. ஆய்லர் சமன்பாடுகளை நியமன உருவத்திற்கு மாற்றுதல் ... 466

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 473

9. நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயம் கொண்ட மாறுபடு தீர்வமைவுகள் ... 475

1. $\phi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ என்ற அமைப்புடைய கட்டுப்பாடுகள் ... 475

2. $\phi(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n) = 0$ என்ற அமைப்புடைய கட்டுப்பாடுகள் ... 484

3. சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவுகள் ... 488

பயிற்சிக் கணக்குகள் ... 499

10. மாறுபடு தீர்வு அமைவுகளில் நேரடி முறைகள் ... 501

1. நேரடி முறைகள் ... 501

2. ஆய்லரின் வேறுபாட்டு முறை ... 503

3. ரிட்ஸ் முறை ... 505

4. காந்தோரோவி முறை ... 518

5. உத்திக் கணக்குகள் ... 526

விடை ... 528

Recommended Literature ... 539

கலைச்சொற்கள் ... 541

பொருட்குறிப்பகராதி ... 544

முதல் பாகம்

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Differential Equations)

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளும் மாறுபடு நுண்கணித மும் எனும் இந் நூலில் கண்டுள்ளவை நூலாசிரியர், மாஸ்கோவில் உள்ள லோமனேசோ மாநிலப் பல்கலைக் கழக இயற்பியல் துறையில் நிகழ்த்திய உரைகளில் கண் டவையாகும்.

தோற்றுவாய்

இயற்கை நிகழ்ச்சிகளை ஆராயும்போது, அந் நிகழ்ச்சிகளை விவரிக்கும் அளவுகளிடையே நேரடியான தொடர்புகளையோ, விதிகளையோ காண்பது மிக அரிது. ஆனால் அந்த அளவுகளின், காலத்தைச் சார்ந்த வகைக்கெழுக்களும், அளவுகளும் சேர்ந்து வரும் விதிகளைக் காணலாம் அளவுகள் வெக்டர்களாகவோ, வெற்றெண்களாகவோ இருக்க முடியும். கீழே சில உதாரணங்களைத் தருவோம்.

(1) $\frac{dx}{dt} = -kx$ எனும் சமன்பாடு கதிரியக்கத்தால் ஏற்படும் சிதறலைத் தருவதாகும். [k என்பது சிதறல் குணகம்; x என்பது t நேரத்தில் சிதருதிருக்கும் பொருளின் திணிவு; $\frac{dx}{dt}$, சிதறும் பொருளின் திணிவுடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ள அழிவு வீதம்.]

(2) $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left((t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ என்பது m எனும் திணிவுடைய பொருளின்மேல் $\mathbf{F}$ எனும் விசை செயல்பட நேரிடும் இயக்கத்தை விவரிப்பதாகும். இந்த இயக்கம் நேரம் t, நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$, திசைவேகம் $\frac{d\mathbf{r}}{t}$ என்பவற்றின் சார்பலன். திணிவை முடுக்கத்தால் பெருக்க வருவது விசையளவு.

(3) $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 4\pi\rho\,(x, y, z)$ என்பது போசான் (Poisson's) சமன்பாடு எனப்படும் $\rho\,(x, y, z)$ எனும் செறிவுடைய நிலை மின் களத்தின் (electrostatic field) நிலைப்பண்பு $u\,(x, y, z)$ இச் சமன்பாட்டிற்கிணங்க உள்ளது.

அளவுகளிடையே உள்ள தொடர்பைக்காண மேற்கூறியது போன்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளிலிருந்து சார்பலனைக் காணும் முறைகளைக் காணவேண்டும். வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கிணங்கும் சார்பலன்களைக் காணும் முறையே 'வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டுக்' கணிதம் (Theory of Differential equations) எனப்படும்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் நாம் அறியாத சார்பலன், அல்லது வெக்டர், ஒரு தனி மாறியைக் கொண்ட சார்பலனானால் அது சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும். (உதாரணமாய்ச் சமன்பாடுகள் (1)-ம் (2)-ம்). ஆனால் அறியப்படாத சார்பலன் — வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் வருவது — இரண்டோ, அதற்கு மேற்பட்டோ உள்ள தனிமாறிகளின் சார்பலன் என்றால் அது பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடெனப்படும் (உதாரணமாய்ச் சமன்பாடு 3).

அறியாத சார்பலனின் வகைக்கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசை, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையாகும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு எனப்படுவது, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணவேண்டிய தீர்வைப் பிரதியிடச் சமன்பாடு முற்றொருமையாதல் வேண்டும்.

இதனை விளக்கக் கதிரியக்கத்தால் ஏற்படும் சிதறலை விளக்கும் சமன்பாடு $\frac{dx}{dt} = -kx$, (1·1). அதன் தீர்வு $x = ce^{-kt}$ $(1\cdot 1_1)$ (c ஏதேனும் நிலை எண்) ஆகும். (1·1)-ல் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $x = x(t)$ எனும்படி சிதைவு விதியை முற்றிலும் தருவதில்லை என்பதை நன்றாக அறிகிறோம். இதற்கு $t = t_0$ எனும் குறிப்பிட்ட நேரத்தில் பொருளின் திணிவும் தரப்படவேண்டும். x_0 என்பதை அறிந்தால், $x(t_0) = x_0$ எனும் கட்டுப்பாட்டைக் கருத்தில்கொள்ள $(1\cdot 1_1)$ சமன்பாட்டிலிருந்து கதிரியக்க அழிவு விதி $x = x_0 e^{-k(t-t_0)}$ என வருகிறது.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பது 'சமன்பாட்டின் தொகை காணல்' எனவும் கூறப்படும். மேற்கூறிய உதாரணத்தில் திட்டமான தீர்வு காண்பது எளிதாயிற்று. ஆனால், இன்னும் கடுமையான சிக்கலான வகைகளில் சமன்பாட்டின் தொகை காணத் தோராய முறைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டி வரும். அண்மைக் காலம்வரை தோராயத் தீர்வு காண்பது மிகவும் நீளமானதும் கடினமானதுவுமாக இருந்தது. ஆனால் துரிதகதிக் கம்ப்யூட்டர்கள் உள்ள இக்காலத்தில் பல்லாயிரக் கணக்கான கணிதக் கிரியைகளை நொடியில் செய்ய முடிகிறது.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் இன்னும் சிக்கலான இயக்கச் சமன்பாட்டைத் தரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை ஆராய்வோம். 'm' எனும் திணிவுடைய துகளின்மேல்

$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ எனும் விசை செயல்பட அதன் நிலையைத் தரும் $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ எனும் தீர்வு காணும் முறையைக் காண்போம். நியூட்டனின் விதிப்படி,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{1·2}$$

ஆகவே, பிரச்சினை இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதாகும். m எனும் திணிவும், $\mathbf{F}$ எனும் விசையும் மட்டும் தரப்பட்டால் இயக்கத் திட்டமாகக் கூறமுடியாது என அறிவது வெகு எளிது. தொடக்கத்தில் புள்ளியின் நிலை, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ $(1·2_1)$ தொடக்கத் திசைவேகம் $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0$ $(1·2_2)$ இவையும் தரப்பட வேண்டும்.

$(1·2_1)$, $(1·2_2)$ எனும் தொடக்க மதிப்புகளுடன் $(1·2)$-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் இயற்கையான தோராயமுறையைச் சுட்டிக் காட்டுவோம். இந்த முறையின் கருத்து, இந்தப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு உள்ளமையை நிறுவவும் உதவும்.

$(1·2_1)$, $(1·2_2)$ எனும் தொடக்க மதிப்புகளுக்கு ஒத்த $(1·2)$-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காணவேண்டிய கால இடைவெளி $t_0 \leqslant t \leqslant T$ என்போம். இதனை n சமபாகமாகப் பிரிப்போம். ஒரு சிறு சமபாகம் h எனின், $h = \dfrac{T - t_0}{n}$.

சம பாகங்கள் (t_0, t_1) (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, T).

இங்கு $t_k = t_0 + kh$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$

n-ன் மிகப்பெரிய மதிப்புகளுக்கு, ஒவ்வொரு சிறு கால இடைவெளியிலும் $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ என்பதில் உள்ள மாற்றம் மிக நுண்ணியது. (வெக்டர் சார்பலன் $\mathbf{F}$ தொடர்ச்சியுடையதெனக் கொள்கிறோம்). ஆகவே (t_{k-1}, t_k) எனும் ஒவ்வொரு சிறு உள் இடைவெளியில் $\mathbf{F}$ மாறாது நிலையாக இருக்கிறதெனக் கொள்ளலாம். அதாவது இடைவெளியில் இடப்பக்க எல்லை மதிப்பையுடையதெனலாம். இன்னும் திட்டமாகக் கூற (t_0, t_1) இடைவெளியில் $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$-ன் மதிப்பு $\mathbf{F}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ இவ்வாறு எடுத்துக்கொள்ள, $(1·2_1)$, $(1·2_2)$ எனும் தொடக்க மதிப்புகளுடன் $(1·2)$-ல் உள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து (t_0, t_1) இடைவெளியில் $\mathbf{r}_n(t)$ எனும் இயக்க விதியைத் திட்டப்படுத்தலாம் [இயக்கம் சீராக மாறும்]. ஆகவே குறிப்பாக $\mathbf{r}_n(t_1)$, $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$-ன் மதிப்புத் தெரியும். இதே முறையில் $\mathbf{r}_n(t)$ எனும் இயக்க விதியை (t_1, t_2) எனும் உள் இடைவெளியில் தோராயப்படுத்துகிறோம். அதற்கு இந்த இடைவெளியில் $\mathbf{F}$ நிலையானதென்றும் அதன் மதிப்பு $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{r}_n(t_1)$

$\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$ எனவும் கொள்கிறோம். இந்த முறையைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்த (t_0, T) என்ற முழு இடைவெளியிலும் தொடக்க மதிப்புகளைக் கொண்ட (1·2)-ன் சமன்பாட்டின் தோராயத் தீர்வு $\mathbf{r}(t)$ஐ அடைகிறோம்.

$n \to \infty$ எனும்போது உள்ளுணர்வால் இந்தத் தோராயத் தீர்வு சரியான தீர்வைக் காணுகிறது என அறிகிறோம்.

(1·2)-ல் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக, அதற்குச் சமமான இரண்டு முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளைக் கொள்ளமுடியும் என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். எவ்வாறெனில், $\mathbf{v}$ எனும் திசைவேகத்தை இரண்டாவது காணவேண்டிய சார்பலன் என்போம். அப்போது,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v},\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}),\ (1·3).$$

ஒவ்வொரு முப்பரிமாண வெக்டர் சமன்பாடுகளுக்குப் பதிலாக, மூன்று அச்சுக்களின்மேல் உள்ள வீழலைக் கொள்ள, மூன்று திசையிலிச் சமன்பாடுகள் வரும். இவ்வாறு (1·2)-ல் உள்ள சமன்பாடு மூன்று இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்குச் சமம். (1·3)-ல் உள்ள தொகுதி ஆறு முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்குச் சமம். இங்குக் கூறுகள் r_x, r_y, r_z என்பன வெக்டர் $\mathbf{r}(t)$-ன் குத்துப் பிரிவுகள். v_x, v_y, v_z என்பன வெக்டர் $\mathbf{v}$-ன் பிரிவுகள். இந்த வெளியைத் தோற்றவெளி (Phase space) என இயர்பியல் நூலில் கூறுகின்றனர். $\mathbf{R}(t)$ எனும் வெக்டர் இந்த வெளியில் $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$ எனும் கூறுகளையுடையதாக இருக்கிறது இத்தகைய குறியீட்டில்

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \phi(t_1, \mathbf{R}(t)) \qquad \dots \quad (1·4)$$

[இந்த முப்பரிமாண வெளியில் வெக்டர் ϕ-ன் வீழல், (1·3)-ன் வலப்பக்க உறுப்புகளின் முப்பரிமாண வீழல்களாகும்].

இந்த உரையுடன் கொள்ள $(1·2_1)$, $(1·2_2)$-ல் உள்ள தொடக்க மதிப்புக்குப் பிரதியாக,

$$\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \qquad \dots \quad (1·4_1)$$

எனக் கொள்கிறோம். (1·4)-ன் தீர்வு $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ என்பது தோற்ற வெளி இயக்கப் பாதையாகும். இதன் ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமோன இயங்கு துகளின் ஒரு நிலை இருக்கும் — அதாவது அதன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}(t)$-யும், அதன் திசைவேகம் $\mathbf{v}(t)$-ம்.

$(1·4_1)$-ல் உள்ள தொடக்க மதிப்புடன் (1·4)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுக்குத் தோராயமுறையைப் பயன்படுத்தினால், (t_0, t_1)

எனும் முதல் உள் இடைவெளியில் வெக்டர் சார்பலன் $\phi(t)$, $\mathbf{R}(t)$ நிலையாகும். அவற்றின் மதிப்புகள் $\phi(t_0, \mathbf{R}(t_0))$ ஆகும். ஆகவே $t_0 < t < t_0 + h$ எனும்போது.

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \phi(t_0, R(t_0))$$

இதிலிருந்து, dt ஆல் பெருக்கி, t_0-லிருந்து t வரை நுண்தொகை காண நாம் அடையும் ஒருபடித்தான வெக்டர் சார்பலன் $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) + \phi(t_0, \mathbf{R}(t_0)), (t - t_0)$$

குறிப்பாக $t = t_1$ என்றால் நாம் அடைவது,

$$\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}(t_0) + h\,\phi(t_0, \mathbf{R}(t_0))$$

இதேபோல ஏனைய உள் இடைவெளிகளிலும் கணக்கிட,

$$\mathbf{R}(t_2) = \mathbf{R}(t_1) + h\,\phi(t_1, \mathbf{R}(t_1)),$$
$$\mathbf{R}(t_k) = \mathbf{R}(t_{k-1}) + h\,\phi(t_{k-1}, \mathbf{R}(t_{k-1})).$$

இந்த வாய்பாடுகளை n முறை பயன்படுத்த $\mathbf{R}(T)$-ன் மதிப்பை அடைகிறோம்.

இந்த முறையில் கோரும் தீர்வு $\mathbf{R}(t)$ க்குப் பதிலாகத் தோராயமான துண்டுதுண்டாக உள்ள ஒருபடித்தான வெக்டர் சார்பலனைக் கொள்கிறோம். இதன் வரைபடம் ஆயிலரின் பலகோண வரை (Eulers' Polygonal Curve) எனப்படும் பல் கோட்டு உருவாகும். நடைமுறையில் (1·2)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுப் பிரச்சினை வேறு விதமாகக் காட்டப்படும். ஒரு துணை நியதிக்குப் பதிலாக இரண்டு இடங்களில் நியதிகள் தரப்படும். அத்தகைய பிரச்சினை தொடக்க மதிப்புப் பிரச்சினை அல்லது காஷி பிரச்சினை (Cauchy) எனப்படும். $1\cdot2_1$, $1\cdot2_2$ எனும் நியதிகளையுடைய பிரச்சினையைப் போலல்லாமல் எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $t = t_0$ எனும்போது $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ இருந்த துகள் m திணிவுடைய $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ எனும் விசை செயல்பட $t = t_1$ எனும்போது $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ எனும் நிலையை அடைகிறது. வேறு விதமாகக் கூறப் புகின் (1·2)-ல் உள்ள $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ எனும் எல்லை மதிப்புடன் (1 2)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு காணவேண்டுமென்பதாம். குண்டு பாய்தல் (Ballistics) பிரச்சினைகளில் பல இத்தகைய எல்லைப் பிரச்சினைக்கு ஒடுக்கப்படுகின்றன. தீர்வு தனித்தன்மை வாய்ந்ததென்று கூறமுடியாது என்பதை எளிதில் அறியலாம். ஏனெனில் $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}$ எனும் புள்ளியைக் குண்டு அடைய

ஏறக்குறைய கிடைப்பாதையிலோ அல்லது மேலே சென்று நேர் கீழே வரும் பாதையிலோ வரலாம்.

சரியாக அல்லது தோராயமாகத் தொடக்க மதிப்புப் பிரச்சினைகளுக்கோ அல்லது எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினைகளுக்கோ தீர்வு காண்பதே 'வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக் கணிதத்தின்' முக்கியப் பணியாகும். ஆயினும், சில சமயங்களில், தீர்வுகளின் சில பண்புகளை மட்டும் காணவேண்டி வரும். உதாரணமாக, திரும்பு அல்லது அலைவுச்சார்புகள் உள்ளனவா எனமட்டும் அல்லது தொடக்க மதிப்பின் சிறு மாறுதல்களுக்குத் தீர்வின் கணிசமான மாறுதல் ஏற்படுகிறதா எனமட்டும் காணவேண்டி வரும்.

கடைசியில் கூறப்பட்ட பிரச்சினை (1·2)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுக்கு எவ்வாறு பொருந்துகிறது என விரிவாகப் பார்ப்போம்.

தொடக்க மதிப்புகளில் சிறிய மாறுதல் தீர்வில் கணிசமான மாறுதலை ஏற்படுத்துகிற தென்றால் சரியல்லாத $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$-ன் மதிப்புகளால் ஒரு பயனுமில்லை. ஏனெனில், துகளின் இயக்கத்தைத் தோராயமாகக்கூடச் சமன்பாடு விவரிப்பதில்லை. ஆகவே, பயன்பாடுகளில் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த பிரச்சினை என்னவெனில், எந்தெந்த நியதிக்குட்பட்டால் சமன்பாடு. $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ எனும் தொடக்க மதிப்புகளில் சிறு மாறுதல் ஏற்பட்டால் காணவேண்டிய தீர்வு $\mathbf{r}(t)$-ல் சிறு மாறுதலையே விளைவிக்கும் என்பதாம்.

மற்றொரு இதுபோன்ற பிரச்சினை என்னவெனில், $\mathbf{r}_0$. $\dot{\mathbf{r}}_0$ எனும் தொடக்க மதிப்புகளில் எத்தகைய திருத்தமான மதிப்பிருந்தால், இயங்கும் துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட பாதையில் செல்லும், ஒரு குறிப்பிட்ட பிரதேசத்தில் சேரும் என்பதாம்.

இதேபோல முக்கியத்துவம் வாய்ந்த பிரச்சினை என்னவெனில் (1·2)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள சிறு உறுப்புகள் தீர்வை எவ்வாறு பாதிக்கின்றன என்பது (சிறிய, ஆனால் நிலையான விசைகள்).

சில இடங்களில், பரந்தகால இடைவெளியில் தொடர்ந்து செயல்படும் சிறு விசைகள் தீர்வை வெகுவாக பாதிக்கும். அவற்றை மதிக்காமலிருக்க முடியாது. இன்னும் சில இடங்களில் இதனால் தீர்வில் உண்டாகும் விளைவுகள் சாரமற்றதாகும். கணக்கிடுவதில் ஒரு குறிப்பிட்ட திருத்த அளவுக்கு மீறவில்லை எனின் அந்த விசைகளை மதிக்கவேண்டிய தேவையில்லை.

இப்போது வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தொகை காணும் முறைகளையும் வரும் தீர்வுகளை ஆராயும் எளிய முறைகளையும் படிப்போம்.

1. முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

1. முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் வகைக்கெழுத் தீர்வுகாணும் வகைகள்

சாதாரண முதல் வரிசை ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

எனக் குறிக்கலாம். இத்தகைய சமன்பாடுகளில் மிகவும் எளிதானவை,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

என்பது போன்றுகும். இவற்றைத் தொகை நுண்கணிதத்தில் காண்கிறோம். இதன் தீர்வு

$$y = \int f(x)\, dx + c$$

இதில் c என்பது ஏதேனும் திட்டப்படுத்தப்படாத ஒரு நிலை எண்ணுகும். $y(x_0) = y_0$ என்றால் c-ன் மதிப்பு நிச்சயிக்கப்படும். அப்போது,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

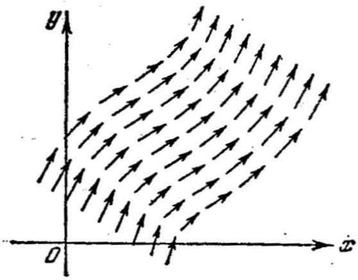
$f(x, y)$ எனும் சார்பலன், சில நியதிகளுக்கு உட்பட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

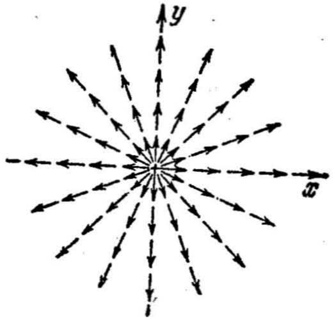
என்பதன் தீர்வு $y(x_0) = y_0$ எனும் நியதிக்குட்பட்ட திட்டமான தீர்வாக இருக்குமென்றும் ஆனால், அவ்வாறு நியதிகள் தரப்படாவிட்டால், சமன்பாட்டின் தீர்வு திட்டப்படுத்தப்படாத ஒரு நிலை எண்ணைச் சார்ந்த பொதுத் தீர்வு (General solution) ஆக இருக்கும் எனப் பின்னர் நிறுவுவோம்.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, ஒரு வரையில் உள்ள புள்ளியின் (x, y) கூறுகளுக்கும் வரைக்கு அங்குள்ள தொடுகோட்டின் சரிவுக்கும் உள்ள தொடர்பைத் தருவதாகும். (x, y) தொடர்பு தரப்பட்டால், $\frac{dy}{dx}$ கணக்கிடமுடியும். மேற்கூறிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரு திசைக்களத்தைத் (direction field) (படம் 1-1) திட்டமாகத் தருகிறது. சமன்பாட்டின் தீர்வு, ஒவ்வொரு புள்ளி



படம் 1–1



படம் 1–2

வழி. களத்தின் திசைவழிச் செல்லும் வரைகளைத் தருகிறது. இந்த வரைகள் நுண்தொகை வரைகள் (integral curves) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

இந்தச் சமன்பாடு தரும் வரைகளின் (0, 0) என்ற புள்ளி நீங்கலாக, மற்ற ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள தொடுகோட்டின் சரிவு $\frac{y}{x}$ ஆக இருக்கவேண்டும். அதாவது, புள்ளியை மூலப் புள்ளியுடன் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் சரிவாக இருக்கவேண்டும்.

படம் (1-2)-ல் இந்தச் சமன்பாடுதரும் திசைக்களம் அம்புக் குறிகளால் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(c-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வரும்) $y = cx$ எனும் கோடுகள் இங்கு நுண்தொகை வரைகளாகும். ஒவ்வொரு நேர் கோட்டின் திசையும் திசைக்களம் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் குறிப்பிடும் திசையையுடையதாய் இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

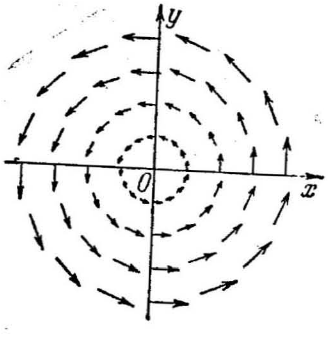
இந்தச் சமன்பாடுதரும் நுண்தொகை வரைகளுக்குள்ள தொடு கோடும், எடுத்துக்காட்டு 1-ல் தரப்பட்டுள்ள வரைகளின் தொடு கோடும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ளன என்பதைக் காணவும்.

[சரிவுகளின் பெருக்கற் பலன் $= -1$ என்பது இரு கோடுகள் குத்தாக இருப்பதற்குள்ள நியதி ஆகும்.]

இங்கு $-\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1$ ஆனதால் இந்த எடுத்துக்காட்டுத் தரும் திசைக்களமும், முன்னர்க் கூறிய திசைக்களமும் ஒன்றற் கொன்று குத்தாகவுள்ளன.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

எனும் சமன்பாடு தரும் நுண்தொகை வரைகள் மூலப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் என எளிதில் புலனாகும். அவற்றின் சமன்பாடு $x^2+y^2=c^2$ (அல்லது இன்னும் திட்டமாகக் கூறப் புகுந்தால் $y=\sqrt{c^2-x^2}$; $y=-\sqrt{c^2-x^2}$ என்பதாகும்).



படம் 1–3

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2}$$

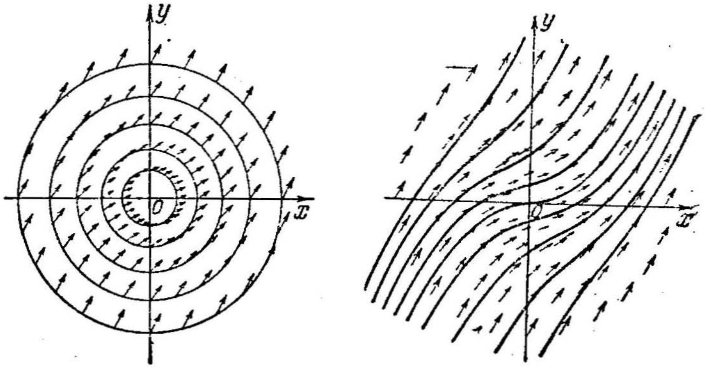
இந்தச் சமன்பாட்டின் திசைக் களத்தைக் காண, நுண்தொகை வரைகளின் தொடுகோடுகள் சமதிசையுடைய புள்ளிகளின் நியமப்பாதையைக் காணவேண்டும். அத்தகைய கோடுகள் சமச்சரிவு வரைகள் (isoclines) எனப்படும். இவற்றின் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx} = k \text{ ஆகும்.} \quad \therefore \sqrt{x^2+y^2} = k$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 = k^2$$

ஆகவே சமச்சரிவு வரைகள் இங்கு மூலப்புள்ளியை மையமாக வுடைய வட்டங்களாகும். காணவேண்டிய நுண்தொகை

வரைகளின் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள், வட்டங்களுக்குள்ள ஆரங்களாகும். திசைக்களம் வரைய, k-க்குத் திட்டமான மதிப்புகள் தரப்பட வேண்டும். படம் 1-4-ல் திசைக்களம் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 1-4

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$y' = 1 + xy$$

இங்குச் சமச்சரிவு வரைகள் $k = xy + 1$ எனப்படும் அதிபர வளைகளாகும். $xy = k - 1$; $k = 1$ என்றால் $xy = 0$ எனும் இரு கோடுகள் $x = 0$, $y = 0$ ஆகும் (படம் 1-5).

$k = 0$ என்றால் சமச்சரிவு வரை $1 + xy = 0$ இந்தப் பரவளை தளத்தை இரு பிரிவுகளாக்குகிறது. ஒவ்வொரு பிரிவிலும் y'ன் குறி மாறுதிருக்கிறது (படம் 1-6).

நுண்தொகை வரைகள் $y = y(x)$, $1 + xy = 0$ எனும் அதிபரவளையத்தை வெட்டுகின்றன. அன்றியும், $y(x)$ எனும் சார்பலன் அதிகரிக்கும் இடத்திலிருந்து குறையும் இடத்திற்கோ, அல்லது குறையும் இடத்திலிருந்து அதிகரிக்கும் இடத்திற்கோ செல்கின்றன. ஆகவே, மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புகள் அதிபரவளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகளாகின்றன. அதாவது அவை அதிபரவளையத்தின் இரு கிளைகளில் அமைகின்றன.

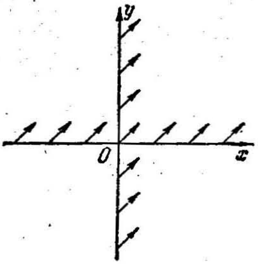
இப்போது இரண்டாவது வரிசை வகைக்கெழுவின் குறி, தளத்தின் வெவ்வேறு பிரதேசத்தில் எவ்வாறுள்ளன என்பதை நிச்சயிப்போம்.

$y'' = xy' + y$ அல்லது

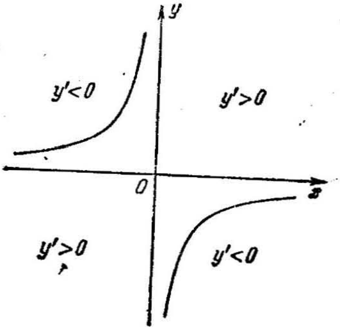
$y'' = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)y$

வரை $x + (x^2 + 1)y = 0$ அல்லது

$$y = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

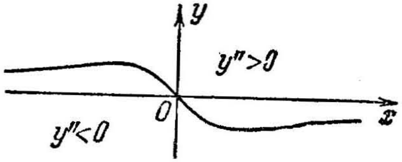


படம் 1–5



படம் 1–6

தளத்தை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கிறது (படம் 1-7). ஒரு பிரிவில் $y'' < 0$ ஆகவே, நுண்தொகை வரைகள் குமிழ் மேலாகவும் (convex upwards) மற்றப் பிரிவில் $y'' > 0$ ஆகவே,

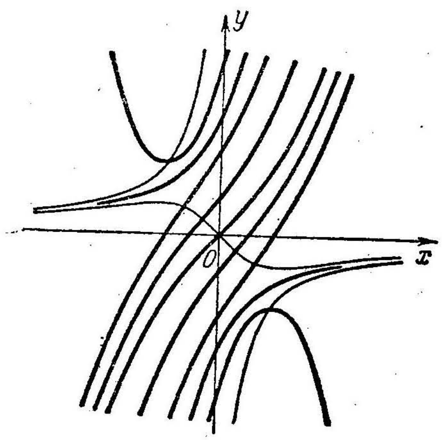


படம் 1–7

குழி மேல்நோக்கியும் (concave upwards) உள்ளது. $y = -\frac{x}{1 + x^2}$ தரும் வரையை நுண்தொகை வரைகள் கடக்கும்போது குழியிலிருந்து குமிழுக்குச் செல்கின்றன. ஆகவே, இந்த வரையில் நுண்தொகை வரைகளின் நெளிவுப் புள்ளிகள் (Points of inflection) அமைகின்றன.

இத்தகைய ஆராய்ச்சியினால், தளத்தில் எங்கெங்கு நுண்தொகைவரைகள் அதிகரிக்கின்றன, எங்கெங்கு குறைகின்றன

என்பது புலனாகிறது. அன்றியும் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புப் புள்ளிகள், குமிழ், குழிப் பிரதேசங்கள், நெளிவுப் புள்ளிகள் அமையும் வரை, சமச்சாய்வு வரை, $k=1$, அமையும் இடம் இவை யாவும் தெரிய வருகின்றன. நுண்தொகை வரைகளை வரைய மேற்கூறிய தகவல்கள் போதுமானவை எனினும் இன்னும் சில சமச்சாய்வுவரைகள் வரையப்பட்டால் நுண்தொகை வரைகளின் நிலையை இன்னும் திட்டமாகக் கூற முடியும்.



படம் 1–8

பல கணக்குகளில், உதாரணமாக வரைகணிதச் சம்பந்தமான அநேகமாக எல்லாக் கணக்குகளிலும் x, y என்பவை ஒன்றற்கொன்று சம நிலையை உடையன. ஆகவே, மேற்கூறிய கணக்குகள் $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (1.2) எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு ஒடுக்கப்பட்டால் இதனுடன் $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f(x,y)}$ (1.3) என்பதன் தீர்வையும் ஆராய முற்படுவது இயற்கையே.

இரண்டு சமன்பாடுகளும் பொருளுடையதெனின், இரண்டும் ஒரே தீர்வுகாண ஒரே தகுதியுடையன. ஏனெனில் $y=y(x)$ என்பது (1-2)-ன் தீர்வு என்றால், இதன் தலைகீழ்ச் சார்பலன் $x=x(y)$, (1-3)-ன் தீர்வு ஆகும். ஆகவே (1-2)-ம் (1-3)-ம் பொதுவாக ஒரே நுண்தொகை வரைகளைக் கொண்டனவாகும்.

ஆனால், ஏதேனும் சில புள்ளிகளில் (1·2), (1·3) சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்று பொருளற்றதானால் (மதிப்பு நிச்சயிக்க முடியாததானால்), அதற்குப் பதிலாக மற்றதைக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ என்பது $x=0$ எனும் இடத்தில் பொருளற்றதாகிறது. இதற்குப் பதிலாக $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$ என்பதைக் கொள்வோம்.

$x = 0$ எனும் போது வலப்பக்கம் திட்ட மதிப்புடையதாகிறது. ஏற்கெனவே கண்ட தீர்வு $y = c$ உடன் $x = 0$ எனும் மற்றொரு தீர்வு வரையும் வருகிறது (பக்கம் 8 பார்க்கவும்).

2. பிரிவுபடும் சமன்பாடுகள்
(Separable Equations)

$$f_2(y)\, dy = f_1(x)\, dx \quad \ldots \quad \ldots \quad (1{\cdot}4)$$

எனும் வடிவில் உள்ள சமன்பாடுகள் பிரிவுபடும் ராசிகள் கொண்ட சமன்பாடுகள் (equations with separated variables) எனப்படும். $f_1(x)$, $f_2(y)$ எனும் சார்பலன்கள் தொடர்ச்சியுடையன எனக் கருதப்படுகின்றன.

இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y(x)$ எனக் கொள்ளவும். (1·4)-ல் இதனைப் பிரதியிட ஒரு முற்றொருமை வருகிறது. நுண்தொகை காண வருவது,

$$\int f_2(y)\, dy = \int f_1(x)\, dx + c \quad \ldots \quad (1{\cdot}5)$$

c என்பது ஏதேனும் ஒரு நிலை எண்ணாகும். (1·4)ன் எல்லாத் தீர்வுகளும் பொருந்தும் திட்டமான தீர்வு (1·5)ஐ நாம் அடைந்தோம். (1·5)-ன் எல்லாத் தீர்வுகளும் (1·4)-ன் தீர்வுகளாகும். ஏனெனில் $y(x)$ எனும் ஏதேனும் சார்பலனைப் பிரதியிட்டால் (1·5)ஐ முற்றொருமையாக்குகிறது. இந்த முற்றொருமையை வகையீடு செய்ய $y(x)$ என்பதுவும் (1·4)-க்குப் பொருந்துகிறதென்பதைக் காண்கிறோம்.

கந்தழிக்குச் செல்லாத $\phi(x, y) = 0$ எனும் சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y(x)$ஐ x-ன் உட்படு சார்பாகத் தருவதானால், ஆராயப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகை எனப்படும்.

விதி விலக்குகின்ற கந்தழி செல்லாச் சமன்பாடு தரப்பட்டுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எல்லாவற்றையும் தருவதானால், அது முழுத் தீர்வு (அல்லது மொத்தத் தீர்வு) எனப்படும். இவ்வாறு (1·5) என்பது (1·4)-ன் முழுத் தீர்வு ஆகும். ஏனெனில் (1·5)-ல் உள்ளது yஐ உட்படு சார்பாகத் தர $f_2(y) \neq 0$ என்பது போதுமானதாகும்.

சில கணக்குகளில் வரையறுக்கப்படாத பொது நுண்தொகைகள் $\int f_1(x)\, dx$, $\int f_2(y)\, dy$ என்பன எளிய

சாதாரணச் சார்பலன்களில் சொல்ல முடியாதபடி வரலாம். இருந்தாலும் இத்தகைய இடங்களில் (1·4)-ன் தீர்வு காண்பது நுண்தொகைக் கணிதத்தின் பிரச்சினையாக ஒடுக்கப்பட்டதும் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதாகிவிட்டது எனக் கொள்வோம்.

$y(x_0) = y_0$ எனும் நியதிக்குட்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வைப் பிரித்தெடுக்க வேண்டுமானால்,

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)\, dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\, dx$$

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து அது வருகிறதென்பது வெளிப்படை. இது $y(x_0) = y_0$ என்பதைப் பயன்படுத்தி,

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)\, dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\, dx + c$$

என்பதிலிருந்து கிடைத்ததாகும்.

உதாரணம் 1 : $x\,dx + y\,dy = 0$

dx-ன் குணகம் x-ன் சார்பலன் மட்டுமாகும். dy-ன் குணகமும் y-ன் சார்பலனே. ஆகவே, ராசிகள் பிரிந்து நிற்கின்றன. தொகை காணக் கிடைப்பது,

$$\int x\,dx + \int y\,dy = c \text{ அல்லது } x^2 + y^2 = c_1^2$$

இது மூலப் புள்ளியை மையமாகவுடைய வட்டத் தொகுதியாகும். (9ஆம் பக்க எடுத்துக்காட்டு 2உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்).

உதாரணம் 2 :

$$e^{x^2}\, dx = \frac{dy}{\ln y}$$

தொகைகாண $\int e^{x^2}\, dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c$

$\int e^{x^2}\, dx$-ம் $\int \frac{dy}{\ln y}$-யும் சாதாரணச் சார்பலன்களாகக் கூற முடியாது. இருப்பினும் சமன்பாட்டின் தீர்வு கண்டோம் எனக் கூற முடியும். ஏனெனில், நுண்தொகை காணும் பிரச்சினையாக மாற்றப் பட்டுள்ளது.

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy$$

எனும் வடிவமுள்ள சமன்பாடுகளில் வகையீட்டுக் குணகங்கள் x y இவற்றின் தனித்தனிச் சார்பலன்களாகப் பிரியும்போது, அவை ராசிகள் பிரிவுபடும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எனப்படும் ஏனெனில் $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ என்பதால் வகுக்க ராசிகள் பிரிவுபட்ட சமன்பாடுகளாக முடியும்.

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy$$

$\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ என்பதால் வகுப்பதால், $\psi(y)\,\varphi_2(x)$ என்பதைப் பூச்சியமாக்கும் தனிப்பட்ட தீர்வை இழக்கிறோம் என்பதைக் கவனிக்கவும். $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ என்பவை தொடர்ச்சியற்றவையானல்,

$\dfrac{1}{\psi_1(y)\,\varphi_2(x)}$ என்பதைப் பூச்சியமாக்கும் உட்படாத தீர்வும் வரலாம்.

உதாரணம் 3 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c, \quad c > 0$$

ஆகவே $|y| = c\,|x|$

தொடர்ச்சியுடைய தீர்வை மட்டும் கொண்டால்,

$|y| = c\,|x|$ என்பது $y = \pm c\,x$ அல்லது $c_1 x$ என்பதற்குச் சமமாகும். c_1 என்பது நேரெண் அல்லது எதிரெண்ணுகலாம். ஆனல் $c_1 \neq 0$, y ஆல் வகுப்பதால், $y = 0$ எனும் தீர்வை இழக்கிறோம் என்பதைக் கருத்தில் கொண்டால், $y = c_1 x$ எனும் தீர்வில், $c_1 = 0$ எனவும் கொள்ளலாம் என்றும், அதனல் இழந்த தீர்வை, $y = 0$ என்பதை மீண்டும் பெறுகிறோம் என்பதையும் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு : உதாரணம் 3-ல், x, y என்பவை ஒன்று போலக் கருதப்படும் ராசிகள் என்றல், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ எனும் சமன்பாட்டில் $x=0$ என்பது திட்டமான மதிப்பைத் தராது பொருளற்றதாகிறது.

ஆகவே $\frac{dx}{dx} = \frac{x}{y}$ எனவும் கொள்ள $x = 0$ எனும் தீர்வும் ஒன்றுள்ளது என்பதும். அது $y = c_1 x$-ல் இல்லை என்பதும் வெளிப்படை.

உதாரணம் 4 :

$$x(1+y^2)\,dx - y(1+x^2)\,dy = 0$$

ராசிகளைப் பிரித்துத் தொகை காணவும்.

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2};\quad \int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2} + c;$$

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln c_1;$$

$$1 + y^2 = c_1(1+x^2).$$

உதாரணம் 5 :

$$\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}$$

$x(t)$ எனும் தீர்வு $x(1) = 1$ எனும்படி காண்க.

ராசிகளைப் பிரித்துத் தொகைகாண,

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t\,dt;\quad \sqrt{x} = t^2;\ x = t^4$$

உதாரணம் 6 :

முன்னுரையில் கூறியதுபோலக் கதிரியக்கத்தால் ஏற்படும் சிதைவு வீதம் சிதையாது நிற்கும் பொருளின் திணிவு x உடன் நேர்வீதத்தில் உள்ளது. x ஐ t-ன் சார்பலனுகக் காண்க. $t = t_0$ எனும்போது $x = x_0$ எனக் கொள்க.

வீதக் குணகம் k அறிவோமென்க. இதனை அழிவுவீதக் குணகம் என்போம். இந்த அழிவின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

(குறைக் குறியீடு, x அதிகரிக்க, ஏற்படும் குறைவைச் சுட்டிக் காட்டுகிறது $k > 0$) ராசிகளைப் பிரித்துத் தொகை காண,

$$\frac{dx}{x} = -kdt \quad \ln|x| - \ln|x_0| = -k(t-t_0)$$

ஆகவே, $x = x_0 e^{-k(t-t_0)}$

$\left(\frac{x_0}{2} \right.$ எனும் தினிவு சிதைய ஆகும் காலம் $\left. \right)$ அதாவது T எனும் பாதி ஜீவ காலத்தைக் காண்போம். $t - t_0 = T$ எனக்கொள்ள

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT} \qquad T = \frac{\ln 2}{k}$$

கதிரியக்க அழிவு மட்டுமல்ல, வேறு தனி மூலக்கூறு செயல்பாடுகளும் (Molecular reaction) மொத்தத் திணிவுச் செயல்பாடு விதி கூறும் சமன்பாடு $\frac{dx}{dt} = -kx$ என்பதாய் விவரிக்கப்படுகிறது. இங்கு x என்பது செயல்படாப் பொருளின் திணிவு ஆகும்.

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad k > 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1\cdot7)$$

எனும் சமன்பாடு (1·6)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து வலப் பக்கமுள்ள குறியில் மட்டும் மாறுபடுகிறது. இது மையக்கருவு சங்கிலி தொடர்ச் செயல்பாடுகளில் அல்லது நுண்மங்கள் உற்பத்தியில் ஏற்படும் பெருக்கத்தை விவரிக்கிறது. மிகவும் சாதகமான சூழ்நிலையில் உற்பத்தி வீதம் ஏற்கனவே உள் நுண்மங்களின் எண்ணிக்கையுடன் நேர்வீதத்தில் இருக்கும்.

$x(t_0) = x_0$ எனும் நியதிக்குட்பட்ட (1·7)-ன் தீர்வு $x = x_0 e^{k(t - t_0)}$. இங்கு (1·6)-ன் தீர்வைப்போல் குறையாது, அடுக்கு முறையில் t அதிகரிக்க, அதிகமாகிறது.

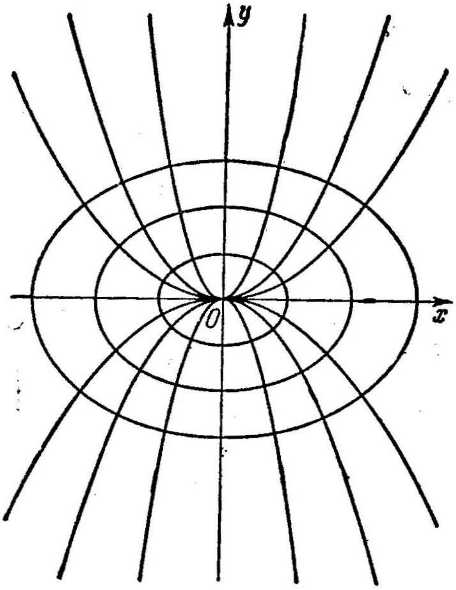
உதாரணம் 7 :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4)$$

இதன் தொகை காணுமல் தீர்வு வரைகள் அமைக்கவும். ρ, φ என்பவை கோணதூர உறுப்புக்கள்.

சமன்பாட்டின் வெளிப்படைத் தீர்வுகள் $\rho = 0, \rho = 2, \rho = 4$ $0 < \rho < 2$-க்கு $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$, $2 < \rho < 4$-க்கு $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$, $\rho > 4$-க்கு $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$. ஆகவே தீர்வு வரைகள் $\rho = 2, \rho = 4$ எனும் வட்டங்களாகும். $\rho = 2$ எனும் வட்டத்தைச் சுற்றி சுருள்கள் φ அதிகரிக்க, சுருள்கின்றன. பிறகு $\rho = 4$ எனும் வட்டத்திலிருந்து சுழன்று வருகின்றன. சுருள் தீர்வு வரைகளுக்கணி

மையில் உள்ள மூடிய தீர்வு வரைகள் எல்லைச் சுழல்கள் (Limit Cycles) எனப்படும். நமது உதாரணத்தில் எல்லைச் சுழல்கள் $\rho = 2$, $\rho = 4$ எனும் வட்டங்களாகும்.



படம் 1-9.

உதாரணம் 8 :

$y = ax^2$ எனும் பரவளையங்களுக்கு குத்துவரைத் தொகுதிகளைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட வரைத் தொகுதியின் வரைகளைக் குத்தாக வெட்டி அமையும் வரைகள் குத்துவரைத்தொகுதி எனப்படும். திரட்டப்பட்டுள்ள வரையின் சரிவு y'_1-ம், குத்துவரையின் சரிவு y'_2-ம் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $y'_2 = -\frac{1}{y'_1}$ என இருக்க வேண்டும். பரவளையத் தொகுதி $y = ax^2$-க்கு $y' = 2ax$, $a = \frac{y}{x^2}$ ஆனதால் $y' = \frac{2y}{x}$; ஆகவே குத்துவரைத்தொகுதியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $y' = -\frac{x}{2y}$.

ராசிகளைப் பிரிக்க $2y\,dy + x dx = 0$. இதனைத் தொகைகாணக் கிடைக்கும் நீள் வளையத் தொகுதி $\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$.

உதாரணம் 9 :

தளத்திற்கு இணையாகப் பாயும் திரவ நிலைப்பண்பு $u = xy$ எனத் தரப்படுகிறது. ஒழுக்கு வரைகளைக் காண்க.

ஒழுக்கு வரைகள் சமநிலைப் பண்பு வரைகளுக்குக் குத்துவரைகளாகும். இங்கு சமநிலைப் பண்பு வகைகள் $xy = c$. இந்த வரைகளுக்குத் தொடுகோட்டுச்சரிவு காணவும். $xy' + y = 0$ $y' = -\frac{y}{x}$. ஆகவே ஒழுக்கு வரைகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வடிவம் $y' = \frac{x}{y}$ அல்லது $ydy = xdx$, தொகை காண கிடைப்பது $x^2 - y^2 = c$ அல்லது அதிபரவளையத் தொகுதி.

உதாரணம் 10 :

உள் ஆரம் r_1 வெளி ஆரம் r_2 என உடைய சீரான உலோகக் கோளப் பந்து மாறா வெப்பநிலையில் உள்ளது. உட்புறத் தலவெப்பநிலை T_1 வெளிபுறத்தல வெப்பநிலை T_2. $r_1 < r < r_2$ எனும்படி மையத்தினின்று r தூரத்தில் உள்ள இடத்தில் வெப்ப நிலையைக் காண்க.

பொருள் சமச்சீராக இருப்பதால் வெப்பநிலை r-ன் சார்பலனாக மட்டும் உள்ளது என்பது தெளிவு.

பந்தின் மையத்தைப் பொது மையமாக உடைய இரண்டு கோள தலங்களுக்கிடையேயுள்ள வெப்ப அளவு மாறாதிருப்பதால் (ஆரம் r_1-லிருந்து r_2 வரை மாறலாம்). ஒரே அளவுள்ள வெப்பம் ஒவ்வொரு கோளதலம் வழிப் பாய்கிறது. இத்தகைய நிகழ்ச்சியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = Q.$$

இங்கு k என்பது வெப்பக்கடத்து குணகம்.

ராசிகளைப் பிரித்துத் தொகைக்காண, r-ன் சார்பலனாக T ஐக் காண்கிறோம்.

$$4\pi k dT = -\frac{Q dr}{r^2}$$

$$4\pi k \int_{T_1}^{T} dt = Q \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2}.$$

$$4\pi k\,(T - T_1) = Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Q-வைத் திட்டப்படுத்த $r = r_2$ எனும்போது $T = T_2$ எனும் நியதியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$Q = \frac{4\pi k\,(T_2 - T_1)}{\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}} = \frac{4\pi k\,(T_2 - T_1)\,r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

3. பிரிவுபடும் சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுங்கும் சமன்பாடுகள்

(Equations that lead to Separable Equations)

ராசிகளுக்குத் தக்கவாறு பிரதியிட, பலவகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள், பிரிக்கப்பட்ட ராசிகளையுடைய சமன்பாடுகளாக மாற்றப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by)$ என்பதைக் கொள்வோம். (இங்கு a, b நிலை எண்களாகும்.) $z = ax + by$ எனப் பிரதியிட பிரிக்கப்பட்ட ராசிகளையுடைய சமன்பாடாக மாறும்.

x, z எனும் ராசிகளையுடைய சமன்பாடாக மாற்ற

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx};$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = a + b\,f(z).$$

$$\therefore \frac{dz}{a + bf(x)} = dx.$$

இவ்வாறு ராசிகள், பிரிக்கப்பட்டன.

இருபுறமும் நுண்தொகை காண,

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + c$$

என ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

$z = 2x + y$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

$$\frac{dz}{dx} - 2 = z.$$

ராசிகளைப் பிரித்து நுண்தொகை காண,

$$\frac{dz}{z+2} = dx \quad ln\,|\,z+2\,| = x + lnc.$$

$$\therefore \quad z = -2 + ce^x,$$

$$2x + y = -2 + ce^x,$$

$$y = ce^x - 2x - 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

$x - y = z$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}; \quad 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1;$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}; \quad zdz = -dx;$$

$$z^2 = -2x + c.$$

$$(x-y)^2 = -2x + c.$$

சமச்சீர் ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous differential equations of the first order) எனப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளும் இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட ராசிகளையுடைய சமன்பாடுகளாக மாற்றலாம்.

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் வடிவில் இவையுள்ளன. $z = \frac{y}{x}$ என, அதாவது $y = xz$ எனக் கொள்ள,

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

$$x\frac{dz}{dx}+z=f(z)$$

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\quad \int\frac{dz}{f(z)-z}=ln\,|\,x\,|\,+lnc.$$

$$x=ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}.$$

மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் வலப்பக்கம் உள்ள சார்பலன், x, y ராசிகளில் சமபடிச் சார்பலன் (0 படிச்சார்பலன்). என்பதைக் கவனிக்கவும். ஆகவே,

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு சமபடித்தானதாக இருக்க, $M(x,y)$, $N(x,y)$ என்பவை இரண்டும் ஒரேபடியுடைய, சமபடிச் சார்பலனாக இருக்கவேண்டும். அவ்வாறெனில்,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f\left(\frac{y}{x}\right)\text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}.$$

$y=xz$ எனக் கொள்ள,

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z.$$

இதைப் பிரதியிட,

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+\tan z.$$

$$\frac{\cos z dz}{\sin z}=\frac{dx}{x}$$

$$ln\,|\sin z\,|=ln\,|\,x\,|+lnc$$

$$\sin z=cx$$

$$\sin\frac{y}{x}=cx.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$(x+y)\,dx-(y-x)\,dx=0;$ $y=xz$ எனக் கொள்ள $dy=xdz+zdx$

$$\therefore \quad (x + xz)\, dx - (xz - x)\,(xdz + zdx) = 0.$$

$$(1 + 2z - z^2)\, dx + x\,(1 - z)\, dz = 0.$$

$$\frac{(1 - z)}{1 + 2z - z^2}\; dz + \frac{dx}{x} = 0.$$

$$\frac{1}{2}\, ln \mid 1 + 2z - z^2 \mid + ln \mid x \mid = \frac{1}{2}\, lnc.$$

$$x^2\,(1 + 2z - z^2) = c.$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = c.$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right). \quad \dots \quad \dots \quad (1 \cdot 8)$$

எனும் வடிவிலுள்ள சமன்பாடுகளை சமபடித்தான சமன்பாடுகளாக்க, கூறுகளின் ஆதியை (origin of coordinates) (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றவேண்டும். $(x_1\ y_1)$ எனும் புள்ளி

$$a_1 x + b_1\, y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

எனும் நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியாகும் இவ்வாறு மாற்றினால் நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டில் நிலை எண் பூச்சியமாகும். $(x_1\ y)$ என்பது புதுக்கூறுகளானால்,

$$X = x - x_1,$$

$$Y = y - y_1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}.$$

சமன்பாடு $(1 \cdot 8)$ கீழ்வருமாறு மாறும்.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\right).$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left[\frac{a_1 + b_1 \dfrac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \dfrac{Y}{X}}\right] = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right).$$

இப்போது இது சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

எனும் சமன்பாடுகள் தரும் கோடுகள் இணைகோடுகளாகும்போது மேற்கூறிய முறை பொருந்தாது. ஆனால் இத்தகைய இடங்

களில் குணகங்கள் விகிதசமங்களில் அமையும். அதாவது, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ அப்போது (1·8)-ல் உள்ள சமன்பாட்டைக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

$$= F(a_1x + b_1y).$$

ஆகவே பக்கம் முன் கூறியபடி $z = a_1x + b_1y$ எனப் பிரதியிட, பிரிக்கப்பட்ட ராசிகள் உடைய சமன்பாடாக மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3};$$

$$x - y + 1 = 0$$

$x + y - 3 = 0$ எனும் சமன்பாடுகளை தீர்வுகாண $x_1 = 1;\ y_1 = 2.$

$x = X + 1 \quad y = Y + 2$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y},$$

$z = \frac{Y}{X}$ அல்லது $Y = zX$ என ராசி மாற்றம் செய்ய,

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

$$\frac{(1 + z)\,dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X}.$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln|1 - 2z - z^2| = \ln|X| - \tfrac{1}{2}\ln c.$$

$$(1 - 2z - z^2)X^2 = c.$$

$$X^2 - 2XY - Y^2 = c.$$

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c_1$$

4. முதல்வரிசை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்
(Linear equations of the first order)

முதல் வரிசை ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (A first order linear differential equation) என்பது காணவேண்டிய சார்

பலனிலும், வகைக்கெழுவிலும், அவற்றின்படி ஒன்று என அமைவது ஆகும்.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \text{ எனும் } \quad \ldots \quad (1\cdot9)$$

அத்தகைய சமன்பாட்டில் $p(x)$, $f(x)$ எனும் சார்பலன்கள், (1·9)-ன் தீர்வு காணவேண்டிய x-ன் அரங்கத்தில் (Domain) தொடர்ச்சியுடையவை ஆகும்.

$f(x) \equiv 0$, என்றால் (1·9)-ல் உள்ள சமன்பாடு சமபடித் தானது (Homogeneous) எனப்படும். அப்போது ராசிகள் பிரிவு படக்கூடியவை.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0; \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

இரு பக்கமும் நுண்தொகை காண,

$$ln\,|y| = -\int p(x)\,dx + lnc_1, \quad c_1 > 0$$

$$y = ce^{-\int p(x)\,dx}; c \pm 0 \quad \ldots \quad (1\cdot10)$$

y ஆல் வகுத்துச் சமன்பாட்டை மாற்றியதில் $y = 0$ எனும் போதுள்ள தீர்வை இழந்துவிட்டோம். ஆனால் (1·10)-ல் $c = 0$ என்பதையும் கொண்டால் இதையும் உட்படுத்துகிறோம்.

சமபடித்தானதல்லாத (non homogeneous) சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad \ldots \quad (1\cdot9)$$

என்பதன் தீர்வுகாண. 'துணையலகு மாறும் முறையைக் (method of variation of parameters) கையாளுவோம்'. இது கீழ்வருமாறு இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாடு,

$$\frac{dy}{dx} P(x)y = 0; \text{ இதன் தீர்வு}$$

$$y = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

c தரப்பட, $ce^{-\int p(x)\,dx}$ எனும் சார்பலன் தீர்வு ஆகும். (1·9) தீர்வு காண c-ஐ x-ன் சார்பலனாகக் கொள்வோம்.

அதாவது $y = c(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$ எனும் ராசிமாற்றம் செய்வோம். இங்கு $c(x)$ என்பது நமக்குத் தெரியாத — காண வேண்டிய—சார்பலனுகும் வகைக்கெழு காணும்போது வருவது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}\, e^{-\int p(x)\, dx} - c(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x) dx}.$$

இதை (1·9) தரும் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int p(x)\, dx} - c(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

$$+ p(x)\, c(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = f(x)$$

அதாவது $\dfrac{dc}{dx} = f(x)\, e^{\int p(x)\, dx}$

தீர்வுகாண வருவது,

$$c(x) = \int f(x)\, e^{-\int p(x) dx} + c_1$$

ஆகவே,

$$y = c(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

$$= c_1\, e^{-\int p(x)\, dx} + e^{-\int p(x)\, dx} \int f(x)\, e^{\int p(x)\, dx} dx \qquad \ldots \quad (1 \cdot 11)$$

தொகுத்துக் கூறுமிடத்து, சமச்சீரல்லாத (non homogeneous) ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு, அத்தகைய சமன்பாட்டிற்கேற்ற சமன்படித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாகிய $c_1\, e^{-\int p\, dx}$ உடன், தனித்தீர்வு (Particular solution) $e^{-\int p(x)\, dx} \int f(x)\, e^{\int p(x)\, dx}$ -ம் சேர்ந்த

கூடுதலாகும். இத்தனித் தீர்வு (1·11)-ல் $c_1 = 0$ எனும்போது வருவதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2;$$

இதற்கேற்ற சமச்சீர் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \quad ; \quad y = cx.$$

c-ஐ x இன்சார் பலனாகக் கொள்ளவும்.

அப்போது $\quad y = c(x)\,x; \quad cx(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x).$$

முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுச் சுருக்க

$$\frac{dc}{dx}x = x^2 \; dc = xdx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

முழுத்தீர்வு $\quad y = c_1 x + \dfrac{x^2}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\sin x$$

இதற்கேற்ற சமச்சீர் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cot x}$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln c$$

$$y = c\sin x$$

நிலை எண் c ஐ மாறி ஆக்க

$$y = c(x) \sin x ;$$
$$y' = c'(x) \sin x + c(x) \cos x ;$$

எடுத்துக்கொண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$c'(x) \sin x + c(x) \cos x \quad - c(x) \cos x = 2\, x \sin x.$$
$$\therefore \quad c'(x) = 2x ; \quad c(x) = x^2 + c_1 ;$$
$$y = x^2 \sin x + c_1 \sin x.$$

எடுத்துக்காட்டு **3 :**

ஒரு மின் ஓட்டத்தின் மின் நிலைமம் தரப்பட்டுள்ளது. அப்போது திசைமாறு மின் ஓட்டத்தைக்காண ஒருமுறை உள்ளது. மின்மட்ட வேற்றுமை V என்பது $V = V(t)$ எனும் காலம் 't'ன் சார்பலன் மின்தடை R-ம், இன்டக்டன்ஸ் L-ம் நிலையாகும். துவக்க மின் ஓட்டம் $I(0) = I_0$ என்றால் 't' எனும் கால நேரத்தில் $I = I(t)$ எனும் மின் ஓட்டம் காண்க.

'ஓம்' (Ohm) விதியைப் பயன்படுத்தி $V - L \dfrac{dI}{dt} = RI.$

இது ஒருபடிச் சமன்பாடு துவக்கநியதி $I(0) = I_0$. ஆகவே, (1·11)-ன் படி

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left[I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t V(t)\, e^{\frac{R}{L}t}\, dt \right].$$

$V = V_0$ எனும் நிலையான மின்மட்ட வேற்றுமைக்கு நாம் அடைவது

$$I = \frac{V_0}{R} + \left(I_0 - \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

$V = A \sin wt$ எனும் மாறுபடு மின் மட்டத்திற்கு (1·12)ல் பெறுவது

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left(I_0 + \frac{A}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L}t} \sin wt\, dt \right).$$

வலப்பக்க நுண் தொகை காண எளிதாகும்.

பெர்னெலிச் சமன்பாடு பல வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகளை ஒருபடி சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுக்கலாம். உதாரணமாக பெர்னெலிச் சமன்பாடு எனப்படுவதாகும். இதன் உருவம்

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n; \quad n \neq 1$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1\cdot 18)$$

$y^{1-n} = z$ எனப் பிரதியிட ஒருபடி சமன்பாடாகும். $y^{1-n} = z$-ன் வகைக்கெழுகாண,

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}.$$

இதை (1.18)-ல் பிரதியிடக் கிடைக்கும் ஒருபடி சமன்பாடு

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = f(x).$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}.$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + x^2.$$

$y^2 = z$ என்றால் $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$.

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2.$$

(இதன் தீர்வு எடுத்துக்காட்டு 1ல் தரப்பட்டுள்ளது).

ரிகாட்டிச் சமன்பாடு

$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொள்வோம். இதற்கு ரிகாட்டிச் சமன்பாடு (Riccatis Equation). இதைப் பெர்னெலிச் சமன்பாடாக மாற்றலாம். அதற்கு ஏதேனும் ஒரு $y_1(x)$ எனும் தனித்தீர்வு நாம் அறிய வேண்டும்.

$y = y_1 + z$ என்றால்

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x).$$

ஆனல் $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = 0$ என்பதால்,

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1] \quad z + q(x)z^2 = 0$$

எனும் பெர்னெளலிச் சமன்பாடு வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

இந்தக் கணக்கில் $y_1 = \frac{1}{x}$ என்பது ஒரு தனித் தீர்வு என்பது எளிதில் புலனாகிறது.

ஆகவே, $y = z + \frac{1}{x}$.

$$y' = z' - \frac{1}{x^2} \quad \therefore \quad z' - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

$z' = z^2 + 2\frac{z}{x}$; இது பெர்னெளலிச் சமன்பாடாகும்.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1;$$

$u = \frac{1}{z}$ என்றால், $\frac{du}{dx} = -\frac{z^1}{z^2}$

$$\therefore u\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} - 1.$$

இப்போது $\frac{du}{dx} = -2\frac{dx}{x} \; ln\,|\,u\,| = -2ln\,|\,x\,| + lnc$

$$u = \frac{c}{x^2} \qquad u = \frac{c(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad u = \frac{c^1(x)}{x^2} = -1; \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + c_1.$$

$$\therefore \; u = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}$$

$$\frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3} \quad y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_2 - x^3}$$

5. சரியான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்
(Exact differential equations)

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ எனும் (1·14) வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம் $u(x, y)$ எனும் ஒரு சார்பலனின் முற்றிலும் வகையீடாக (Total differential) இருக்கலாம். அப்போது (1·14)-ல் உள்ள சமன்பாடு,

$du(x, y) = 0$ என மாறுகிறது.

$y(x)$ என்பது 1·14-ன் தீர்வு ஆனுல்,

$$du(x, y(x)) \equiv 0,$$
$$u(x, y(x)) = c, \qquad (1\cdot15)$$

இங்கு c நிலை எண்.

மறுதலையாக ஏதேனும் ஒரு சார்பலன் $y(x)$, சமன்பாடு 1·15-ஐ முற்றொருமையாக்கினுல், வகைக்கெழு காண,

$$du(x, y(x)) = 0$$

∴ $u(x, y) = c$ என ஒரு துவக்க மதிப்பு (Initial value) தரப்பட்டால் 1·15-ல் உள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து நிலை எண் c-ன் மதிப்பு திட்டப்படுத்தப்படும். $c = u(x_0, y_0)$ ஆகும். $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ என்பது கோரிய தனித்தீர்வு ஆகும்.

(x_0, y_0) எனும் புள்ளியில் $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$, $(1\cdot15_1)$

எனும் சமன்பாடு (x, y)-ல் உட்படு சார்பலனுகும்.

(1·14)-ல் இடப்பக்கம் ஆகிய

$M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ஏதேனும் ஒரு சார்பலன் $u(x, y)$-ன் முற்றும் வகையீடு ஆகத் தேவையும் போதுமானதும் ஆன நியதி

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$ என்பது நாம் அறிந்ததே. (1·16)

ஆயிலர் (Euler) காட்டியதுபோன்று, இந்த நியதி இருப்பின் (1·14)-ல் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு நேரடியாகத் தொகையிட முடியும்.

$du = Mdx + Ndy$ என நேரடியாக அமையும்.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

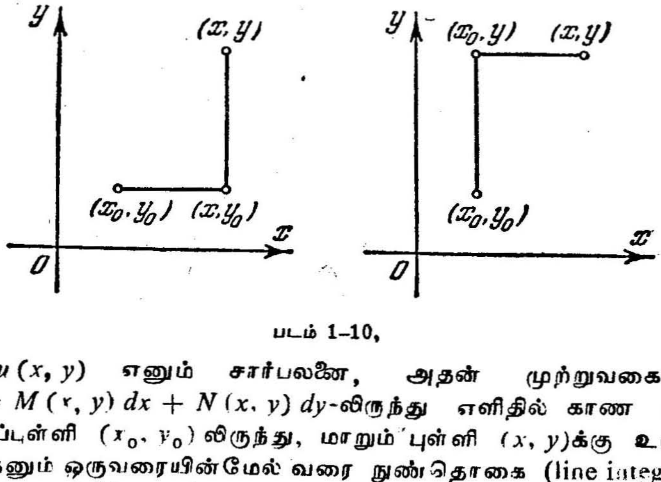
$$\therefore \quad u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + c(y)$$

$\int M(x, y\ dx$ தொகையிடும்போது y-ஐ நிலை எண்ணுகக் கொள்வோம். ஆகவே, $c(y)$ என்பது ஏதேனும் y-ல் ஒரு சார்பலனுகும்.

(y) ஐக் காண $u(x, y)$-ன் y ஐ மட்டும் சார்ந்த பகுதி வகைக்கெழு காணவும். ஏனெனில் $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ என்பதால்,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, dx\right) + c'(y) = N(x, y)$$

இதிலிருந்து $c'(y)$ திட்டப்படுத்த முடியும்; பிறகு $c(y)$ காண முடியும்.



படம் 1–10,

$u(x, y)$ எனும் சார்பலனை, அதன் முற்றுவகையீடு $du = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$-லிருந்து எளிதில் காண ஒரு நிலைப்புள்ளி (x_0, y_0) லிருந்து, மாறும் புள்ளி (x, y)க்கு உள்ள ஏதேனும் ஒருவரையின்மேல் வரை நுண்தொகை (line integral) கண்டு, அறிவது எளிது என்பதைக் கணிதப் பகுப்பாய்விலிருந்து (Mathematical analysis) நாம் அறிவோம்.

அதாவது, $$u(x, y) = \int_{x_0 y_0}^{(x, y)} M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

ஆயங்களுக்கு இணையாக இருகோடுகளைக் கொண்ட பல கோண கோடாக தொகை காணும் பாதையை எடுப்பின் பெரும்பாலான வகைகளில் வசதியாக இருக்கும். இவ்வகையில்

$$\int_{x_0 y_0}^{x y} Mdx + Ndy = \int_{x_0 y_0}^{x,\, y_0} Mdx + \int_{x,\, y_0}^{xy} Ndy$$

அல்லது $$\int_{x_0 y_0}^{x,\, y} Mdx + Ndy = \int_{x,\, y}^{x_0 y} Ndy + \int_{x_0 y}^{x y} Mdx$$

எடுத்துக்காட்டு **1** :

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 - 3) \quad dy = 0$$

இடப்பக்கம் $u\,(x,\, y)$ எனும் ஒரு சார்பலனின் முற்று வகையீடு ஆகும். ஏனெனில்,

$$\frac{\partial\,(x + y + 1)}{\partial y} = \frac{\partial\,(x - y^2 - 3)}{\partial x} \text{ ஆனதால்}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y + 1; \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + c\,(y)$$

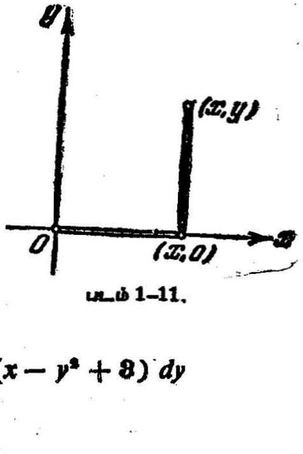
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + c'\,(y); \quad x + c'\,(y) = x - y^2 + 3.$$

$$\therefore \quad c'\,(y) = -\,y^2 + 3;\; c\,(y) = \frac{y^3}{3} + 3y + c_1.$$

$$\therefore \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1.$$

∴ முழுத் தீர்வு

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = c_2 \ldots \quad (1{\cdot}17)$$



படம் 1–11.

இதையே மாற்று வழியிலும் காணலாம். $(x_0,\, y_0)$ எனும் துவக்கப் புள்ளியை ஆதியில் (origin) கொள்வோம். படம் 1.11-ல் காணும் பாதை வழி துண்தொகை காண்போம்.

$$\therefore\; u(x,\, y) = \int_{(0,\,0)}^{(x,\,0)} (x + 1)\,dx + \int_{x,\,0}^{xy} (x - y^2 + 3)\,dy$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = c$$

முழுத் தீர்வு $\frac{x^2}{1} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = c$

இதுவே (1·17) என்பதிலும் காண்கிறோம்.

$M(xy)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம் சில வகைகளில் முற்றும் வகையீடாக இல்லாமலும் சில வகைகளில் இருப்பின் அதை $\mu(x, y)$ எனும் சார்பலனால் பெருக்க முற்று வகையீடாகலாம். அப்போது (1·14)-ல் சமன்பாடுகள் இடப்பாகம் $du = \mu M dx + \mu N dy$ என மாறும். அத்தகைய சார்பலன் μ, நுண்தொகை காண குணகம் (Integrating factor) எனப்படும். இவ்வாறு பெருக்குவதால் பொருந்தாத, இத்தகைய குணகங்களை பூச்சியமாக்கும், தனித்| தீர்வுகளையும் தோற்றுவிக்கும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x\,dx + y\,dy + (x^2 + y^2)\,x^2\,dx = 0$$

$\frac{1}{x^2 + y^2}$ என்பதால் இடப்பக்கத்தைப் பெருக்க அது முற்று வகையீடாக மாறும் என்பதை எளிதில் உணரலாம். அப்போது வருவது $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + x^2 dx = 0.$

நுண்தொகை காண,

$$\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = \ln c_1.$$

ஆனால் நுண்தொகைகாண்குணகம் எப்போதும் எளிதில் புலனாகாது. பொதுவாக,

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \text{ எனும்}$$

பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் ஒரு தனித் தீர்வு காண வேண்டும்.

(இது முற்றொருமையாகப் பூச்சியமாகலாகாது.

இதனை விரித்தெழுத வருவது,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu$$

μ ஆல் வகுத்து சில உறுப்புக்களை இடம் வலம் மாற்ற வருவது

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad \ldots (1.18)$$

பொதுவாக இதன் தீர்வு காண்பது, முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதைவிட எளிதாக இராது. ஆனல் சில கணக்குகளில் (1.18)-ன் தனித் தீர்வு எளிதில் காணமுடியும்.

அல்லாமலும், ஒரு சார்பலனின் நுண்தொகை காண்குணகம், $x + y$, அல்லது $x^2 + y^2$ இவற்றின் சார்பலனகவோ, அல்லது x-ன் தனிச் சார்பலன், y-இன் தனிச்சார்பலனகவோ அமையும் என்பதை கவனத்தில் கொண்டால் (1·18)-ன் தீர்வை எளிதில் காணலாம். எத்தகைய இடங்களில், மேற்கூறிய குணகங்கள் உள்ளன என்பதையும் திட்டப்படுத்தலாம். இவ்வாறு வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளை. ஒவ்வொரு குணகத்திற்குமெனத் தரம் வாரியாகப் பிரிக்கலாம்.

உதாரணமாய் x ஐ மட்டும் சார்ந்த குணகம் உடைய $Mdx + Ndy = 0$ அமைய உள்ள நியதி என்ன என்பதைப் பார்ப்போம். சமன்பாடு (1·18). இப்போது,

$$-\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \text{ என ஆகிறது.}$$

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ என்பதை x-ன் தொடர்ச்சியுறு சார்பலனகக் கொள்ள வருவது,

$$\ln \mu = \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + \ln c,$$

$$\mu = ce^{\int \frac{\frac{\partial M}{dv} - \frac{\partial N}{dx}}{N} dx} \quad \ldots (1\cdot19).$$

$c = 1$ எனலாம். ஏனெனில் நாம் வேண்டுவது ஏதேனும் ஒரு குணகம் மட்டுமாகும்.

$\therefore \displaystyle\int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ என்பது x-ன் தனி. சார்பலனுகும். x ஐ மட்டும் உள்ள சார்பலனுகிய குணகம் உள்ளது. அது (1·19) ஆகும் எனவும், அறிகிறோம். அவ்வாறு x-ன் தனிச் சார்பலன் அல்லவாகிய மேற்கூறிய குணகம் இல்லை எனவும் புலனுகிறது.

உதாரணமாக,

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டில் $[p(y)y - f(x)]dx + dy = 0$.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x) \qquad \therefore \mu = e^{\int p(x)dx}.$$

என நுண்தொகைகாண் குணகம் வருகிறது. இதேபோன்று $\mu(y)$, $\mu(x \pm y)$, $\mu(x^2 \pm y)$ $M\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் பல குணகங்கள் இருக்க உள்ள நியதிகளை இதுபோன்று காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$xdx + ydy + xdy - ydx = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு நுண்தொகை காண்குணகம் $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ எனும் உருவில் உண்டா ?

$x^2 + y^2 = z$ என்போம்.

அப்போது சமன்பாடு (1·18)

$$2(My - Nx)\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$ எனவாகிறது.

இதிலிருந்து $\ln|\mu| = \frac{1}{2}\int \phi(z)dz + \ln c.$

$$\therefore \quad \mu = ce^{\frac{1}{2}\int \phi(z)dz} \qquad (1·21)$$

$$\phi(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}.$$

ஆகவே $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ எனும் வடிவில் நுண்தொகை காண் குணகம் அமைய தேவையானதும் $\phi(z)$ எனும் சார்பலன் தொடர்ச்சியுடையதெனக் கொண்டால் போதுமானதுமான நியதி

$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$ என்பது $(x^2 + y^2)$-ல் மட்டும் சார்பலனாக வேண்டும்.

அவ்வாறெனில் $\frac{\frac{\partial N}{\partial c} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\mu y - Nx} = \frac{-2}{x^2 + y^2}$ ஆகவே நுண்தொகை காண் குணகம் உள்ளது, அது (1·21)-ல் காண்பதாகும்.

$e = 1$ என்றால்,

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

(1·20) ஐ $\mu = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ ஆல் பெருக்க, அதன் உருவம்

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + \frac{xdx-ydy}{x^2+y^2} = 0 \text{ என ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{2} d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0.$$

$$\frac{1}{2} d\ln(x^2+y^2) + d \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

துண்தொகை காண,

$$\ln\sqrt{(x^2+y^2)} = -\arctan\frac{y}{x} + \ln c$$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2} = ce^{-\arctan\frac{y}{x}}$$

கோணதூர உறுப்புகளைப் பயன்படுத்த

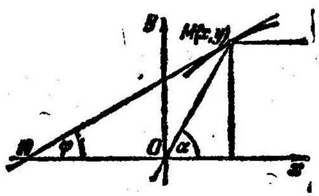
$$\rho = ce^{-\phi}$$

அதாவது இலாகரிதச் சுருள்வரைக் குடும்பம் (family of logarithmic spiral) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

ஒரு புள்ளியிலிருந்து விடுபடும் ஒளிக் கதிர்களை, ஒரு திசைக்கு இணையாகப் பிரதிபலிக்கும் கண்ணாடியின் வடிவத்தைக் காண்க.

புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்க ; திசைக்கு இணையாகப் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டை x அச்சாகவும் கொள்க. கண்ணாடியில் $M(x, y)$ எனும் புள்ளியில் ஓர் ஒளிக்கதிர் தாக்கட்டும்.



படம் 1–12.

x, y தளத்தால் கண்ணாடியில் ஏற்படும் வெட்டு முகத்தைக் கவனிப்போம். கண்ணாடியின் விளிதளத்திற்கு r-ல் தொடுகோடு

MN ஆகுக. படுகோணம் (angle of incidence), விடு கோணத்திற்குச் (angle of reflection) சமமானதால் முக்கோணம் MNO இரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

$$\therefore \quad \tan \phi = y^1 = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$\frac{x}{y} = z$ என இந்தச் சமச்சீர் சமன்பாட்டில் பிரதியிடத் தீர்வு காணமுடியும்.

$$\text{ஆனால்} \quad y^1 = \frac{y(x - \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 - (x^2 + y^2)}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - \sqrt{x^2 + y^2})}{-y^2}.$$

$$= \frac{x - \sqrt{x^2 + y^2}}{-y}.$$

$$\therefore \quad x\,dx + y\,dy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ என்பது தொகைகாண் குணகம் என்பது எளிதில் புலனாகிறது.

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx .$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + e.$$

$$y^2 = 2\,cx + c^2.$$

பரவளையங்கள் கொண்ட ஒரு குடும்பமாகும்.

குறிப்பு :—இந்தக் கணக்கை x, p எனும் கூறுகளில் இன்னும் எளிதாகத் தீர்வுகாண முடியும்.

இங்கு $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ தலத்தின் வெட்டுமுகச் சமன்பாடு $dx = d\rho$, $\rho = x + c$.

(1.18)-ல் காணப்படும் பகுதிவகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்கு பூச்சியமல்லாத தீர்வு உண்டா என்பதை—அதாவது நுண் தொகை காண்குணகம் உள்ளதா என்பதை—நாம் நிறுவ முடியும். அதற்கு M, N எனும் சார்பலன்கள் தொடர்ச்சியுடை வகையீடுகள் உள்ளன ஆகவும், அவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றுவது பூச்சியமாகாமலும் இருக்கவேண்டும். ஆகவே.

$M\,dx + N\,dy = O$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண சாதாரணப் பொது முறை நுண்தொகைகாண் குணகத்தைக் காண்பதாகும். ஆனால் அது எளிதல்ல. ஆகவே இம்முறை குணகம் எளிதில் புலனாகும் கணக்குகளில் மட்டும் பயன்படுகிறது.

6. $\frac{dv}{dx}=f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு உள்ளமை நிச்சயிக்கும் தேற்றமும், தீர்வின் தனித்தன்மையும்

[Theorems of existence and uniqueness of solution of the equation $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$]

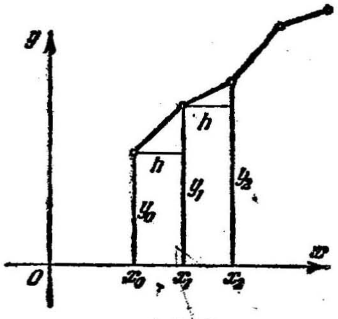
நுண்தொகை கண்டு தீர்வு காணப்படும். வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் மிகச் சிலவே. இதனால் ஆயிலர் (Eiler) காலத்திலிருந்து தோராயமாகத் தீர்வு காணும் முறை இந்தக் கணிதத்தில் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாக இருந்தது.

கணக்கிற்கும் இயந்திரங்கள் பல உள்ள இந்தக் காலத்தில், இத்தகைய தோராயமாகத் தீர்வு காணும் முறை இன்னும் முக்கியத்துவம் அமைந்துள்ளது.

நேரடியாக நுண்தொகை கண்டு தீர்வு காண இயலும் கணக்குகளையும் தோராயமாகத் தீர்வுகாணல் உசிதம் என எண்ணப்படுகிறது. எளிதான சார்பலன்களில் விடைகண்டாலும் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி மதிப்புக்காண்பது, கம்ப்யூட்டர்களைப் பயன்படுத்திக் காண்பதைப் போன்று லகுவானதல்ல. ஆனால் தோராயமாகத் தீர்வு காணுமுன்பு தீர்வு உள்ளதா என்பதையும் அத்தகைய தீர்வு தனித்தன்மை (unique) வாய்ந்தது, பல தீர்வுகளில் ஒன்றல்ல என்பதும் திட்டமாகவேண்டும் என்பது நிச்சயமாகாது.

பல இடங்களில், தீர்வு உள்ளமையை (existence) நிலைநாட்டும் நிரூபணமே, தீர்வு காணும் முறையையும் காட்டும். ஆகவே இத்தகைய உள்ளமைத்தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம் இன்னும் அதிகமாகிறது. எடுத்துக்காட்டாக தேற்றம் 1·1-ன் நிரூபணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இது வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகட்கு ஆயிலரின் தோராயத் தீர்வு காணும் முறையையும் நிலைநாட்டுகிறது.*

இம்முறையில் $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கேற்ற, $(x_0\ y_0)$ வழிச்செல்லும் வரைக்குப் பதிலாக பல கோணம் (polygon) வரையப்படுகிறது. ஒவ்வொரு பக்கமும், வரையின் தொடு கோடுகளாகும். $x = b$ எனுமிடத்துத் தீர்வின் தோராயமான தீர்வு காண $x_0 < x < b$ எனும் துண்டை $(b > x_0)$ n சமமாக $x_0\ x_1\ x_2 \ldots x_n$ $(x_n = b)$ எனப்பிரிக்கப்படுகிறது. $x_{i+1} - x_i = h$ என்பது இடைவெளி எனப்படும். x_i எனும் புள்ளியின் y இன் தோராய மதிப்பு y_i ஆகுக.



படம் 1·13.

$x_0 < x < x_1$ எனும் இடைவெளியில் y_1 ஐக் கணக்கிட, $(x_0\ y_0)$ எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடு கோட்டுத் துண்டை, வரைத் துண்டுக்குப் பதிலாகக் கொள்ளவும். $y_1 = y_0 + hy_0'$, இங்கு $y_0' = f(x_0\ y_0)$ ஆகும். (படம் 1·13 பார்க்கவும்.)

இதே போல

$$y_2 = y_1 + hy_1' \qquad \text{இங்கு } y_1' = f(x_1\ y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hy_2' \qquad y_2' = f(x_2\ y_2)$$

$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}' \qquad y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$b < x_0$ என்றால் இதே முறைதான் பின் பற்ற வேண்டும். ஆனால் 'h' என்பது குறை எண்ணாகும். $h \to 0$ ஆகும். ஆயிலரின் பல கோணவரைகள் தீர்வு வரையை நெருங்கும் என எதிர்பார்ப்பது இயற்கையே. ஆகவே 'h' இன் மதிப்பு குறையக் குறைய, ஆயிலரின் தீர்வு மேலும் மேலும் துல்லியமாக இருக்கும்.

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $y(x_0) = y_0$ எனும் போது. சில மிகவும் தேவையான நியதிகட்கு $f(x, y)$ உட்படும் போது, ஏற்படும் தீர்வு உள்ளமைக்கும் தனித் தன்மைக்குமான நிருபணத்தை, மேற்கூறிய கூற்றை நிலைநாட்டும்போது காண்போம்.

தேற்றம் 11 : (தீர்வு உள்ளமையும் அதன் தனித்தன்மையும்)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \ldots \quad (1\cdot22)$$

என்ற சமன்பாட்டில் $x_0 - a < x < x_0 + a$

$y_0 - b < y < y_0 + b$

என்ற D எனும் செவ்வகத்தினுள் $f(x, y)$ தொடர்ச்சியானது. அன்றியும் D-ல் அது லீப்சிஸ் நியதியாகிய,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N|y_1 - y_2|,$$

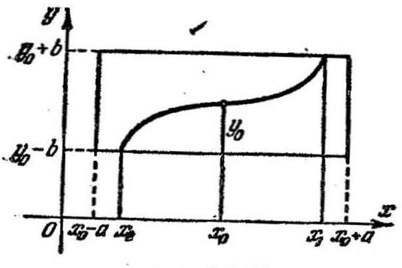
(N மாறிலி) எனும் நியதிக்குட்பட்டது. என்றால் $x_0 - H < x < x_0 + H$ எனும்படி $y = \bar{y}(x)$ எனும் தனித்தன்மையுடைய தீர்வு உள்ளது.

அது $y(x_0) = y_0$ எனும்படியுள்ளது. இங்கு,

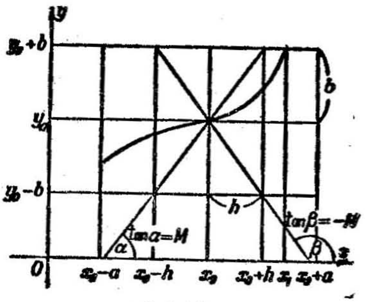
$$H < \text{Min}\left(a, \frac{b}{M}, \frac{l}{N}\right)$$

$$M = \text{Max} f(x, y), \ D\text{-ல்}$$

தேற்றத்தில் கண்டுள்ள நியதிகளைப் பற்றிச் சற்று விரிவாகக் கூறவேண்டும்.



படம் 1.14.



படம் 1.15.

(1·22) இல் காணப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு $y(x_0) = y_0$ எனும் படியுள்ள $y = y'(x)$ எனும் தீர்வு $x_0 - a \leqslant x < x_0 + a$ எனும் இடைவெளியில் உள்ளது எனத் திட்டமாகக் கூற முடியாது. ஏனெனில் $y = \bar{y}'(x)$ எனும் வரை $y = y_0 \pm b$ எனும் மேல் அல்லது அடிப்பக்கம் வழியாக D எனும் செவ்வகத்திலிருந்து வெளி ஏறலாம். அப்போதுள்ள x-ன் மதிப்பு $x = x_1$, $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$ ஆக இருக்கலாம். $x_1 > x_0$ என்றால் $x > x_1$ எனும் இடத்தில் தீர்வின் மதிப்பு நிச்சயமற்றதாக இருக்கலாம். இது போலவே $x_1 < x_0$ என்றால் $x < x_1$ எனும்

மதிப்புக்கு இதேபோல ஆகலாம். ஆனால் $x_0-H < x < x_0+H$ எனும்படி x-ன் மதிப்பு மாறினால் $y = \bar{y}(x)$ எனும் வரை D எனும் செவ்வகத்திற்கு வெளியே இருக்க முடியாது என உறுதி கூற முடியும். இங்கு H என்பது a, $\frac{b}{M}$ எனும் எண்களில் கீழ் மதிப்பு எண்ணாகும். ஏனெனில் தீர்வு வரையின் தொடுகோட்டின் சரிவு, படம் 1-15-ல் காட்டப்பட்டுள்ள இரு நேர்கோடுகளின் சரிவுகளாகிய $+M$, $-M$க்கு இடையே அமையும் தீர்வு வரையை உள்ளடக்கும் இரு கோடுகள் D எனும் செவ்வகத்தை விட்டு $y = y_0 \pm b$ எனும் அதன் பக்கங்கள் வழி வெளிச்சென்றால், கோடுகள் பக்கங்களை வெட்டும் x உறுப்புக்கள் $x_0 \pm \frac{b}{M}$ க்கு இடையே அமையும். இதன் விளைவு யாதெனில் தீர்வு வரை செவ்வகத்தை விட்டு வெளியேறும் புள்ளியின் x கூறு $x_0 - \frac{b}{M} < x$ $< x_0 + \frac{b}{M}$ ஆகும்.

$H = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ எனும்படி $x_0-H < x < x_0+H$ எனும் இடைவெளியில் தீர்வு உள்ளமையை நிறுவ முடியும். ஆனால் அதைவிட எளிதானது முதலில் $x_0 - H < x < x+H$ $\left(H = min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{l}{N}\right)\right)$ எனும் இடைவெளியில் தீர்வு உள்ளதெனவும் பிறகு தீர்வு உள்ளமையை தொடர்ந்து நிச்சயிக்கும் நியதிகளும் காட்டப்படும்.

லீப்சிஸ் நியதி.

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| < N\,|y_1-y_2|$$

பதிலாக, அத்தனை கடினமானதாக இல்லாத நியதியைக் கொள்ள முடியும். எளிதில் சரிகாண முடியும்— D எனும் செவ்வகத்தில் $f'(x_1\, y)$ எனும் பகு வகைக்கெழு உள்ளமைக்கு — காணலாம்.

செவ்வகம் D-ல், $|f'_y(x, y)| < N$ என்றால்

இடைமதிப்புத்தேற்றத்தின்படி (mean value theorem)

$$|f(x_1\, y_1)-f(x_1\, y_2)| = f'(x, \xi)\,|y_1-y_2|$$

இங்கு ξ என்பது y_1க்கும் y_2க்கும் இடையேயுள்ள எண்ணாகும்— ஆகவே $(x_1\, \xi)$ என்பது செவ்வகம் D-ல் உள்ளது. ஆகவே,

$| f'_y (x_1\ \xi) | < N | f(x_1\ y_1) - f(x_1\ y_2) | < N | y_1 - y_2 |$
$(x_1\ o)$ எனும் புள்ளிகளுக்கருகே லீப்சிஸ் நியதிக்குட்பட்ட ஆனல் $\frac{\partial y}{\partial x}$ ஒரு சில புள்ளிகளில் அமையாத சார்பலன்கள் $f(x_1\ y)$ — எடுத்துக்காட்டாக $f(x_1\ y) = |y|$ — கூற முடியும் ஆகவே $\left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| < N$ எனும் நியதி. லீப்சிஸ் நியதியைப் போன்று கடினமானதல்ல.

உள்ளமையும் தனித்தன்மையும் நிலைநாட்டும் நிருபணம் :

$$\frac{dy}{dx} = f(x.\ y) \qquad \ldots \quad (1{\cdot}22)$$

இதன் துவக்க நியதி $y(x_0) = y_0$ ... $(1{\cdot}23)$
இதற்குப் பதிலாக,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{n} f(x, y)\, dx \qquad \ldots \quad (1{\cdot}24)$$

என்பதைக் கொள்க.

$y = \bar{y}(x)$ எனும் சார்பலன் 1·22-ல் பிரதியிட அது முற்றொருமை ஆகி, அத்துடன் 1-23-ல் உள்ள நியதிக்கும் உட்பட்டால், (1·22)-ன் நுண் தொகைத் தீர்வு கண்டால். $y = y(x)$ என்பது (1·24)-ஐயும் முற்றொருமையாக்கும். ஆனல் $y = \bar{y}(x)$ என்பதை 1·24-ல் பிரதியிட அது முற்றொருமையானல், அந்தச் சார்பலன்(1·23)-ல் கண்டுள்ள நியதிக்குட்பட்டதாகும். (1·24)ன் வகைக்கெழு காண $y = \bar{y}(x)$ என்பது 1·22-ஐயும் முற்றொருமையாக்கும்.

கீழ் வருமாறு ஆயிலர் பலகோணம் அமைக்கவும். அதன் பக்கச் சமன்பாடு $y = y_n(x)$, $(x_0 y_0)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து முதல் கோடு ஆரம்பம். $x_0 < x < x_0 + H$ எனும் இடைவெளி அகலம் $h_n = \frac{H}{n}$ [இங்கு n முழு எண்ணுகும்.]

$x_0 - H < x < x_0$ என்ற இடைவெளியில் தீர்வு உள்ளமைக்குக் கூறியது போலவே —. $(x_0\ y_0)$ எனும் புள்ளிவழிச் செல்லும் ஆயிலர் கோடு, $x_0 < x < x_0 + H$ (அல்லது $x_0 - H < x < x_0$) எனும் இடைவெளியில் D எனும் செவ்வகத்தை விட்டு வெளி ஏருது. ஏனெனில் ஒவ்வொரு கோட்டின் சரிவு நேர் மதிப்பில் M-ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும்.

இனிமேல் வரும் நிருபணத்தை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிப்போம்.

(i) $y - y_n(x)$ எனும் வரிசை மதிப்பு, சீராக ஒடுங்குகிறது (uniformly converges).

(ii) $\bar{y}(x) - \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ எனும் சார்பலன் (1·24)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

(iii) மேற் கூறிய $\bar{y}(x)$ எனும் சார்பலன், சமன்பாட்டின் தனித் தீர்வு ஆகும்,

(1)ன் நிருபணம் : ஆயிலரின் பல கோணத்தின் விளக்கப்படி

$y'_n(x) = f(x_k, y_k) - [x_k < x < x_{k+1},\ k = v_1 1 \ldots n-1]$

(வகைக்கெழு x_k எனும் முனையில் கொள்ளப்படுகிறது.

$$y'_n(x) = f[x_1\ y_n(x)] + [f(x_k y_k) - f(x_r\ y_n(x)] \quad \ldots \quad (1{\cdot}25)$$

அல்லது $f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)) = \eta_n(x)$

D எனும் செவ்வகத்தில் $f(x, y)$ எனும் சார்பலன் சீரான தொடர்ச்சி உடையது ஆதலால்,

$$|\eta_n(x)| = |f(x_k, y_k) - f|\,y_k, y_n(x)| < \epsilon_n \quad \ldots \quad (1{\cdot}26)$$

$n > N(\epsilon_n)$ இங்கு $n \to \infty$ ஆகும்போது $\epsilon_n \to 0$ ஆகிறது ஏனெனில் $|x - x_k| < h_n$,

$$|y_k - y_n(x)| < Mh_n \text{ இங்கு } h_n = \frac{H}{n} \to 0$$

$$n \to 0$$

(1·25)-ன் x ஐச் சார்ந்த நுண்தொகையை x_0-லிருந்து x வரைக் காண்போம். $y_n(x_0) = y_0$ என்பதையும் கொள்வோம் அப்போது வருவது,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)\,dt \quad \ldots \quad (1{\cdot}27)$$

இங்கு n ஒரு தேர்முழு எண்ணாகும். இதை நாம் இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளலாம். ஆகவே, $m > 0$

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+n}(t)dt \quad \ldots \quad (1{\cdot}28)$$

(1·27) ஐ (1·28)-லிருந்து உறுப்பு வாரிக் கழித்து, வேறுபாட்டின் தோரன் மதிப்பு மட்டும் கொள்ள,

$$| y_{n+m}(x) - y_n(x) | = \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t)) | dt$$

$$+ \int_{x_0}^{x} | \eta_{n+m}(t)dt - \eta_n(t)dt\, p | dt$$

$$< \int_{x_0}^{x} | f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t) | dt$$

$$+ \int_{x_0}^{x} | \eta_{n+m}(t) | dt + \int_{x_0}^{x} | \eta_n f(t)dt | .$$

$x_0 < x < x + H$ எனும் மதிப்புகளுக்கு (1·26) சமன்பாட்டையும் லீப்சிஸ் நியதி.

$$| y_{n+m}(x) - y_n(x) | < \int_{x_0}^{x} | y_{n+m}(t) - y(t) | dt + (t_{n+m} + \epsilon_n) H$$

ஐயும் கொள்ள, மேற்கூறியது வருகிறது.

ஆகவே,

$$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_{n+m}(x) - y(x) |$$

$$< N \max \int_{x_0}^{x} | y_{n+m}(t) - y_n(t) | dt + (\epsilon_{n+m} - \epsilon_n) H.$$

இதிலிருந்து,

$$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_{n+m}(x) - y(x) | < \frac{(\epsilon_{n+m} - t_n)}{l - NH} H < \epsilon$$

($\epsilon > 0$ எனும் மதிப்புகளுக்கு, $n > N_1(t)$ மிகப்பெரிய மதிப்புக்களுக்கு.)

ஆகவே,

$\max\limits_{x_0 < x < x_0+H} | y_{n+m}(x) - y_n(x) | < t \; [n > N_1(t)$ எனும் மதிப்புகளுக்கு.

அதாவது $y_n(x)$ எனும் தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன்கள் $x_0 < x < x_0+H$ எனும் இடைவெளியில் சீராக ஒடுங்குகிறது. தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன் $\bar{y}_n(x) \Longrightarrow \bar{y}(x)$.

(1·27) எனும் சமன்பாட்டில் $\eta \to \infty$ ஆகும் போதுள்ள எல்லை என்ன என்பதைக் காண்போம்.

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x_1\, y_n(x))\, dx + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} \eta_n(x)\, dt.$$

அல்லது

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x_1\, y_n(x))\, dx + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} \eta_n(x)\, dx.$$

$y_n(x)$ எனும் சார்பலன் $\bar{y}(x)$ எனும் சார்பலனுக்குச் சீராகப் ஒடுங்குவதாலும் $f(x_1\, y)$ எனும் சார்பலன் D எனும செவ்வகத்தில் சீரான தொடர் வரிசை $f(x_1\, y_n(x)) \Longrightarrow f(x_1\, \bar{y}(x))$.

$| f(x_1\, \bar{y}(x)) - f(x_1\, y_n(x) | < t$

இங்கு $| \bar{y}(x) - y_n(x) | < \delta(\epsilon)$

என்றால் $\epsilon > o$ ஆகும்.

ஆனால் $n > (\delta(t) \, [x_0 < x < x_0 + H]$ என்றால்

$| \bar{y}(x) - y_n(x) | < \delta(t)$ ஆகும்.

ஆகவே x-ஐச் சாராது N, இருக்கும்போது

$n > N_1\, (\delta(t))$ எனும் nm எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்
$| f(x, \bar{y}(x) - f(x, y_n(x) | < t$ ஆகும்.

$f(x, y_n(x).)$ எனும் தொடர் வரிசை $f(x, \bar{y}(x)$க்குச் சீராக ஒடுங்குவதால் நுண்தொகைக் குறியீட்டினுள் எல்லை காண முடியும். $n \to \infty$ ஆகும் $\epsilon \to 0$ ஆதலால்,

$| n_n(t) < t_n$ என ஆகும். இதனால்

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\,dx$$

இவ்வாறு $\bar{y}(x)$ என்பது (1·24)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுக்கு இணங்குகிறது.

(1·24)-ல் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கு சமமாக—அதாவது ஒன்றாக இல்லாத இரண்டு தீர்வுகள் உள்ளன எனக் கொள்வோம். அவை $y_1(x)$, $y_2(x)$ ஆகுக.

$$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | \neq 0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x_1\, y_1(x))dx$$

எனும் முற்றொருமையிலிருந்து,

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x_1\, y_1(x)\,dx$$

இதிலிருந்து வருவது,

$$y_1(x) - y_2(x) \equiv \int_{x_0}^{x} [f(x_1\, y_1(x) - (x_1\, y_2(x)]\, dx.$$

ஆகையால்,

$$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) |$$

$$= \max_{x_0 < x < x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} [f(x_1\, y_1(x) - f(x_1\, y_2(x)]\, dx. \right|$$

லீப்சிஸ் நியதியால் வருவது,

$$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | < N \max_{x_0 < x < x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} | y_1(x) - y_2(x) |\, dx \right.$$

$$< N \max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | \max_{x_0 < x < x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} dz \right|$$

$$= NH \max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) |$$

இவ்வாறு வந்த சமனின்மை

$$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | < NH \max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | \quad \ldots \quad 1{\cdot}30$$

$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | \neq 0$ என்றால்

முரணானது. ஏனெனில் கொள்கைப்படி $H < \frac{1}{N}$ (1·30) -லிருந்து

$NH = 1$. இந்த முரண்பாடு நீங்க வேண்டுமானால்

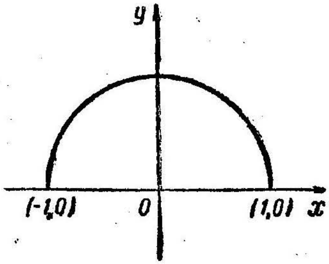
$\max_{x_0 < x < x_0 + H} | y_1(x) - y_2(x) | = 0$ ஆக வேண்டும்.

அதாவது $y_1(x) \leq y_2(x)$; ($x_0 < x < x_0 + (x)$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு.)

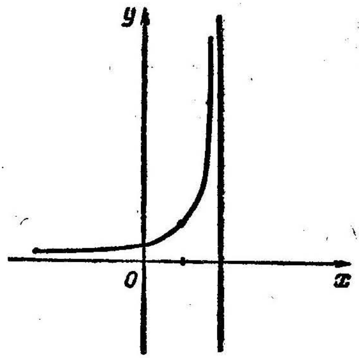
குறிப்பு 1: (1·22)-ல் காணும் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு உள்ளமை நிறுவ $f(x. y)$ என்பது தொடர்ச்சியுள்ளது என்பது போதுமானது. லீப்சிஸ் நியதி தேவையில்லை. வேறு முறையில் நிரூபணம் காட்டமுடியும். என்றாலும் தனித்தன்மை நிறுவ முடியாது. சார்பலன் தொடர்ச்சி மட்டும் அதற்குப் போதாது.

குறிப்பு 2: $x_0 - H < x < x_0 + H$ எனும் இடைவெளியில் மட்டும் தீர்வு $y = y(x)$ என உள்ளமையும் தனித்தன்மையும் நிறுவப்பட்டது. ஆனால் $(x_0 + H, y(x_0 + H))$ எனும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு மீண்டும் மீண்டும் மேற்கூறியபடிக் காரணங் காட்டி, H எனும் நீளமுள்ள இடைவெளியிலும்—மற்றபடி அங்கும் அதே நியதிகள் உள்ளன என்றால்—தீர்வின் உள்ளமையும் தனித்தன்மை விஸ்தரிக்க முடியும். சில இடங்களில் $x > x_0$ எனும் பரந்த அரை அச்சு இடைவெளியிலும், அல்லது $-\infty < x < \infty$ எனும் முழு அச்சு இடைவெளியிலும் முடியும்.

x, y-க்கு எந்தெந்த மதிப்புகளுக்கு $f(x, y)$ திட்டப்படுத்தப் பட்டதோ, அங்கும் முடியும். நுண்தொகை வரை, நியதிகளுக்



படம் 16



படம் 17

குட்படாதபடி இருக்கும் புள்ளிகளை அணுகுவதாலோ, அல்லது y அச்சுக்கு இணையான கந்தழித் தொடுகோட்டை அணுகு வதாலோ, அதை விஸ்தரிக்க முடியாதபடி ஆகிறது. இதற்குச் சான்றுக சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே காட்டுவோம்.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}, \ y(0) = 1.$

$\therefore \ x^2 + y^2 = c^2 \quad y = \pm\sqrt{c^2 - x^2} \quad c = 1. \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

இந்தத் தீர்வை $-1 < x < 1$ எனும் எல்லைகளுக்கு புறத்தில் விஸ்தரிக்க முடியாது. $(-1, 0), (1, 0)$ எனும் எல்லைப் புள்ளி களில் $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ எனும் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் தொடர்ச்சி அறுகிறது. ஆகவே உள்ளமைத்தேற்ற நிருபணத்தின் நியதி கட்கு உட்பட்டதல்ல. (படம் 1-16 பார்க்கவும்.)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \quad y(1) = 1.$ மாறிகளைப் பிரித்து நுண் தொகை காண,

$$y = -\frac{1}{x-c} \quad c = 2. \quad y = \frac{1}{x-2}$$

தீர்வு வரை $x = 2$ எனும் கந்தழித் தொடுகோடு மட்டும் விரிக்க முடியும். அதாவது $(-\infty < x < 2)$ எனும் இடைவெளியில் (படம் 1·17) பார்க்கவும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு மட்டுமல்ல, மற்ற வகைச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு உள்ளமையும் அவற்றின் தனித்தன்மையையும், இக்காலத்தில் ஒரு நிலைப் புள்ளியைக்கொண்டு நிறுவும் முறையைக் கையாள்கிருர்கள். நிலைப்புள்ளிகள் சம்மந்தப் பட்ட மிகவும் எளிதான தும் அடிப்படையானதும் ஆன தேற்றம் சுருங்கு முறை உருமாற்றம் (contraction mapping) தத்துவத்தின் மேல் கூறப்படுகிறது.

சுருங்கு முறை உருமாற்றத் தத்துவம் :

M எனும் அளவுடைய பூரண வெளியில் (complete metric space) கீழ்க்காணும் நியதிகட்குட்பட்ட செயலி A ஐ விவரிப்போம்.

(1) M எனும் வெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் பிரதி பிம்பம் அதிலேயே இருக்குமாறு A செய்கிறது, அதாவது $Y \subset M$ என்ருல் $A\ (y) \subset M$ ஆகும்.

(2) A எனும் செயலி புள்ளிகளை இன்னும் நெருக்காமலும் செய்கின்றன. அதாவது இன்னும் தெளிவாகக் கூறப்புகின் $\rho(\ A(y)\ ),\ A\ (z) < 2\rho\ (y, z)$. இங்கு y, z என்பவை M எனும் வெளியில் புள்ளிகள், $\alpha < 1$, மட்டுமல்ல, $y_1\ z_1$ இவற்றைச் சார்ந்தல்ல, $\rho\ (y_1{'}\ z)$ என்பது $y,\ z$ இடையேயுள்ள தூரம் இவ்வாறெனில் M எனும் வெளியில் $A\ (\bar{y}) = \bar{y}$ எனும்படி ஒரே ஒரு தனித்தன்மையுள்ள புள்ளி ஒன்றுள்ளது.

இந்த புள்ளியை அடுத்தடுத்துக் தோராயமாகக் காணும் முறையைப் பயன்படுத்தி, நிச்சயிக்க முடியும்.

அதாவது $\bar{y} = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$ இங்கு $\bar{y}_n = A\ (\bar{y}_{n-1})$

$(n = 1_1\ 2_1\ 3\ \ldots\ )$. y_0 எனும் புள்ளியை M எனும் வெளியில் எங்கு வேண்டுமெனினும் கொள்ளலாம்.

நிரூபணம் : $y_0\ y_1\ y_2 \ldots y_n$ எனும் தொடர் வரிசை எண்கள் (sequence) அடிப்படை என நிறுவுவோம். ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தை மதிப்பிடுக.

$$\rho(y_2, y_1) = \rho A(y_1)\quad A(y_0) < \alpha\rho\ (y_1\ y_0)$$

$$\rho(y_3, y_2) = \rho A\ (y_2)\quad A\ (y_1) < \alpha\rho(y_2, y_1) < \alpha^2\rho\ (y_1\ y_0)$$

$$\rho\ (y_{n+1}, y_n) = \rho\ (A\ (y_n), A\ (y_{n-1}) \qquad \ldots\ (1{\cdot}31)$$

$$< \alpha\rho\ (y_n, y_{n-1}) < \alpha^n\rho\ (y_1\ y_0).$$

கீழ்வரும் நியதிகளுக்குட்பட்டு $\rho(y, z)$ எனும் சார்பலன் (y, z) எனும் புள்ளிகளுக்கு வரையறுக்கப்பட்டால், புள்ளிகளைக் கொண்ட வெளி அளவுடை (metric) வெளி எனப்படும். நியதிகளாவன.

(1) $\rho(y, z) \geq 0$ $\rho(y, y) = 0$ என்பதைக் கவனிக்கவும். ஆகவே $\rho(y, z) = 0$ என்றால் $y = z$ என வருகிறது.

(2) $\rho(y, z) = \rho(z, y)$

(3) $\rho(y, z) \leq \rho(y, u) + \rho(u, z)$ (முக்கோண விதி).

ρ எனும் சார்பலன் M எனும் வெளியில் 'தூரம்' எனப்படும். M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு அடிப்படைப் புள்ளி வரிசையும் அந்த வெளியில் ஒருங்குவதானால் M என்பது முழுமை பெற்றது எனப்படும். வரிசை $y_1, y_2'; y_n$ என்பது ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$ எனும் போது $m > 0$ என்ற இடைவெளியில் தூரம் $\rho(y_n\, y_{n+m}) < \epsilon$ எனும்படி $n \geq N(\epsilon)$ என்பதற்கு $N(\epsilon)$ எனும் எண் இருந்தால் வரிசை ஒருங்குகிறது என்பதைக் கவனித்திற் கொள்ளவும்.

அடிக்குறிப்பு: முக்கோண விதியை $(m-1)$ முறைச் செயல் படுத்த அத்துடன் $(1 \cdot 31)$ கண்டுள்ள சமனின்மையையும் பயன் படுத்தக் கிடைப்பது.

$$\rho(y_n, y_{n+m}) \leq \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + \rho(y_{n+m-1}, y_{n+m}) < (\alpha^n + \alpha^{n+1}\ \alpha^{n+m-1})\, \rho(y_1, y_0)$$

$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+m}}{1-\alpha}\, \rho(y_1, y_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \rho(y_1\, y_0) < \epsilon$$

(n-ன் போதுமான அளவு பெரிய மதிப்புகளுக்கு)

ஆகவே $y_0, y_1, y_2 \cdots y_n \ldots$ எனும் தொடர்வரிசை அடிப்படையானது. M எனும் வெளி பூரணமானதால் அந்த வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு ஒடுங்குகிறது. $\lim_{n \to \infty} y_n = \bar{y}$

$\bar{y}\, CM$ $\bar{y}$ என்பது நிலையான புள்ளி என்பதை நிறுவுவோம்.

261674 B321 3166

$A(\bar{y}) = \bar{\bar{y}}$ ஆகுக.

முக்கோண விதியை இருமுறை பயன் படுத்தக் கிடைப்பது.

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) \leq \rho(\bar{y}, y_n) + \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}})$$

$\epsilon > 0$ எனும் ஏதேனும் மதிப்பிற்கு $n \geq N(\epsilon)$ எனும்படி $N(\epsilon)$ காணமுடியும்.

(1) $\rho(\bar{y}, y_n) < \frac{\epsilon}{3}$. ஏனெனில் $\bar{y} = \lim_{n \to \infty} y_n$

(2) $\rho(y_n, \bar{\bar{y}}) < \frac{\epsilon}{3}$. ஏனெனில் தொடர்வரிசை y_n அடிப்படையானது.

(3) $\rho(y_n, \bar{\bar{y}}) = \rho(A(y_n), A(\bar{y})) < \alpha \rho(y_n, \bar{y}) < \frac{\epsilon}{3}$

ஆகவே, $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) < \epsilon$. இங்கு ϵ என்பது இச்சைக்கேற்ப மிகச் சிறிய மதிப்பு,

ஆகவே, $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = 0$, $\bar{y} + \bar{\bar{y}}\, A(\bar{y}) = \bar{y}$. இனிமேல் நிலைப் புள்ளி $\bar{y}$ என்பது தனித்து நிற்பது அத்தகைய ஒரே ஒரு புள்ளி தான் உள்ளது என நிறுவவேண்டும். இன்னுமொரு அத்தகைய புள்ளி ஒன்று இருந்தால் அப்போது $\rho(A(\bar{y}), A(\bar{z})) = \rho(\bar{y}, z)$ ஆனால் இது தேற்றத்தின் கொள்கை (2)-வதற்கு முரணாகும். சுருங்குமுறை உருமாற்றத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $x_0 - \eta_0 < x < x_0 + \eta_0$-ல் ஒரு தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வின் உள்ளமையை நிறுவுவோம். இதற்குக் கொள்கை,

$$y(x_0) = y_0;$$

$x_0 - a < x < x_0 + a \quad x_0 - b < y < y_0 + b$ என்ற D எனும் செவ்வகத்தில் $f(x)$ தொடர்ச்சியுடையது. அதாவது $|f| < M$ லீப்சிஸ் நியதிக்குட்பட்டது.

$$|f(x, y) - f(x, z)| < N|y - z|$$

h_0 எனும் எண்ணாகிய $h_0 < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ திட்டமாகக் கீழ்க் கண்ட முறைப்படிக் கொள்வோம்.

C எனும் அளவுடைப் பூரண வெளியைக் கொள்வோம். அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ இல் x இருக்கும்படியுள்ள தொடர்ச்சியுடைய $y(x)$ எனும் சார்பலன்களாகும். அவற்றின் வரை D எனும் செவ்வகத்தில் உள்ளடங்கியது. அவற்றிடையேயுள்ள தூரம் $\rho(y, z) = \max|(y - z)|$

எனும்படியுள்ளது. இங்கு x என்பது $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ எனும் இடைவெளியில் மாறும்போதுள்ள அதிகபட்ச (max, min) மதிப்பைக் கொள்கிறோம்.

இந்த இடைவெளி, கணித ஆய்வியலில் (Mathematical analysis) அடிக்கடிப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதனை சீராக ஒடுங்கும் வெளி (Space of uniform convevgence) என்கிறோம். இங்கு ஒடுங்குதல் என்றாலே—அளவுடை வெளியில் என்ற பொருளில்—சீராக ஒடுங்குதல் எனவே, பொருளாகும்.

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக $y(x_0) = y_0$ எனும் துவக்க நியதியுடைய, இதற்குச் சமமான $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx$ எனும் நுண்தொகைச் சமன்பாட்டைக் கொள்க.

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx \text{ எனும் } \quad \ldots \quad \ldots \quad (1\cdot 24)$$

செயலியைக் கருதுவோம்.

$x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ எனும் இடைவெளியில் திட்டப் படுத்தப்பட்டதும், D எனும் செவ்வகத்தில் உள்ளடங்கியதுமான $y(x)$ எனும் சார்பலனுக்கேற்றதுமான செயலி $A[y]$. அதே இடைவெளியில் திட்டப்படுத்தப்பட்டது ஆகும். அதன் வரை படமும் செவ்வகம் D-ல் உள்ளடங்கியது ஆகும். ஏனெனில்,

$\int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx < Mh_0 < b$. இவ்வாறு, சுருங்கு உருமாற்றத்தின் முதல் நியதிக்கு $A[y]$ கட்டுப்பட்டதாகும்.

இங்கு (1·24) எனும் சமன்பாடு $y = A[y]$ என எழுதப் பட்டுள்ளது. எனவே, உள்ளமை, தனித்தன்மை இவற்றை நிறுவ C எனும் வெளியில் A எனும் செயலியின் $\bar{y}(x)$ எனும் ஒரே ஒரு தனிப்பட்ட புள்ளி உள்ளது என நிறுவவேண்டும். ஏனெனில், $\bar{y} = A[\bar{y}]$ என்றால் (1·24) எனும் சமன்பாட்டுக்கு இணங்கியதாகும்.

தேற்றத்தை நிறுவ, சுருங்கு உருமாற்றத்தின் இரண்டாவது நியதியாகிய,

$$(\rho\, A(y), A(z)) \leqslant \alpha\, \rho(y, z)\ \alpha < 1$$

$$\rho(A, y).\ A(z) = \max \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y) - f(x, z)\, dx \right|$$

இதற்கு 'A' எனும் செயலி உட்பட்டதா என்பதைக் காண வேண்டும்.

லீப்சிஸ் சமனின்மையைப் பயன்படுத்த அடைவது,

$$\rho(A|y|, A|z|) \leqslant N \max \left| \int_{x_0}^{x} |y-z|\, dx \right.$$

$$\leqslant N \max|y-z| \max \left| \int_{x_0}^{x} dx \right|$$

$$= Nh_0 \max|y-z|$$
$$= Nh_0\, \rho(y, z)$$

$Nh_0 < \alpha \leqslant 1$ எனும்படி h_0-ஐக் கொள்ள A எனும் செயலி.

$\rho(A[y] A[z]) \leqslant \alpha\, \rho(y, z)\ \alpha < 1$ எனும் நியதிக்குட்பட்டதாக இருக்கிறது. ஆகவே, சுருங்கு உருமாற்றத்தத்துவத்தின்படி A எனும் செயலிக்கு தனித்தன்மையான நிலைப்புள்ளி $\bar{y}(x)$ உள்ளது. அதாவது, (1·24)-ல் கண்டுள்ள சமன்பாட்டிற்கு தனித்தன்மைத்தான தீர்வு உள்ளது. எனவே, அதை அடுத்தடுத்த தோராய முறையால் காணலாம். எனவும், தெரிகிறது.

இதேபோல,

$$\frac{dy_i}{dx} = f(x_1\, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n)$$

$$y_i(x_0) = y_{i0} \quad (i = 0, 1, 2 \ldots\ldots n) \qquad \ldots (1{\cdot}32)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குத் தீர்வு உள்ளமையையும் அவற்றின் தனித்தன்மையையும் நிறுவலாம்.

அதாவது,

$$y_i = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f(x_1 y_1, y_2 \ldots y_n)\, dx\ (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots (1{\cdot}33)$$

என்பதற்குச் சமம். இங்கு கீழ்வரும் கொள்கையுடன் $x_0 - a < x < x_0 + a$; $y_{i_0} - b < y_i < y_{i_0} + b_i$ $(i = 1, 2 - \ldots n)$ (1·32)-ல் வலது பக்கம் கீழ்வரும் நியதிக்குட்பட்டதாக இருக்க வேண்டும்.

(1) $f_i(x, y_1\ y_2 \ldots y_n)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$ எனும் எல்லாச் சார்பலன்களும் தொடர்ச்சியுடையனவாதல் வேண்டும். ஆதலால், $|f_i| < M$,

(2) f_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ எனும் எல்லாச் சார்பலன்களும் லிப்ஷிச் நியதிக்குட்பட்டதாக வேண்டும். அதாவது,

$$| f_i(x_1\ y_1\ y_2 \ldots y_n) - f_i(x_1\ z_1\ z_2 \ldots z_n) | < N \sum_{i=1}^{n} | y_i - z_i |$$

n தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன்கள் $(y_1\ y_2 \ldots y_n)$, அதாவது பரிமாண வெக்டர் சார்பலன் $Y(x)$, $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ எனும் இடைவெளியில் $h_0 \leqslant \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, \ldots \frac{b_n}{M}\right)$ திட்டப்படுத்தப் $y_1(x), \ldots\ldots y_n(x)$ எனும் கூறுகளையுடையது) C எனும் வெளியில் ஒரு புள்ளியாகும் அந்தப் புள்ளியை இன்னும் திட்டமாக எடுக்கும் முறையைக் கீழேகூறுகிறோம். C வெளியில் தூரத்தின் வரையறை.

$$\rho(Y(x), Z(x)) = \sum_{i=1}^{n} \max | y_i - z_i |$$

இங்கு $z_1\ z_2 \ldots z_n$ என்பவை $Z(x)$ எனும் வெக்டரின் பிரிவுகள் அல்லது கூறுகள் ஆகும்.

இத்தகைய வரையறையைத் தூரத்திற்கு கொண்டு C எனும் வெளி, — n பரிமாண வெக்டர் சார்பலன்கள் $y(x)$ஆல் ஆனது — அளவுடை வெளி என்பதைச் சரிபார்த்தல் எளிதாகும். A எனும் செயலில் கீழ் வரும் சமன்பாட்டால் தெளிவுறத்தப்படுகிறது.

$$A[y] = y_{1_0} + \int_{x_0}^{x} f_1(x\ y_1\ y_2 \ldots y_n)\, dx,$$

$$+ y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2 (x_0\, y_1, y_2 \cdots y_n)\, dx - y_{n0}$$

$$+ \int_{x_0}^{x} f_n (x, y_1\, y_2 \cdots y_n)\, dx$$

அதாவது $(y_1\, y_2 \cdots y_n)$ எனும் புள்ளியின் மேல் A செயல்பட C எனும் வெளியில் (1.38)ல் வலப்பக்கமுள்ள கூறுகளையுடைய புள்ளி வருகிறது.

புள்ளி $A[y]$ C எனும் வெளியைச் சார்ந்தது. ஏனெனில், அதன் கூறுகள் யாவும், y எனும் வெக்டரின் கூறுகள் செவ்வகம் Dஐ விட்டு வெளி ஏருதவரை, அவையும் Dயில் உள்ளவையும் தொடர்ச்சி உடையனவும் ஆகும்.

இல்லாமலும்,

$$\left| \int_{x_0}^{x} f, xy_1, y_2 \cdots y_n)dx \right| < M \int_{x_0}^{x} dx < Mh_0 < b_i$$

ஆகவே, $| y_i - y_{i0} | < b_i$

இனி, சுருங்கு உருமாற்றத்தின் இரண்டாவது நியதிக்குக் கட்டுப் பட்டதா என்பதைச் சரிபார்த்தல் மட்டுமே மிஞ்சுகிறது.

$$\rho (A(Y), A(Z)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} (f(x, y_1\, y_2 \cdots y_n) - f(x, z_1\, z_2 \cdots z_n)dx \right|$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} | f_i (x, y_1\, y_2 \cdots y_n) - f_i (x, z_1\, z_2 \cdots z_n) \right| dx$$

$$< N \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} | y_i - z_i |\, dx \right|$$

$$< N \sum_{i=1}^{n} \max | y_i - z_i | \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} dx \right.$$

$$= N n h_0 \rho (Y Z).$$

இதன் பலன் என்னவெனில் $0 < \alpha < 1$ எனும்போது $h_0 < \frac{\alpha}{nN}$ எனக் கொண்டால் — அல்லது $Nnh_0 < \alpha < 1$ என்றால் சுருங்கு உருமாற்றத்தின் நியதி (2)-க்கு உட்பட்டதாகும். அப்போது $\bar{y}$ எனும் தனித்தன்மையுடைய புள்ளி உள்ளது. அதனை அடுத்தடுத்த தோராய முறையால் காணலாம். ஆனால் A எனும் செயலியின் வரையறைப்படி, $\bar{y} = A(\bar{y})$ என்பது

$$\bar{y}_i = \bar{y}_{i_0} + \int_{x_0}^{x} f_i (x, y_1 \, y_2 \ldots y_n) dx \; (i = 1, i = n)$$

(இங்கு $y_1, y_2 \ldots y_n$ என்பது $\bar{y}$-ன் கூறுகள்) எனும் முற்றொருமைக்குச் சமமாகும். அதாவது, $\bar{y}$ என்பது தொகுதியின் தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 ; \; y(0) = 0$$

$$- | < x < | - | < y < |$$

எனும் நியதிக்குட்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு $y_1, y_2, y_3 \ldots$ எனும் பல அடுத்தடுத்தத் தோராயத் தீர்வுகளைக் காண்க

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2)\, dx \quad h_0 = min\,(1, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

$y_0(x) = 0$ என இடக் கிடைப்பது,

$$y_1 = \int_0^x x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3 = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \right)^2 \right] dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945} \right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x)$ எனும் ஒருபடிச் சமன்பாடு எந்த நியதிகட்குட்பட்டால் அதன் தீர்வு தனித் தன்மையுடையதாக இருக்கும்?

தேற்றத்தின் முதல் நியதிக்குச் சமன்பாடு கட்டுப்பட $P(x)$, $f(x)$ எனும் சார்பலன்கள் $a_1 < x < a_2$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையனவாக இருந்தால் போதுமானது. இவ்வாறு இரண்டாவது நியதிக்கும் கட்டுப்படும்.

ஏனெனில், $\frac{dy}{dx} = -P(x)\,y + f(x)$ எனும் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தின் பகுதிவகைக்கெழுச் சமன்பாடு $P(x)$, $f(x)$ இவை தொடர்ச்சியுடையனவாதலால் $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ எனும் இடைவெளியில் எல்லையுடையதாகிறது. [பக்கம் 47 பார்க்கவும்]. ஆகவே, $\mu(x)\,f(x)$ எனும் சார்பலன்கள் $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையனவாதலால் (x_0, y_0) எனும் ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகவும் — இங்கு $a_1 < x_0 < a_2$; y_0 ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு — நாம் கருதும் சமன்பாட்டின் தீர்வுவரைத் தனித்தன்மைவாய்ந்ததாய் உள்ளது.

தேற்றம் 1·2 துவக்க மதிப்பையும், ஒரு துணை அலகையும் தொடர்ந்து சார்ந்திருக்கும் தன்மையை விளக்குவது

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \qquad \ldots \quad (1\cdot34)$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கு $y(x_0) = y_0$ எனும்படியுள்ள தீர்வு $y(x, \mu)$ தொடர்ச்சியாக μ எனும் துணையலகைச் சார்ந்து நிற்க கீழ்வரும் நியதிகள் தேவை; சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ என்ற இடைவெளியில் μ எனும் துணை அலகின் தொடர்ச்சியுடைச் சார்பலனாகவேண்டும். தீர்வு உள்ளமையும் தனித்தன்மையையும் காட்டும் தேற்றத்தின் நியதிகட்குட்பட்டதாகவேண்டும். லீப்சிஸ் நியதி நிலை எண் N, μ-ஐச் சாராதிருக்கவேண்டும்.

μ இன் தொடர்ச்சியுடைச் சார்பலன்கள் $y_n = y_n(x, y)$ தரும் ஆயிலர் பல கோணப் பக்கங்களை வரையவும். 45-51 பக்கங்களில் கூறப்பட்ட காரண முடிவுகளை மீண்டும் கூறவும். இவ்வாறு $y_n(x, \mu)$ என்பவை x-ல் மட்டுமல்ல சீராக ஒடுங்குகின்றன. ஆனால், $x_0 \leqslant x < x_0 + H$, $\mu_0 < \mu \leqslant \mu_1$, எனும் இடைவெளியிலும் N, H என்பவை μ ஐச் சாராததால் (இங்கு $H \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$ $M > |f(x, y, \mu)|$; μ-விலும் சீராக ஒடுங்குகிறதைக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு, $y = \bar{y}(x, \mu)$ எனும் தீர்வு.

$$y = y_0 + \int_{x_i}^{x} f(x, y, \mu)\, dx \text{ எனும் } \qquad \ldots \quad (1.35)$$

சமன்பாட்டிற்கு, $y_n(x, n)$ எனும் தொடர் வரிசையின் எல்லையாகவும், xக்கு மட்டுமல்ல, μக்கும் தொடர்ச்சியுடையதாக இருக்கும்.

குறிப்பு : (1.35)ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்கு அடுத்தடுத்து தோராயம் காண் முறையைப் பயன்படுத்த. x-லும் μ-லும் தொடர்ச்சியுடைச் தோராய சார்பலன்கள் $y = y_n(x, \mu)$ $\bar{y}(x, \mu)$ எனும் தீர்வுக்குச் சீராக ஒடுங்குகிறது. ஆகவே இந்த முறை x-ஐயும் μ-ஐயும் தொடர்ந்து தீர்வு சார்ந்து நிற்பதைக் காட்டவும் பயன்படுகிறது.

(1·34)ன் வலப்பக்கம் பல துணை அலகுகளின் தொடர்ச்சியுடைச் சார்பலனானலும் இதே நிருபணம் பொருந்தும் என்பது தெள்ளிதில் புலனாகும். லிபசிஸ் நிலை எண் N, அந்த அலகுகளைச் சார்ந்திருக்கலாகாது என்பது மட்டுமே கொள்கையாகும்.

இதே முறையைப் பயன்படுத்தி, இதே நியதிகளைக் கொண்டு $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு (x_0, y_0) எனும் துவக்க மதிப்புகளைக் கொண்டு தீர்வு $y(x_1\ x_0\ y_0)$ என்பது அந்த துவக்க மதிப்புகளைத் தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்கும் என நிறுவலாம். h_0இன் மதிப்பைச் சற்றே குறைக்க வேண்டி வரும். இல்லை எனில் (x_0, y_0)க்கு அண்மையில் உள்ள துவக்க மதிப்புகளைக் கொள்ள வரும் தீர்வு $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$ எனும் x மதிப்புகளுக்கு D எனும் செவ்வகத்தை விட்டு வெளியேறலாம்.

இருப்பினும், மாறி மாற்றம் செய்து, தீர்வை துவக்க மதிப்புக் களைச் சார்ந்து நிற்பதற்குப் பதிலாகத் (1·34)ல் கண்டுள்ளபடி துணை அலகுகளைச் சார்ந்து நிற்பதாக மாற்றி கணக்கிடுவது எளிது. $z = y(x_1 x_0 y_0) - y_0 - t = x - x_0$ என இட்டால் $\frac{dy}{dx} = f(x, y) -$ துவக்க நியதி $y(x_0) = y_0$ — என்பது $\frac{dz}{dx} = f(t + x_0, z + y_0)$ $Z(o) = (o)$ என மாறுகிறது. (x_0, y_0) எனும் துணையலகுகளைத் தீர்வு தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்பதாக மாறுகிறது — இதற்கு f எனும் சார்பலன் தொடர்ச்சியுடையதாயும், வீப்ஸிச் நியதிக்குட் பட்டதாகவும் இருக்கவேண்டும். இவை போன்ற தோற்றங்களை தொகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கான முறைகளினால் திறுவப்படும்.

$x_0 < x < b$; (அல்லது $b < x < x_0$) எனும் இடைவெளியில் $y(x, x_0 y_0)$ எனும் தீர்வு x_0, y_0 எனும் துவக்க மதிப்புகளைத் தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்கிறதென்பது கீழ்வருவதைக் குறிப் பதைக் காணலாம்.

$\in > 0$ எனும் ஏதாவது மதிப்பிற்கு ஒரு $\delta(\in, b) > 0$

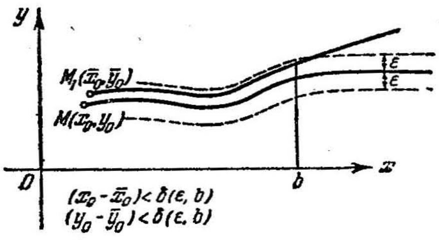
$$| x_0 - \bar{x}_0 | < \delta(\in, b)$$

$$| y_0 - \bar{y}_0 | < \delta(\in, b)$$

எனும் சமனின்மைப்படி இருக்கக் காணமுடியும். இதிலிருந்து வரும் சமனின்மை,

$$| y(x, x_0, y_0) - y(x \bar{x}_0 \bar{y}_0) | < \in \qquad \ldots \quad (1·36)$$

$x_0 < x < b$ படம் 1·18 என்பதாகும்.



படம் 1·18

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து $\delta(\in, b)$ எனும் எண், b அதிகரிக்கும் போது குறையும் $b \to \infty$ ஆகும்போது பூச்சியத்தை அணுகும் இதனால் $x > x_0$ எனும் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (1·36)-ல் உள்ள

சமனின்மைக்கேற்ப $\delta(\epsilon) > 0$ எனும் எண் காண்பது எப்போதும் சாத்தியமல்ல. அதாவது, சாரா மாறியின் மிகப் பெரிய மதிப்புக் களுக்கு துவக்க மதிப்புக்களை நெருங்கி உள்ள தீர்வுகள் எப்போதும் அவ்வாறிருக்கும் என கூறமுடியாது.

சாரா மாறியின் ஏதேனும் பெருமதிப்புக்கள் தரப்பட துவக்க மதிப்புக்களுக்கு ஏதேனும் கணிசமானச் சிறு மாற்றங்கள் தரப்பட, அதனால் தீர்வில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் உறுதிபெற்றவை (stable) எனப்படும். உறுதியுடைத் தீர்வுகளைப் பற்றி அத்தியாயம் நான்கில் விவரமாக ஆராயப்படும்.

தேற்றம் 1·3 போன்காரேயின் தேற்றம்.

ஒரு தீர்வின் துணை அலகின்மேல் பகுப்பாய்வு முறையில் (analytical) சார்ந்து நிற்கும் தன்மை.

$\dot{x} = f(t_1 x, \mu)$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $x(t_0) = x_0$ எனும்படி இருந்தால் அதன் தீர்வு $\mu = \mu_0$ எனும் இடத்துக்கருகே μ எனும் துணையலகைப் பகுப்பாய்வு முறையில் சார்ந்து நிற்க, $t_1\ x$ எனும் மாறிகளின் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளிலும், μ_0-க் கருகிலும் t ஐச் சார்ந்து தொடர்ச்சியுடையதாகவும் μ, x-ஐப் பகுப்பாய்வு முறையில் சார்ந்து நிற்கவும் வேண்டும்.
இதேபோன்ற கூற்று,

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1\ x_2 \ldots x_n \mu)\ (i = 1, 2 \ldots n)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கும் பொருந்தும்.

இவ்வகைச் சமன்பாடுகளில், முதல் தனிமாறியின் தொடர்ச்சி யுடைய சார் பலனாக f_i இருப்பதுடன், மற்ற சார்பு மாறிகளின் பகுப்பாய்வு முறைச் சார்பலனாக அமைய வேண்டும்.

நாம் இங்கு இந்தத் தேற்றத்திற்கு விரிவான நிருபணம் கொடுக்கப் போவதில்லை. (பகுபகுப்பாய்வு முறையில் சார்ந்து நிற்கும் சார்பலன்களைப் பற்றிய மற்ற தேற்றங்களுக்கும் இது பொருந்தும்) திரு A. கனேவ் (A. Thi Khonov) வெளியிட்டுள்ள பிரசுரத்தை [4]ப் பார்த்தால் இத்தகைய நிருபணத்தை எளிதில் காட்டியுள்ளதை அறியலாம்.

திக்கனேவின் நிருபணத்தில் ஊடுருவும் கருத்துக்களைமட்டும் தருவோம். μ என்பது சிக்கலெண் மதிப்புக்களையும் அடையும்

எனக் கருதுவோம். $\lim_{\Delta\mu\to 0} \frac{\Delta_i x(t,\mu)}{\Delta\mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu}$ என்பதன் உள்ளமை நிறுவப்படுகிறது. ஆகவே இது தீர்வின் μஐ பகுப்பாய்வு முறையில் சார்ந்து நிற்கிறது என்பதைச் சுட்டுகிறது இந்த எல்லை உள்ளமை நிறுவுதல்,

$$\frac{\Delta \mu x}{\Delta \mu} \text{ எனும் விகிதம்}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta \mu x}{\Delta \mu} = f(t, x(t, \mu + \Delta\mu)$$

$$\frac{-f(t, x(t,\mu).\mu i.\ \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu\ x(t,\mu)} \quad \frac{\Delta\mu\ x(0)\mu}{\Delta\mu}$$

$$+\ \frac{f(t.\ x(t, \mu + \Delta\mu) - f(t, x(t\mu)\ \mu)}{\Delta\mu},\quad \frac{\Delta\mu x}{\Delta\mu}\Big|_{t=ts} = 0$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கிணங்கியது என்பதிலிருந்து வருகிறது. இதன் தீர்வு, $\Delta\mu$ பூச்சியத்தை எவ்வாறேனும் அணுகும்போது, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial t}{\partial x} z + \frac{\partial t}{\partial \mu} z(t_0) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வை அணுகுகிறது, மற்றும் தனித்தன்மை வாய்ந்ததுமாகும்.

தேற்றம் 1·4 (தீர்வுகளின் வகைக்கெழுகாண உடன்படுகை) $(x_0\ y_0)$ என்ற புள்ளியருகே, $f(x, y)$ தொடர்ச்சியுடைய வகைக்கெழுக்கள். Kபடிவரை, உள்ளவாயின் (1·37) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y(x) - y(x_0) = y_0$ எனும் துவக்க நியதியைக் கொண்டது. (x_0, y_0) எனும் புள்ளியின் எங்கேனும் அருகே அடுத்தடுத்த $(k + 1)$ படிவரையுள்ள வகைக்கெழுக்களை உடையதாகும்.

நிரூபணம்: (1·87)-ல் உள்ள சமன்பாட்டில் $y(x)$ எனப் பிரதியிட வரும் முற்றொருமை,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

ஆகவே, $y(x)$ எனும் தீர்வு, நாம் எடுத்துக்கொண்ட புள்ளியின் ஏதேனும் அருகே, $f(x, y(x)$ எனும் தொடர்ச்சியுடைய வகைக்கெழுவுள்ளது. f_0 எனும் சார்பலன் தொடர்ச்சியுடைய வகைக்கெழுவுள்ளதாகையால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y(x))$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கு தொடர்ச்சியுடைய இரண்டாவது பல வகைக்கெழுவுள்ளது

$k > 1$ என்றால் இரண்டாம்படி தொடர்ச்சியுடைய வகைக்கெழு உள்ளதாகையால், மறுபடியும் வகைக்கெழு காண.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right)$$

எனும் மூன்றாவதுபடி வகைக்கெழுவும் உள்ளது. இவ்வாறு k தடவை மீண்டும் மீண்டும் கூற தோற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

இப்போது $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $(x_0\ y_0)$ எனும் படித்தீர்வு இல்லை என்றால், அல்லது தீர்வு இருந்து தனித்தன்மை வாய்ந்ததாக இல்லாவிடில், அத்தகைய புள்ளிகள் தனிப்புள்ளிகள் (Singular Points) எனப்படும்.

தனிப்புள்ளிகளைமட்டுமே கொண்ட வரை தனிவரை (Singular Curve) எனப்படும். ஏதேனும் ஒரு தீர்வின் வரைபடம் தனிப்புள்ளிகளைமட்டும் கொண்டதானால் அத்தகைய தீர்வு தனித்தீர்வு (Singular solution) எனப்படும். தனிப்புள்ளிகளை, அல்லது தனிவரையைக் காண எந்தெந்தப் புள்ளிகளில் உள்ளமை, தனித்தன்மை நியதிகள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன என்பதைக் காண வேண்டும். ஏனெனில் அத்தகைய புள்ளிகள் தாம் தனிப்புள்ளிகளைக் கொண்டவை. ஆனால், மேற்கூறிய நியதிகள் வராத ஒவ்வொரு புள்ளியும் தனிப்புள்ளி எனக் கூற முடியாது. ஏனெனில் இத்தகைய நியதிகள் போதுமானவையே தவிர, அவசியமானதல்ல.

சார்பலனின் தொடர்ச்சியறு (discontinuous points) புள்ளிகளில் முதல் நியதி புறக்கணிக்கப்படுகிறது. (பக்கம் 45 பார்க்கவும்). கீழ்க்கூறுவதைக் கவனிக்கவும். $(\partial_0\ y_0)$ எனும் தொடர்ச்சியறும் உண்மையை, ஏதேனும் ஒரு பாதையில் அணுகும்போது சார்பலன் $f(x, y)$ன் நேரண் மதிப்பு அளவுகடந்து அதிகரிக்குமானால், $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ என்பதற்கு பதில் $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ எனக் கொள்ளவேண்டும். இங்கு, x, y எனும் மாறிகளை ஒரே போல மதிக்கின்றோம். $\frac{1}{f(x_0\ y_0)} = 0$ எனின் $(x_0\ y_0)$ எனும் புள்ளியருகே $f(x, y)$ தொடர்ச்சியுடையது ஆகும்.

xஐயும் yஐயும் ஒருபோலவே கொள்ளப்படும் கணக்குகளில் உள்ளமை தனித்தன்மை தேற்றத்தின் முதல்நியதி புறக்கணிக்கப்பட, $f(x, y)$, $\frac{1}{f(x y)}$ என்ற இரண்டும் தொடர்ச்சியற்றதாக வேண்டும்,

(1·38) $\frac{dy}{dy} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ எனும் சமன்பாட்டில் $M(x, y)$, $N(x, y)$ தொடர்ச்சியுடைச் சார்பலன்கள். இந்தச் சமன்பாட்டைக் குறிப்பாக கவனிப்போம்.

இங்கு $M(x, y)$, $N(x, y)$ என்பவை தொடர்ச்சியுடையன இங்கு $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ யும் $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ யும் ஒருங்கே $M(x_0 y_0) = N(x_0 y_0) = 0$ ஆகவும்.

அத்துடன், $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}$

எனும் எல்லைகள் இல்லாத. (x_0, y_0) எனும் புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியறுபடுகின்றன.

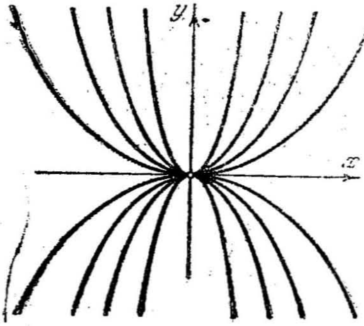
பலவகைத் தனிப் புள்ளிகளைத் தரும் (1·38)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

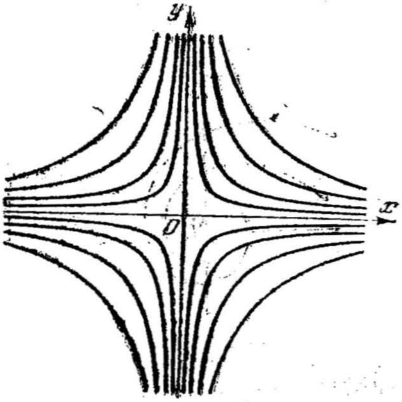
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

இதன் வலப் பக்கமும், $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$ -ன் வலப் பக்கமும் $x = 0$, $y = 0$ எனும் புள்ளிகளில் தொடர்ச்சி அறுபடுகின்றன. x-ன் தொகைகண்டு தீர்வுகாண, $y = cx^2$ என பரவளையத் தொகுதி (படம் 1·19) வருகிறது.

$x = 0$, எனும் தனிப்புள்ளி, கணுப்புள்ளி (Nodal point) எனப் படும்.



படம் 1·19



படம் 1·20

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

இதன் வலப் பக்கமும், $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$-ன் வலப்பக்கமும், $x=0$, $y = 0$ எனும் புள்ளியில் தொடர்ச்சி அறுபடுகின்றன. இதன் தீர்வு காண வருவது, $y = \frac{c}{x}$ இது ஒரு அதிபரவளையத் தொகுதியும் $x = 0$ எனும் நேர்கோடும் ஆதியில் உள்ள தனிப்புள்ளி சேணப் புள்ளி (Saddle point) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

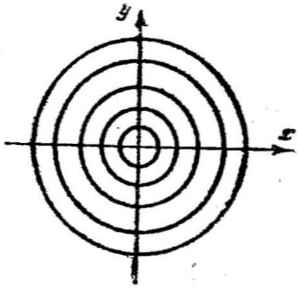
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

இதன் வலப் பக்கமும், $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{x+y}$ இன் வலப்பக்கமும், $x = 0$, $y = 0$ எனும் புள்ளியில் தொடர்ச்சி அறுகின்றன. இதன் தீர்வுக்காண (42-ம் பக்கமுள்ள எடுத்துக்காட்டுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்) கிடைப்பது,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\arctan \frac{y}{x}}$$

அல்லது கோணதூர உருப்புகளில் $\rho = ce^{\phi}$ இவை வாகாத சுருள் வரைகளைத் தருகின்றன. தனிப்புள்ளி $(0, 0)$ இங்கு குவியப்புள்ளி (focal point) எனப்படும்.

படம் 1–21



படம் 1–22

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

இதன் வலப் பக்கமும் $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ என்பதன் வலது பக்கமும் $x = 0,\ y = 0$ எனும் புள்ளியில் தொடர்ச்சி அறுபட்டவையாகும். இதன் தீர்வ $x^2 + y^2 = C^2$ எனும் ஒரு வட்டத்தொகுதி இவையாவற்றின் மையமும் ஆதியாகிய $(0, 0)$ ஆகும். இவ்வாறு தீர்வு வரைகளில் மூடப்பட்ட அணிமையையுடைய தனிப்புள்ளி, மையத் தனிப்புள்ளி எனப்படும்.

4வது அத்தியாயத்தில் தனிப்புள்ளிகளைப்பற்றியும் அவற்றின் பாகுபாடுகள் பற்றியும் வேறொரு கண்ணோட்டத்திலிருந்து ஆராய்வோம்.

தோற்றம் 1-ல் உள்ள தீர்வின் உள்ளமை, தனித்தன்மை இவற்றிற்குள் இரண்டாவது நியதியாகிய லீப்விச் நியதி—அல்லது இன்னும் விதிகளைத் தளர்த்திக் கூறப் புகுந்தால், எல்லையுடை பகுதிவகைக்கெழு $\frac{\partial f}{\partial y}$ உள்ளமை, பல புள்ளிகளில் புறக்கணிக்கப்படுகிறது. இந்தப் புள்ளிகளை அணுகும்போது $\frac{\partial f}{\partial y}$ எல்லையின்றி அதிகரிக்கிறது. $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ எனும் புள்ளிகளில்.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = 0$

எனும் சமன்பாடு தனித்தன்மையற்ற சில புள்ளிகளைக் கொண்ட வரையைத் தருகிறது, இந்தவரையில் தனித்தன்மையில்லை எனில் தனிவரையாகிறது. $\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = 0$ தரும் வரை பல கிளைகளை யுடையது. ஒவ்வொரு கிளையையும் தனித்தனி ஆராய்ந்து அது தீர்வு வரையா அல்லது தனிவரையா என முடிவுகட்டவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\dfrac{dy}{dx} = y^2 + x^2$ என்பது தனித் தீர்வு உடையதா என்பதை ஆராய்க.

உள்ளமை, தனித்தன்மை இவற்றைப்பற்றிய நியதிகள் எல்லாம் புள்ளிகளுக்கு அண்மையிலும் சரியாவதால் இதற்குத் தனித் தீர்வு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2 + 5}$ எனும் சமன்பாட்டிற்குத் தனித் தீர்வு உண்டா ?

வலப்பக்கம் தொடர்ச்சியுடையது. ஆனால், $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2}{3}$ $(y - x)^{-1/3}$ இது $y = x$ எனும் நேர்கோட்டை அணுக எல்லையின்றி அதிகரிக்கின்றது. ஆகவே, $y = x$ எனும் நேர்கோட்டின் நியதிகள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன. ஆனால், $y = x$ என்பது சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தியதல்ல. ஆகவே, தனித்தீர்வு யாதொன்றுமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

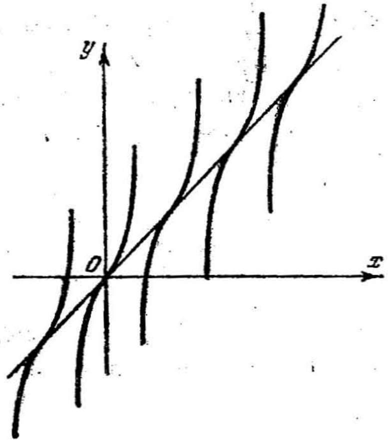
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2 + 1}$$

என்பதற்குத் தனித் தீர்வு உண்டா ?

சென்ற எடுத்துக்காட்டில் கூறியது போன்று $\dfrac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial y}} = 0$

எனும் சமன்பாடு $y = x$ எனும் வடிவத்தில் உள்ளது. ஆனால், இங்கு $y = x$ என்பது சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தியதாகக் காண்

கிறது. $z = (y - x)$ எனப் பிரதியிட சமன்பாட்டை மாறிகள் பிரிக்கபடும் சமன்பாடாக மாறுகிறது. எளிதாக இதன் தீர்வு $y - x = \frac{(x-c)^3}{27}$ என வருகிறது. இது தரும் வரைத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு வரையும் $y = x$ எனும் வரையில் உள்ளன.



படம் 1–23.

இவ்வாறு, $y = x$ என்பது தனித் தீர்வு ஆகும். இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து நாம் அறிவது, $\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ எனும் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் தொடர்ச்சியுடைமை மட்டும் தீர்வின் தனித் தன்மைக்குப் போதுமானதல்ல என்பதாம். இருப்பினும் இங்கு தீர்வின் உள்ளமை உள்ளது என்பதை நிறுவ முடியும்.

7. முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தோராயமாகத் தீர்வுகாணும் முறைகள்

(Approximate Methods of Integrating First Order Equations)

ஆருவது பிரிவில் (Sec 6) வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தோராயமாகக்காணும் இரண்டு முறைகளை ஆராய்ந்தோம். ஆயிலரின் முறை ஒன்று, அடுத்தடுத்துத் தோராயமாகக்காணும் முறை மற்றது. ஆனல், அவை இரண்டும் சில அடிப்படைக் குறைகள் கொண்டன. ஆகவே, நடைமுறைத் தோராயக் கணியமுறையில் அவற்றைப் பயன்படுத்துவதில்லை.

தோராய முறையின் மாண்பு முடிவின் சரியான தன்மையையும் கணிதக் கிரியையின் எளிமையையும் பொருத்தது. அடுத்தடுத்தத் தோராயமுறைத் தீர்வுகாணலின் முக்கிய குறைபாடு பல்வேறு தோராயங்கள் மிக மெதுவாகத் தீர்வுக்கு ஒடுங்குவதாகும். அத்துடன் கணித முறையும் சிக்கலானது, ஆயிலர் முறையின் குறைபாடு தீர்வின் முடிவு சரியான மதிப்பிலிருந்து மிக விலகியிருப்பதாகும். அதாவது, பிழை (Error) மிக அதிகம். பிழையைச் சுருக்க மிகமிகச் சிறிய இடைவெளியை h-ஐக் கணக்கிடக் கொள்ளவேண்டும். இதனால், கணக்கிடுதல் மிகவும் நீளமாகிறது.

ஆயிலர் முறையை, மீண்டும் மீண்டும் செய்முறை (Method of iteration) பயன்படுத்த கணக்கிடுவதற்குப் பயனுள்ளமுறையைத் தருகிறது. இவ்வாறு, மீண்டும் மீண்டும் செய்முறையை ஆயிலர் முறையுடன் பயன்படுத்தும்போது, $x_0 \leqslant x \leqslant b$ எனும் இடைவெளியைப் பகுக்கவேண்டிய வருகிறது. இந்த இடைவெளியில் தான் $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வைத் திட்டப்படுத்தவேண்டிய வருகிறது. இந்த பகுபட்ட இடைவெளிகளின் நீளம் $h = \dfrac{b - x_0}{n}$; $x_0 + kh = x_k$, $y(x_0 + kh) = y_k$ $y'(x_0 + kh) = y'_k$ என்போம். (y_k ஏற்கனவே, காணப்பட்டிருந்தால்) y_{k+1}-ஐக் கணக்கிடுவோம். இதற்கு ஆயிலர் சூத்திரம்,

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k \text{ அல்லது,}$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = hy'_k \qquad \dots \quad (1\cdot39)$$

என்பதை முதலில் பயன்படுத்துவோம்.

அதாவது, $x_0 + kh \leqslant x \leqslant x_0 + (k+1)h$ என்ற இடைவெளியில் (x_k, y_k) என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் தீர்வு வரைக்குப் பதிலாக, இந்தப் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டின் துண்டைப் பயன்படுத்துகிறோம். (படம் 1-13 பக்கம் 45 பார்க்கவும்). பிறகு இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட y_{k+1}-ன் மதிப்பின் பிழை இன்னும் குறைக்கப்படுகிறது. இதற்காக, $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$ எனும் வகைக்கெழு காணப்படுகிறது. பிறகு (1·39)-ல் உள்ள ஆயிலர் சூத்திரம் மறுபடியும் உபயோகிக்கப்படுகிறது. ஆனால், y'_k-க்குப் பதிலாக, எல்லைப் புள்ளிகளின் சராசரி மதிப்பு $\dfrac{y'_k + y'_{k+1}}{2}$. அதாவது, $y_{k+1} = y_k + h\,\dfrac{y'_k + y'_{k+1}}{2}$ ... (1·40)

என்பதைக் கொள்கிறோம்.

இந்த முறையைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்தித் துல்லிய மதிப்பு போதுமான அளவுத் திருத்தமாக, y_{k+1}-யின் இரு அடுத்தடுத்த மதிப்பு ஒன்றுகும் வரைக் கணக்கிடலாம். பிறகு இதையே y_{k+2} காணப் பயன்படுத்தவும் — இதுபோன்று தொடரவும்.

திரும்பத்திரும்பக் கணக்கிடும் முறையுடன் சேர்ந்து ஆயிலர் முறை ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் h^3 எனும் தரத்திற்கு மட்டும் பிழை தருகிறது. அநேக இடங்களில் கணிய முறைக்கு (Computational work) இது பயன்படுகிறது. ஆயினும் இன்னும் திருத்தமான முறைகள் (ஸ்டார்மர், ரன்ஜு மிலன் — Stormer, Runge and Miln — இன்னும் மற்றவர்களது) பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

இதன் அடிப்படி, காணவேண்டிய தீர்வுக்குப் பதிலாக டெயிலர் விரிவின் பல உறுப்புக்களைக் கொள்ளலாகும். அதாவது.

$$y_{k+1} = y_k + h_k + hy_k' + \frac{h^2}{2!} y_k'' + \dots \frac{h^n}{n!} y_k^{(n)} \quad \dots \quad (1{\cdot}41)$$

அதாவது, தீர்வுவகைக்குப் பதிலாக, $x = x_k$ $y = y_k$ என்ற புள்ளியில், தீர்வுவரையுடன்படி தொடுகோட்டுடைய நேரடி பரவளையத்தைத் தீர்வுவரைக்குப் பதிலாக எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

(1·41)-ல் கண்டுள்ள டெயிலர் சூத்திரத்தை நேரடியாகப் பயன்படுத்துவது, சிக்கலானதும் மிகவும் பலதரப்பட்டதுமான கணிக்கும் முறையைத் தருகிறது. ஆகவே, $x = x_0$-க்குத் திருத்தமாக ஒரு சில மதிப்புக்களை வேண்டும்போது, எளிதான கணிக்கும் முறைகளால் காண முடியுமானால் மட்டும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இத்தகைய எளிதான முறைகளில் முதலாகக் கூறவேண்டியது ஸ்டார்மர் ((Stormer) முறையாம். இங்கு. நமக்கு எந்தப்படி பரவளையம் வேண்டுமோ அதைப்பொருத்துக் கீழ்வரும் சூத்திரங்களில் ஒன்று பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} \quad \dots \quad (1.42)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-3} \quad \dots \quad (1{\cdot}43)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k+1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} \quad \dots \quad (1{\cdot}44)$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{8}{8}\Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{k-1} \quad \dots \quad (1\cdot45)$$

இங்கு, $q_k = y'_k h \; \Delta q_{k-1} = q_k = q_{k-1} \; \Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_k - \Delta q_k + \Delta^3 q_{k-3} = \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3} \Delta^2 g_{k-3} \Delta^4 q_{k-4} = \Delta^3 q_{k-3} - \Delta^3 q_{k-4}$ ஸ்டார்மர் சூத்திரங்கள் அடைவதற்கு

$y' = f(x_1\, y(x)$ எனும் முற்றொருமையின் தீர்வை x_k-லிருந்து x_{k+1} வரை உள்ள இடைவெளியில் நுண்தொகை காணவேண்டும்.

இங்கு, (y,x) என்பது $y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k-1}} f(x, y(x)\, dx$ என்பதின் வேண்டிய தீர்வு ஆகும். கணிதப் பகுப்பசய்வில் (mathematical analysis) காணப்படும்.

நுண் தொகைகாண் சூத்திரம்.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)\, dx = h\left[\phi_k + \frac{1}{2}\Delta\phi_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\phi_{k-2} + \frac{8}{8}\Delta^3\phi_{k-3} + \frac{251}{720}\Delta^4\phi_{k-2} \quad \dots\right] \qquad (1\cdot46)$$

பயன்படுத்தப்படும்.

நியூட்டனின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தில் உள்ள பலபடி உறுப்புக்களுக்குப் (Polynomial) பதிலாக நுண்தொகை $\phi(x)$-ஐக் கொண்டு, ஒவ்வொரு உறுப்பின் நுண்தொகையை வரும் சூத்திரம் இது என்பதை கவனத்திற்குக் கொண்டு வரலாம்.

(1·46)-ல் கண்டுள்ள மீதி உறுப்பு மதிப்பீடு கீழ்வருவன வற்றைக் காட்டுகிறது. ஓர் இடைவெளியில் (1·42)-ல் உள்ள பிழை h^3 எனும் தரமுள்ளது. (1·43)-ல் h^4 எனும் தரமுள்ளது. (1·44)-ல் h^5 எனும் தரமுள்ளது. (1·45)-ல் h^6 எனும் தரமுள்ளது. பல இடைவெளிகளிலும் சேர்ந்து பிழை திரளாகும் என்பதைக் கணக்கில் கொண்டால், n இடைவெளியில் உள்ள பிழையின் மதிப்பீடு காண் ஓர் இடைவெளியில் கண்ட தொகையை $n = \frac{b - x_0}{h}$ ஆல் பெருக்கவேண்டும். இதனால், மேலே குறிப்பிட்ட பிழையின் தரம் மாறும்.

குறிப்பு : டெயிலர் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $x = x_k$ எனும் புள்ளிக்கு அண்மையில், நேரடியாக விரிவுகண்டால், அந்த விரிவில் ஸ்டார்மர் சூத்திரத்தின் (1·42)-ன் வலப்பக்கம் உள்ள மூன்று உறுப்புக்களும், டெயிலர் விரிவில் (1·41) y_{k+1}-ன் விரிவாகிய,

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k \qquad \dots \quad (1{\cdot}47)$$

எனும் உறுப்புக்களும் ஒன்றே எனக்காட்ட முடியும். அடுத்த ஸ்டார்மர் சூத்திரத்தின்படி (1·43) h-ன் மூன்றும்படி வரை, அதாவது,

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_2 + \frac{h^3}{3!} y'''_k$$

எனும் உறுப்புக்கள் வரை, வலபக்கம் ஒன்றும். இதுபோன்று மற்றுள்ள சூத்திரங்களுக்கும் எடுத்துக்காட்டாக (1·42)-ல் சூத்திரத்திற்கு நாம் அடைவது,

$$y_k + hy'_k + \tfrac{1}{2}h\Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \tfrac{1}{2}h(y'_k - y_{k-1}) \quad \dots \quad (1{\cdot}48)$$

அல்லது,

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

டெயிலர் பிரிவில்,

$$y'(x_{k-1}) = y'(x^2) + hy''(x_k) + \tfrac{1}{2}h^2 y'''(x_k) \quad \dots$$ (1·48)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$y_k + hy'_k + \tfrac{1}{2}h(y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \tfrac{1}{2}h^2 y''_k - \tfrac{1}{4}h^3 y'''_k$$

ஆகவே, (1·47)-ல் உள்ள டெயிலர் விரிவில் உள்ள மூன்று உறுப்புக்கள் வரை இந்த பிரிவு பொருந்துகிறது.

ஸ்டார்மர் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி, கணக்கிடத் துவங்குவதற்கு, நாம் காணவேண்டிய சார்பலனுக்கு, ஒரு புள்ளியல்ல, பல புள்ளிகளில் அதன் மதிப்பைக் கண்டாகவேண்டும். [(1·42) சூத்திரமானால், x_0, $x_0 + h$ என்ற இரு இடங்களில்; (1·43) என்றால், x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$ என இவ்வாறு] இத்தகைய ஒரு சில முதல் மதிப்புக்களை சுருங்கிய இடைவெளியைக் கொண்டு ஆயிலர் முறையிலோ, அல்லது (1·41)-ல் உள்ள டெயிலர் சூத்திரம் கொண்டோ, அல்லது கீழே விவரிக்கப்படும் ரன்ஜ் முறையைக் (Runge method) கொண்டோ காணவேண்டும்.

திட்டமாகக் கூற (1·44)-ல் உள்ள சூத்திரத்தைக் கொள்வோம்.

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}.$$

அத்துடன் y_0 எனும் துவக்க மதிப்புடன், y_1, y_2, y_3 எனும் மதிப்

புக்களையும் கண்டுகொண்டோம் எனக் கொள்வோம். பிறகு, கீழ்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுவோம்.

$$q_0 - f(x_0, y_0)\, h \qquad q_1 = f(x_1\ x_1)\, h$$
$$q_2 = f(x_2\ y_2)\, h \qquad q_3 = f(x_3\ y_3)\, h$$

ஆகவே,

$$\Delta q_0 = q_1 - q_0 \qquad \Delta q_1 = \Delta q_2 - q_3 \qquad \Delta q_2 = q_3 - q_2$$
$$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0 \quad \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1 \quad \Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0$$

இப்போது, (1·44) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி y_4-ன் மதிப்பைக் காண்கிறோம். இந்த மதிப்பைக் கொண்டு q_4 Δq_3 $\Delta^2 q^2$ $\Delta^3 q_1$ இவை கிடைக்கிறது. பிறகு (1·44)-ஐ மீண்டும் பயன்படுத்த y_5-ன் மதிப்பு வருகிறது.

இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட மதிப்புக்களைப் பட்டியலில் நிரப்புகிறோம் (கீழே காண்க).

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
x_2	y_2	q_2	Δq_2		
x_3	y_3	q_3			
x_4					
x_5					
x_6					

சாதாரணமாக ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வின் $x = b$ எனும் ஏதேனும் புள்ளியில் மதிப்பு குறிப்பிட்ட திருத்தத்திற்குக் காண தேவைப்படும். உடனே ஒரு கேள்வி எழும்.

ஸ்டார்மரின் எந்த சூத்திரம் மிகவும் தகுதியானது. வேண்டிய திருத்த மதிப்புக்கு காண எந்த இடைவெளி அகலம் h, அதைத் தரும். அத்துடன் அந்த இடைவெளி மிகச் சிறிதாக இருக்காது. (ஏனெனில் இன்னும் அதிகமான கணக்கிடுதல் வேண்டிவரும்.)

எத்தகைய சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும், எந்த இடைவெளி, மேலே குறிப்பிட்ட பிழை அளவுக்குள் மதிப்புத்தர, பயன்படுத்த வேண்டும் என்பதை நாம் ஓரளவு அறிந்துள்ளோம். நாம் இன்னொன்று கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும், அதாவது, ஏற்படும் பிழை அளவு, பல்வேறு இடைவெளிகளில் ஏற்படும் பிழைகளின் தொகுப்பாக இருக்கும் என்பதாம். தகுதிவாய்ந்த இடைவெளி அகலம் h-ஐக் கொள்ள, $(1{\cdot}44)$-ல் உள்ள கடைசி வேறுபாடுகள் யாவும் ஒழுங்காக மாறும். $(1{\cdot}44)$-ல் உள்ள கடைசி வேறுபாடுகள் மிகை இலக்கங்களில் மட்டுமே மாறுதல் ஏற்படுத்தும்.

சில வேறுபாடுகளில் திடீர் மாற்றம் ஏற்பட்டால் அது, எடுத்துக்கொண்ட இடைவெளி h ல் கவனத்திற்கு வராத சில தனித்தன்மை, சார்பலன் மாற்றங்களில் என்பதைச் சுட்டிக்காட்டுவதுடன், y_{k+1}-ன் மதிப்பில் கணிசமான பிழை ஏற்படுத்தவும் செய்யும்.

இருந்தாலும், இத்தகைய காரணங்காட்டுதல் யாவும் மிகவும் நம்பத்தகுந்தவை அல்ல. இன்னும் திட்டமான பிழை மதிப்பீடுசெய்ய முற்பட்டால் மிகவும் சிக்கலானதும் அசௌகரிய மான கணக்கிடுதல் தேவைப்படும். இந்தக் காரணத்திற்காக, நம்பத்தகுந்த கீழ்வரும் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேற் கூறிய பிழையுற்ற முறையைப் பின்பற்றி ஏதேனும் h எனும் இடைவெளி கொண்டு, h, $\frac{h}{2}$ என்பனவற்றையும், ஸ்டார்மர் சூத்திரம் ஒன்றையும் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுவோம், பொதுப் புள்ளிகளில் மதிப்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம். மதிப்புக்கள் குறிப்பிட்ட திருத்தத்திற்குள் பொருந்தினால் h எனும் இடைவெளி தேவையான திருத்த மதிப்பைத் தருகிறது என்பதாகும். மதிப்புக்கள் திருத்த எல்லைக்குள் அமையாவிடில், இடைவெளி h-ஐ 2-ஆல் வகுத்து $\frac{h}{2}$. $\frac{h}{4}$ எனும் இடைவெளிகொண்டு கணக்கிடவும். மீண்டும் மதிப்புக்களை ஒப்பிடுவோம். மீண்டும் மீண்டும் இதுபோன்று ஆகுக.

$h, \frac{h}{2}$ என்ற இடைவெளிகளைக் கொண்டு கணக்கிடுதல் அடுத்தடுத்துச் செய்தால் (பக்கத்தில் செய்தால்) மதிப்புக்கள் பொருந்தாமை எளிதில் புலப்படும். இதனால் அனாவசியமான கணக்கிடுதலைத் தவிர்க்கலாம். இவ்வாறு இரட்டைக் கணக்கிடுதல் கணக்கிடுவதிலுள்ள பிழைகளைத் தவிர்க்கவும் உதவுகிறது. ஏனெனில் $h, \frac{h}{2}$ எனும் இடைவெளிகளைக் கொண்டு கணக்கிட்டு ஒப்பிடும்போது அவை புலனாகிறது.

ஸ்டார்மர் முறையில் கணக்கிடத் தொடங்குவதற்குத் தேவையான முதற் சில y_i-ன் மதிப்புக்களைக்காண ஏற்கனவே சொல்லப்பட்ட முறைகளன்றி (அதாவது) சுருங்கிய இடைவெளிகளைக் கொண்டுள்ள ஆயிலர் முறை, ஆவர்த்தனத்துடன் சேர்ந்தோ (with iteration) அல்லது இல்லாமலோ—அல்லது டெயிலர் தொடர் முறையில் பிரிவு ஏற்படுத்தி) ரன்ஜு முறையையும் பின்பற்றலாம்.

ரன்ஜு முறை y_{k+1} காண நான்கு எண்கள் கணக்கிட வேண்டும்.

$$m_1 = f(x_k, y_k) \quad m_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{m_1 h}{2}\right)$$

$$m_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_2 h}{2}\right) \quad m_4$$

$$= f(x_k + h, y_k + m_3 h) \qquad \ldots \quad (1.49)$$

பிறகு,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \qquad \ldots \quad (1.50)$$

நடைமுறையில், ஸ்டார்மர் முறைக்குத் தேவையான முதல் சில மதிப்புக்கள் $y_1, y_2 \ldots$ இவற்றைக் கணக்கிட மட்டுமே ரன்ஜு முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. இருந்தாலும் ஏனைய மதிப்புக்களைக் கணக்கிடவும் இதனைப் பயன்படுத்தலாம். ஸ்டார்மர் முறையைப் போன்று, ரன்ஜு முறையும், காணவேண்டிய தீர்வுவரைக்குப் பொருத்தமான மிக நெருங்கிய தொடுகோட்டுப் பரவளையத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

(1·50)-ல் உள்ள ரன்ஜு சூத்திரத்தின் வலப் பக்கத்தை

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h + \frac{1}{2!} y_k'' h^2 + \frac{1}{3!} y_k''' h^3 + \frac{1}{4!} y_k^{IV} h^4$$

எனும் டெயிலர் விரிவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் ஐந்தாம்படி உறுப்புகளுக்குக் கீழ் உள்ள உறுப்புக்கள் ஒன்றுவதை காணலாம்.

இந்த காரணத்திஞல், ஸ்டார்மர் முறையில் (1.42), (1.43), (1.44) சூத்திரங்களில் கணக்கிடவேண்டிய பல மதிப்புகளை ரன்ஜூ முறையில் காணும்போது ஒரே இடைவெளி h-ஐப் பயன் படுத்தலாம். ஆனல், பிறகு (1.45)ல் உள்ள ஸ்டார்மர் முறை பயனுகும்போது, முதலில் செய்யப்படும் ரன்ஜூ முறையில் இன்னும் சிறிய இடைவெளியைக் கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில், கணக்கிடப்படும் அதே h எனும் இடைவெளிக்கு, (1.44)-ல் வரும் அளவு திருத்தமான மதிப்பு (1.50)ல் உள்ள சூத்திரத்தில் வரும் என்பது உறுதியில்லை.

(1·43), (1·44)-ல் உள்ள ஸ்டார்மர் சூத்திரத்திற்கு வேண்டிய முதல் கணக்கீடுகளை சுருங்கிய இடைவெளிகளால் ரன்ஜூ முறையில் கணக்கிடப்படுவதும் உண்டு என்பதும் உண்மையே: ஏனெனில் ஸ்டார்மர் சூத்திரத்திற்கு வேண்டிய துவக்க மதிப்புக்களில் உள்ள நுண்ணிய பிழையும் பிறகு கணிக் கப்படும் மதிப்புக்களின் திருத்தத்தை மிகவும் குறைக்கும்*.

நவீன சிற்றிலக்க கணியப் பொறிகள் (Modern digital computors) மேற்கூறிய ஸ்டார்மர், ரன்ஜூ முறைகளில் (ஒரு விஞடிக்கு பல ஆயிரம் கிரியைகள் வரை) வெகு துரிதமாகச் செய்கின்றன. இதற்கு ஸ்டார்மர், ரன்ஜூ முறைகளுக்கு வகுக்கப்பட்ட தரப்படுத்தப்பட்ட செயல் முறைகளைப் பயன் படுத்திஞல், செயல்படும் முறைகளை எளிதில் வகுக்க முடியும். இங்கு $y' = f(x_1\ y)$. $y(x_0) = y_0$ எனும் வகைக் கெழுச் சமன் பாட்டில் திருத்தமான விடைகாண $y'_k = f(x_k, y_k)$ என்பதன் தீர்வுகாண செயல் முறை வகுத்து அதனை தரப்படுத்தப் பட்டுள்ள செயல் முறையில் சேர்க்க வேண்டியது மட்டும் தான்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$y^1 = x^2 + y^3$$
$$y(0) = 1$$

y (0·5)-ன் மதிப்பை ·01 எனும் திருத்த அளவிற்குள் காணவும்.

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)\ x^2}{21} + \frac{y'''(0)x^3}{31}.$$

எனும் டெயிலர் விரிவைப் பயன்படுத்தி $x_1 = 0·1$, $y_2 = 0·2$ எனும் இடங்களில் மதிப்புக் கணக்கிடுவோம்.

---

*இன்னும் விரிவாக, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பல வகைத் திருத்தங்களில் காணும் முறை A Krylov [6], I Berezinம் N Z hidkov [7] ஆம் தரப்பட்டுள்ளன.

$y(0{\cdot}1) = -0{\cdot}9088 \quad y(0{\cdot}2) = -0{\cdot}839$ (அல்லது $y(0{\cdot}2)$க்குப் பதிலாக $y(-0{\cdot}1)$ இன்னும் நலம், ஏனெனில் புள்ளி $x_1 = -0{\cdot}1 \quad x_0 = 0$ எனும் துவக்கப் புள்ளிக்கு $x_2 = 0{\cdot}2$வை விட அண்மையில் உள்ளது. பிறகுள்ள மதிப்புக்களை ஸ்டார்மரின் $(1{\cdot}44)$ சூத்திரப்படி $h = 0{\cdot}1$ எனும் இடைவெளி கொண்டு கணக்கிடவும். முடிவுகளைப் ($\Delta^3 p$ எனும் வேறுபாடுகள் இல்லாதபடி) பட்டியலில் சேக்கவும். பிறகு அல்லது பக்கத்திலேயே $\frac{h}{2} = 0{\cdot}05$ என இடைவெளி கொண்டுகணக்கிடவும்.

இது தருவது $y(0{\cdot}5) \approx -0{\cdot}68$,

8. வகைக் கெழுத்தன்மையே பிரிக்கப்படாதிருக்கும் எளிய சமன்பாடுகள்.

(Elementary type of equations not solved for the derivative)

மேற்கூறிய வகைக் கெழுக் சமன்பாட்டின் உருவம்

$$F(x, y, y') = 0$$

இதிலிருந்து y'–ஐத் தனியே பிரித்துக் காண இயலுமானால் $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. எனப் பல மூலங்கள் காண முடியும். இவற்றின் தீர்வுகளைத் தனித்தனியாகக் கண்டு $(1{\cdot}51)$ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காணமுடியும்.

எடுத்துக் காட்டாகக் கீழ்வரும் சமன்பாட்டை விடுவிப்போம்.

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0 \qquad (1{\cdot}52)$$

இந்த y'–ல் உள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $y' = x \quad y' = y$.

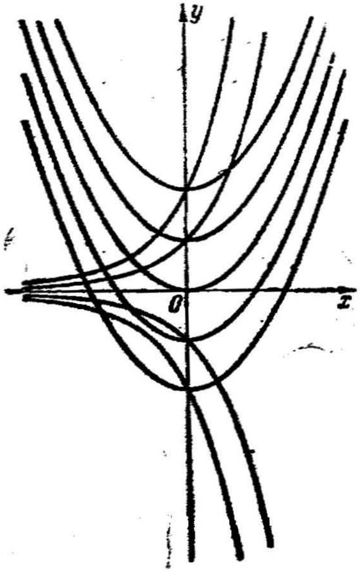
ஒவ்வொன்றின் தீர்வுக் காண.

$$y = \frac{x^2}{2} + C \text{ எனவும்} \qquad \ldots (1{\cdot}53)$$

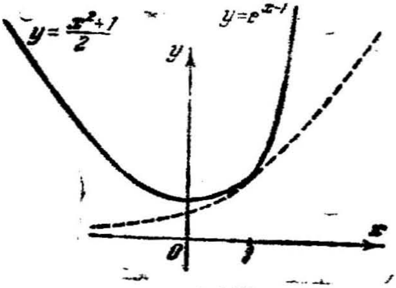
$$y = c\,e^x \text{ எனவும் வருகிறது.} \qquad \ldots (1{\cdot}54)$$

(படம் 1·24) இரு தீர்வுவரைத் தொகுதிகளும் முதற் சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமானவையாகும். அத்துடன், $(1{\cdot}53)$-ன் தீர்வுவரை ஒன்றின் வில்லும், $(1{\cdot}54)$-ன் தீர்வுவரை ஒன்றும் சேர்ந்து அவற்றின் பொதுப் புள்ளியில், அவற்றிற்குப் பொதுத் தொடுகோடு இருந்தால், ஒழுங்கான வரையாக இருக்கமுடியும்.

படம் (1·25) காட்டுவது $c = \frac{1}{2}$ எனும் மதிப்புக்கு $-\infty < x < 1$ என்ற இடைவெளியில் $y = \frac{x^2}{2} + c$-யின் வில்லும் $c = e^{-1}$



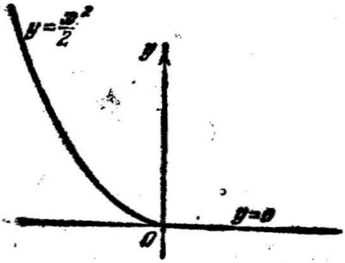
படம் 1.24.



படம் 1.25.

என்ற மதிப்புக்கு $1 < x < \infty$ என்ற இடைவெளியில் $y = ce^x$. என்ற வரையின் வில்லும் சேர்ந்துள்ள ஒழுங்கான வரையாகும்

படம் 1·26-ல் $y = \frac{x^2}{2}$ $(x < 0)$-ன் வில்லும் $y \equiv 0$ $x > 0$ என்பதுவும் சேர்ந்ததாகும்.



படம் 1·26.

ஆனால், (1·51)-ல் சமன்பாட்டில் y'-ன் மூலம் எளிதில் எப்போதும் காணமுடியாது. அல்லாமலும் $y' = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண இயலுவது இன்னும் அரிதாகும். ஆகவே (1·51)-ன தீர்வு காண மற்ற முறைகளைப் பயன்படுத்தவேண்டி வரும். இத்தகைய பல கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

1. $F(y') = 0$ ... (1·56

என்று, $y' = k_1$ எனக் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் மூலமுடைய வடிவில் வரும் (1·51)-ல் உள்ள சமன்பாடு.

(1·55)-ல், x, y இல்லை; k_1 என்பது மாறிலி ஆகவே, $y' = k_1$-ன் தீர்வு $y = k_1 x + c$ அல்லது ,$k_1 = \frac{y-c}{x}$ ஆனால், k_1 என்பது (1·55)-ன் ஒரு மூலமாகும். ஆகவே, $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ இதுவே அந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(y')^7 - (y')^6 + y' + 3 = 0$$

இதன் தீர்வு

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^6 + \frac{y-c}{x} + 3 = 0$$

2. (1·51)-ல் உள்ள சமன்பாடு

(1·56) $F(x, y^1) = 0$ எனும் வடிவில் உள்ளது

இங்கு y'-ன் தீர்வு காண்பது கடினமாக இருந்தால் t' எனும் துணை அலகைப் புகுத்துவது நலம். (1·56)-ல் உள்ள ஒரு சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக, $x = \phi(t)$, $y' = \psi(t)$ என இரு சமன்பாடுகளைக் கொள்ளவேண்டும்.

$dy = y'\,dx$ என்பதால், இங்கு

$$dy = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \text{ ஆகவே } y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c$$

இதனால் (1·56)-ன் தீர்வு வரைகள் துணை அலகில் கீழ்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன.

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \int \phi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c$$

(1·56)-ல் உள்ள சமன்பாட்டில் x-ன் தீர்வை எளிதில் கண்டால் $x = \varphi(y^1)$ என்றால் $y^1 = t$ எனத் துணை அலகைப் புகுத்துவது சவுகரியமாக இருக்கும். அப்போது,

$$x = \phi(t), \; dy = y^1\,dx = t\,\varphi'(t)\,dt.$$

$$y = \int t\,\phi'(t)\,dt + c$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x = (y')^3 - y' - 1.$$

$y^1 = t$, அப்போது $x = t^3 - t - 1$ ... (1·57).

$$dy = y'\,dx = t\,(3t^2 - 1)\,dt.$$

$$y = \frac{3t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + c_1. \quad \ldots \quad (1{\cdot}58)$$

(1·57), (1·58)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள், வேண்டிய தீர்வு வரைகளைத் துணை அலகில் விளக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$x\sqrt{1 + y'^2} = y'.$$

$y' = \tan t$ என்றால் $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, எனும்

இடைவெளியில் $x = \sin t$; ... (1·59)

$$dy = y'dx = \tan t \cos t\,dt = \sin t\,dt$$

$$y = -\cos t + c_1. \quad \ldots \quad (1{\cdot}60)$$

அல்லது (1·59), (1·60) எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து துணை அலகு t ஐ நீக்க, $x^2 + (y - c_1 = 1$ என ஒரு வட்டத் தொகுதியை அடைகிறோம்.

3. சமன்பாடு (1·52) $F(y, y') = 0$ ... (1 61)
எனும் வடிவானால்

இதில் y'-ன் தீர்வு காண்பது கடினமானால் முன்கூறியது போல், t' எனும் துணை அலகைப் புகுத்துதல் நலம். (1·61)-ன் சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக, $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ என இரு சமன்பாடுகள் வருகின்றன. $dy = ydx$ என்பதால்,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)\,dt}.$$

இதிலிருந்து $x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} = c.$

இவ்வாறு வேண்டிய தீர்வு வரைகள்,

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + c, \quad y = \varphi(t)$$

எனும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன.

(1·61)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து y ஐத் தனியாகக் கண்டால், y' ஐயே துணையலகாகக் கொள்ளலாம்.

$y = \varphi(y')$ என்றால், $y' = t$ என இட,

$$y = \varphi(t),\ dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} + c.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$$

$y' = t$ என இடவும்.

$$y = t^5 + t^3 + t + 5 \qquad \ldots \quad (1{\cdot}62)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{(5t^4 + 3t^2 + 1)}{t}\,dt$$

$$= \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t}\right)dt$$

$$x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3t^2}{2} + \ln|t| + c \qquad \ldots \quad (1{\cdot}63)$$

(1.62), (1.63)ல் உள்ள சமன்பாடுகள் தீர்வு வரைகளின் சமன்பாட்டைத் துணை அலகில் தருகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\sqrt{\frac{y}{1 + y'^2}} = 1$$

y' என்பதற்கு sin ht எனப் பிரதியிடவும்

அப்போது $y = \cos\ ht$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\sin\ ht}{\sin\ ht}\,dt = dt \qquad (1.64)$$

$$x = t + c \qquad (1.65)$$

(1.64), (1.65)-லிருந்து t-ஐ நீக்க

$y = \cosh(x - c)$ என வருகிறது.

இப்போது பொதுவாகக் கவனிப்போம். (1.51) $F(x, y, y') = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம், x, y, y' எனும் மூன்று மாறிகளையும் சார்ந்ததென்போம்.

$x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$, $y' = X(u, v)$ எனத் துணை அலகுகளைக் கொள்வோம்.

$dy = y'dx$ எனும் தொடர்பைக் கொண்டு,

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = X(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\phi}{\partial v}dv\right]$$

இதிலிருந்து $\frac{dv}{du}$ ன் மதிப்பு காண நாம் பெறுவது

$$\frac{dv}{du} = \frac{X(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v} - X(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}} \quad \ldots \quad (1\cdot66)$$

வகைக்கெழுவிற்கு இவ்வாறு ஏற்கனவே தீர்வு காணப்பட்ட முதற்படி சமன்பாட்டை அடைகிறோம். ஏற்கனவே கூறப்பட்ட கணக்குகளில் ஒன்றாக இது அமைகிறது. ஆனால், (1.66)ல் வரும் சமன்பாடு தொகை கண்டு தீர்வுகாணும் வகையில் எம்போதும் அமையாது.

$F(x, y, y') = 0$ எனும் சமன்பாடு தொகை கண்டு தீர்வு காணும் வகையில் அமைந்தால் x, y' என்பதை u, vக்குப் பதிலாகத் துணை அலகுகளாகக் கொள்வது நலம்.

(1.5)ல் உள்ள சமன்பாடு,

$$y = f(x, y') \quad \ldots \quad (1{:}67)$$

என்ற வடிவிலானால் x-ஐயும் $y' = p$-ஐயும் துணையாகக் கொள்ளக் கிடைப்பது $y = f(x, p)$,

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}\partial p,$$

அல்லது, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}; \quad \ldots \quad (1.68)$$

இதன் நுண் தொகைத் தீர்வு காண (ஆனால் எப்போதும் இவ்வாறு தீர்வுக் காண இயலாது)

நாம் அடைவது $\phi(x, p, c) = 0$. இந்தச் சமன்பாடும் $y = f(x, p)$ இரண்டும் சேர்ந்து தீர்வு வரைத் தொகுதியை p எனும் துணையலகில் தருகிறது.

கீழ்வருவதைக் கவனிக்கவும். (1·67)-ல் x ஐச்சார்ந்த வகைக்கெழு காண (1·68) கிடைக்கும். ஆகவே, (1·67)-ஐ x-ஐச் சார்ந்து வகைக்கெழுவிட்டு $y' = p$ எனக்கொண்டால் நாம் அடைவது, $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$. இது (1·68) உடன் சரியாகிறது. இந்தக்காரணத்தினால் இந்த முறை வகைக்கெழு விட்டு, சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறை எனப்படும்.

இதேபோலவே,

$F(x, y, y') = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வும் $x = f(y, y')$ என வந்தால் காணமுடியும். இங்கு y ஐயும் $y' = p$ ஐயும் துணையலகாகக் கொள்ள வேண்டும். $dy = y'\,dx$ என்பதையும் பயன்படுத்த,

$$dy = p\left[\frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp\right]$$

அல்லது $\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$ (1·70) இதன் தீர்வுக்காண் $\phi(y, p, c) = 0$ என நாம் பெறுவோம்.

இந்தச் சமன்பாடும், $x = f(y. r)$ எனும் சமன்பாடும் சேர்ந்து முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு வரைகளைத் தருகின்றன. 1·69-ல் உள்ள சமன்பாட்டை சார்ந்து வகைக்கெழுவிட (1·70)-ல் உள்ள சமன்பாடு வரும்.

இந்த முறையை விளக்கக் கீழ்வரும் உதாரணத்தைக் கூறுவோம்.

$$y = x\varphi(y') = \psi(y')$$

இது x, y-ல் ஒருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். லாக்ராஞ்சு (Lagrange) சமன்பாடு எனப்படும். x-ஐச் சார்ந்து வகைக்கெழு கண்டு $y' = p$ என இடவருவது.

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \qquad (1{\cdot}71)$$

அல்லது,

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p) \qquad (1{\cdot}72)$$

இது x-லும் $\frac{dx}{dp}$-லும் ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். ஆகவே, எளிதில் நுண்தொகை காணமுடியும். உதாரணமாகத் துணையலகுகளைப் பயன்படுத்தலாம். (1·72)-ல் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$\phi(x, p, c) = 0$ எனக் கிடைத்தபின்னர், அத்துடன் $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ எனச் சேர்த்தால், வேண்டிய தீர்வுவரைகளை விளக்கும் சமன்பாடுகள் வருகின்றன.

(1·71)-லிருந்து (1·72)-க்கு வரும்போது $\frac{dp}{dx}$-ஆல் வகுக்க நேரிடுகிறது. இவ்வாறு செய்யும்போது p = மாறிலி எனும் தீர்வுகளை இழக்கிறோம். அப்போது, $\frac{dp}{dx} \equiv 0$. p-ஐ மாறிலியாகக் கொள்ள (1·71)-ல் உள்ள சமன்பாடு சரியாக $p - \varphi(p) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலமாக p அமைய வேண்டும். இவ்வாறு $p = p_i$ என்பது $p - \varphi(p) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலமானால், லாக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகளுக்கு காணப்பட்ட தீர்வுகளுடன் $y = x\psi(p) + \psi(p)\, p = p_i$ என்பதையும் சேர்க்க வேண்டும். அல்லது p-ஐ நீக்க $y = x\,\psi(p^i) + \psi(p_i)$ எனும் தீர்வு நேர்கோடுகளைத் தருகின்றன.

$p - \varphi(p) \equiv 0$ என்பதைத் தனியாக கவனிக்கவேண்டும். ஆகவே, $\frac{dp}{dx}$ ஆல் வகுப்பதால் $p = c$ எனும் தீர்வை—இங்கு c ஏதேனும் ஒரு மாறிலி — இழக்க நேரிடும். இந்த இடத்தில் $\varphi(y') \equiv y'$ சமன்பாடு $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ என்பது $y = xy' \times \psi(y)$ என மாறுகிறது. இதை கிளாராவின் (Clairant) சமன்பாடு என்பர். $y' = p$ என இட $y = xp - \psi(p)$. x-ஐச் சார்ந்து வகைக்கெழுவிட நாம் அடைவது,

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0.$$

ஆகவே, $\frac{dp}{dx} = 0$ ஆகவே $p = c$ அல்லது $x + \psi'(p) = 0$. முதற் கூறியதில் p-ஐ நீக்க நாம் அடைவது,

$$p = cx + \psi(c). \qquad \ldots \quad (1\cdot73)$$

இது ஒரு துணை அலகைக் கொண்ட தீர்வுவரைத் தொகுதியாகும். பின்னர்க் கூறியதில் தீர்வைத் தரும் சமன்பாடுகள்

$$y = xp + \psi(p), \quad x + \psi'(p) = 0 \qquad \ldots \quad (1\cdot74)$$

என்பனவாம்.

(1 74)-ல் உள்ள சமன்பாடு தரும்வரை, (1·73)-ல் உள்ள வரைத்தொகுதியின் தழுவுவரைகள் என்பதை எளிதில் சரி பார்க்கலாம்.

ஏன், $\varphi(x, y, c) = 0$ எனும் சமன்பாடுகள் (c-யின் பல மதிப்புகளுக்கு) தரும் வரைத் தொகுதியின் தழுவுவரை $\varphi(x, y, c) = 0$,-வும் $\dfrac{\partial \varphi}{\partial c} = \ldots$ (1·75)-யும் தரும் வரையாகும். (இங்கு c துணையலகு) இது $y = cx + \psi(c)$ எனும் வரைத் தொகுதிக்கு, $y = cx + \psi(c)$, $x + \psi'(c) = 0$ ஆகும்.

இது (1·74) படம் 1·27 பார்க்கவும்) தரும் சமன்பாட்டி லிருந்து துணையலகின் பெயரில் மட்டும் மாறுபட்டுள்ளது.

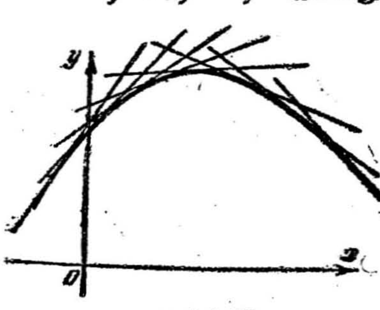
குறிப்பு: (1·75) தரும் சமன்பாடுகள் தழுவுவரையல்லாமல், பல்லுறு புள்ளிகளின் நியமப் பாதையையும் இன்னும் சில இடங்களில் வேறு வரைகளையும் தரும் என்பதை நாம் அறிந்ததே. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ என்பதில் ஏதேனும் ஒன்ருவது பூச்சியமல்லாத தானல், அவை சமன்பாடு தரும் புள்ளிகளில் எல்லைக்குட்பட்ட தானல், சமன்பாடுகள் தழுவுவரையை மட்டுமே தரும்.

இந்த இடத்தில் இந்த நியதிகள் உள்ளன.

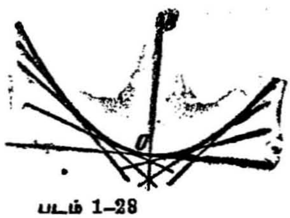
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -c$; $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 1$. ஆகவே, (1·75)-ல் உள்ள சமன் பாடுகள் தரும் வரை தழுவு வரையாகும். தீர்வு வரைகள் நேர்க் கோடுகளானல், வழுவுவரை அவை ஒன்று சேரும் புள்ளியாகச் சிதையும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

$y = xy' - y'^2$ என்பது கிளாரா சமன்பாடு.



படம் 1–27



படம் 1–28

ஒரு துணையலகைக் கொண்டு தீர்வுவரை நேர்கோடுகள் $y = cx - c^2$ எனும் வடிவில் உள்ளது. அன்றியும் $y = cx - c^2$,

$x - 2c = 0$ என்பது மேற்கூறிய வரைத் தொகுதியின் தழுவு வரையின் துணை அலகுச் சமன்பாடாகும். c ஐ நீக்க $y = \frac{x^2}{4}$ (படம் 1·28) எனும் வரையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$y = 2xy' - y'^3$ என்பது லாக்ராஞ்சின் சமன்பாடு $y' = p$

$$y = 2xp - p^3 \qquad \dots \quad (1{\cdot}76)$$

வகைக்கெழுவை விட $\rho = 2\rho + 2x \frac{d\rho}{dx} - 3\rho^2 \frac{d\rho}{dx} \dots \quad (1{\cdot}77)$

இதனை $\frac{d\rho}{dx}$ ஆல் வகுக்க நாம் அடையும் சமன்பாடு,

$$\rho \frac{dx}{dy} = -2x + 3\rho^2$$

இந்த ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் (linear differential equation) தீர்வுக்காண கிடைப்பது,

$$x = \frac{c_1}{\rho^2} + \frac{3}{4}\rho^3.$$

ஆகவே. தீர்வு வகைகளின் சமன்பாடுகள்,

$$y = 2x\rho - \rho^3, \ x = \frac{c_1}{\rho^3} + \frac{3\rho^2}{4}$$

மேலே கூறியதுபோல $\frac{d\rho}{dx}$ ஆல் வகுக்கும்போது $p = \rho_i$ எனும் தீர்வுகளை இழக்கிறோம். இங்கு ρ_i என்பது $\rho - \varphi(\rho) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். ஆகவே, $\rho = 0$ எனும் தீர்வை (1.77)-ல் காண முடிவதில்லை. இது (1·76)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் $y = 0$ எனும் தீர்வுக்குச் சரியாகும்.

9. வகைக்கெழு பிரிக்கப்படாத சமன்பாட்டிற்கு தீர்வு உள்ளமையையும், தனித்தன்மையும் கூறும் தேற்றம், தனித்தீர்வுகள்.

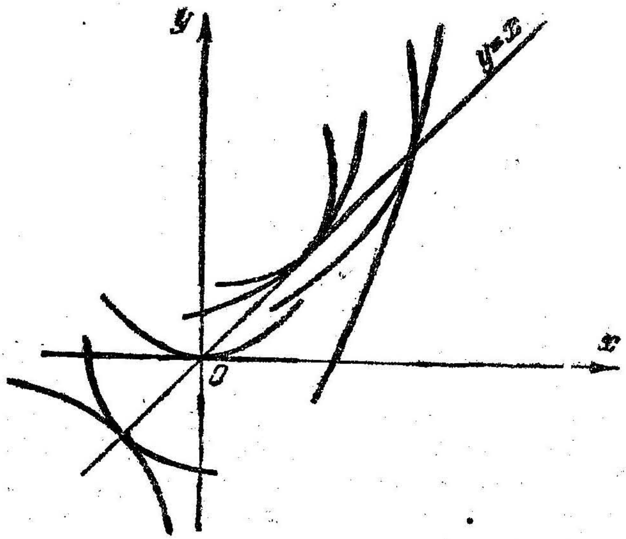
[The Existence and Uniqueness Theorems for Differential Equations not solved for the derivative Singular Solutions.]

ஆறுவது பிரிவில் (Sec. 6) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $y(x_0) = y_0$ எனும்போது, $y(x)$ எனும் தீர்வின் உள்ளமை தனித்தன்மை பற்றிய தேற்றத்தை நிறுவினோம். இதேபோன்ற வினா $F(x, y, y') = 0$ எனும் சமன்பாடுகளுக்கும் எழுகிறது

இத்தகைய சமன்பாடுகளுக்கு (x_0, y_0) எனும் புள்ளிவழி, ஒரு வரையல்ல. ஆனால், பலவரைகள் செல்லுகின்றன என்பது எளிதில் புலனாகும். ஏனெனில், $F(x, y, y') = 0$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து y'-இன் மூலம் காணும்போது, (ஒன்றல்ல) பல மெய்யெண் மதிப்புக்கள் — $y' = f_i\ (x, y)$ என்பன — காண இயலும். 6-ம் பிரிவில் கூறப்பட்ட நியதிகள்யாவும் $y' = f_i\ (x\ y)$ எனும் மதிப்புகளுக்குப் பொருந்தினால் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு தனித் தீர்வு $y\ (x_0) = y_0$ என்பதற்குட்பட்டு காணப்படும். ஆகவே $F(x, y, y')$ எனும் சமன்பாட்டிற்குள்ள தீர்வின் தனித் தன்மை எனப்படுவது (x_0, y_0) எனும் புள்ளிவழி ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் ஒரே ஒரு வரை உள்ளது எனக் காட்டுவதாகும் எனப் பொருளுடையது.

உதாரணமாக, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$ எனும் சமன்பாடு எல்லா இடத்தும் தீர்வு தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகும். ஏனெனில், (x_0, y_0) என்ற புள்ளிவழி இரண்டு வரைகள், வெவ்வேறு திசைகளில் உள்ளன. ஆம்,

$$\text{இங்கு } \frac{dx}{dy} = \pm 1 \quad y = x + c, \quad y = -x + c$$



படம் 1-29.

$(y')^2 - (x + y)\, y' + xy = 0$ எனும் சமன்பாட்டை 73-ம் பக்கத்தில் பார்த்தோம். இங்கு $y = x$ எனும் நேர்கோட்டுப்

புள்ளிகளில் தனித்தன்மை புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன. ஏனெனில், $y' = x$, $y' = y$ எனும் வரைகள் ஒரே திசையில் செல்லுகின்றன. (படம் 1·29) 87ஆம் பக்கம் பார்க்க.

தேற்றம் 1·5 (h_0 என்பது போதிய அளவுக்குச் சிறிதாக இருக்க) $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$) என்ற இடைவெளியில் $F(x, y, y') = 0$ எனும் (1·78) சமன்பாட்டிற்கு $y = y(x)$, $y(x_0) = (y_0)$, $y'(x_0) = y'_0$ எனும்படி, ஒரு தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வு இருக்க, (இங்கு y' என்பது $F(x_0\, y_0\, y') = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும்). $(x_0\, y_0\, y'_0)$ எனும் புள்ளிக்கு அண்மையில் $F(x, y, y')$ கீழ்வரும் நியதிகட்கு உட்பட்டதாக வேண்டும்.

(1) எல்லா மாறிகளிலும் $F(x, y, y')$ தொடர்ச்சியுடையதாதல்,

(2) வகைக்கெழு $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ இருக்கவேண்டும், பூச்சியமல்லாததாக வேண்டும்.

(3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| < N_1$ எனும்படி அளவில்மட்டும் $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ எனும் ஒரு வகைக்கெழு எல்லைக்குட்பட்டதாகவேண்டும்.

நிரூபணம் : உள்ளுறுமாறிச் சார்பயனு (implicit function) க்கேற்ற யாவரும் அறிந்த ஓர் உள்ளமைத் தேற்றத்தின்படி நியமங்கள் (1)-ம் (2)-ம் $y' = f(x_0, y_0)$ எனும்படியும் (1·78)-ல் உள்ள சமன்பாடுக்கேற்றதாயும் (x_0, y_0) எனும் புள்ளிக்கு அண்மையில் $y' = f(x, y)$ எனும் ஒரு தனித்தன்மை வாய்ந்த சார்பலன் உள்ளது என்பது உறுதியாகிறது. இனிமேல் நிறுவ வேண்டியது யாதெனில் லீப்சிச் நியமத்திற்கு ஏற்றதோ அல்லது அத்தனைத் திருத்தமற்ற $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| < N$—$(x_0, y_0)$ எனும் புள்ளிக்கு அண்மையில் — எனும் நியதியை அனுசரித்ததோ ஆக $f(x, y)$ இருக்கும் என்பதாகும். அவ்வாறெனில் (1·79) $y' = f(x, y)$ என்பது தனித்தன்மை உள்ளமைத் தேற்றத்திற்குப் பொருத்தமாக இருக்குமென்றும் (பக்கம் 46, பிரிவு 6 பார்க்கவும்) ஆகவே, (1·79)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்கு $y(x_0) = y_0$ எனும்படித் தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வு உள்ளதெனவும், (1·78) எனும் சமன்பாட்டிற்குத் தன்மையுடைய தீர்வுவரை (x_0, y_0) எனும் புள்ளிவழிச் செல்வதாகவும் y_0' எனும் சரிவுடையதாகவும் உள்ள தீர்வு உளதெனவும் ஆகிறது. யாவரும் அறிந்த உள்ளுறுமாறிச்

சார்பலன் தேற்றம் ஒன்றின்படி, நியதிகள் (1), (2), (3), பொருந்துமானால், $\frac{\partial f}{\partial x}$ எனும் வகைக்கெழு உள்ளதெனவும், உள்ளுறு சார்பலனின் வகைக்கெழு காண விதிப்படி அதைக் கணக்கிட முடியும் எனவும் உறுதி கூற முடியும்.

$F(x, y, y') = 0$ எனும் முற்றொருமையின் வகைக்கெழு கண்டு, $y' = f(x, y)$ என்பதைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது.

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

நியதிகள் (2), (3) என்பதால் $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N - (x_0\ y_0)$ எனும் புள்ளிக்கண்மையில் — என்பதாம்.

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \dots \quad (1{\cdot}78)$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தொகுதியில், தனித்தன்மை புறக்கணிக்கப்படும் (x, y) எனும் புள்ளித் தொகுதி, தனிப்புள்ளி (singular point) த் தொகுதி எனம்படும்.

தனிப் புள்ளித் தொகுதியில், (1.5)-ன் தேற்றத்தின் ஏதேனும் ஒரு நியமமாவது புறக்கணிக்கப்பட (violated) வேண்டும், பயன்படு தேற்றங்களில் வரும் சமன்பாடுகளில் (1). (3) நியதிகள் சாதாரணமாகப் பொருந்தும். ஆனால், அனேக இடங்களில் இரண்டாவது நியதியாகிய $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ என்பது புறக்கணிக்கப்படும்.

(1), (3)-வது நியதிகள் பொருந்தியிருந்தால், தனிப் புள்ளித் தொகுதிப் புள்ளிகளில் $F(x, y. y') = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (1.80)$ என ஒருங்கே அமைய வேண்டும்.

y' இவற்றினின்று நீக்கக் கிடைக்கும் சமன்பாடு $\phi(x,y) = 0$.
... (1.81)

தனி புள்ளித் தொகுதியில் உள்ள புள்ளிகளில் சரியாக வேண்டும். இருந்தாலும் (1·78)-ன் தீர்வின் தனித்தன்மை,

(1.81)-க்கு ஏற்ற ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இருக்கவேண்டு மென்பதில்லை. ஏனெனில். (1.5)-ன் தேற்றத்திற்குள்ள நியதிகள் போதுமானவையே அன்றி தேவையானவையல்ல. ஆகவே, இந்தத் தேற்றத்தின் நியதிகள் புறக்கணிக்கப்பட்டன என்பது, தனித்தன்மை புறக்கணிக்கப்பட்டதெனப் பொருளல்ல.

ஆகவே, p தன்மை காட்டி (P-discriminant) எனப்படும் வரைகளில் உள்ள புள்ளிகளில் மட்டுமே [ஏனெனில் சமன்பாடு (1.80) என்பது $F(x, y, p) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ எனப் பெரும்பாலும் எழுதப்படுவதால்] தனிப் புள்ளித் தொகுதி அமையும்.

$\phi(x, y) = 0$ எனும் வரையின் ஏதேனும் ஒரு கிளை $y=\phi(x)$ இத்தகைய தனிப் புள்ளித் தொகுதியையுடையதானால், அத்துடன் தீர்வு வரையுமானால் அது தனித்தீர்வுவரை (singular integral curve) எனப்படும். அத்துடன் $y = \phi(x)$ என்பது தனித் தீர்வு எனப்படும்.

இவ்வாறு $F(x, y, y') = 0$ ... (1·78)

எனும் சமன்பாட்டின் தனித் தீர்வு காண அதன் p தன்மை காட்டியைக் காணவேண்டும். அதைத்தரும் சமன்பாடுகள் $F(x, y, p) = 0, \frac{\partial K}{\partial P} = 0$. பிறகு [1.78-ல் நேரடியாகப் பிரதியிட்டு] p தன்மை காட்டி வரையில் உள்ள பல கிளைகளில், தனித் தீர்வு வரை காணவேண்டும், அவ்வாறு உளதாயின், அந்தப் புள்ளிகளில் தீர்வின் தனித்தன்மை புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளதா என்பதை ஆராயவேண்டும். அவ்வாறு p தனித்தன்மை காட்டி வரையின் ஒரு கிளையில் தனித்தன்மை புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளதாயின் அது தனித் தீர்வு வரையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$y = 2xy' - (y')^2$ எனும் லாக்ராஞ்சின் சமன்பாட்டிற்கு தனித் தீர்வு உள்ளதா?

உள்ளமை, தனித்தன்மை தேற்றத்தின் (1), (3)-வது நியதிகள் இங்கு பொருந்தும். p தன்மைகாட்டி வரையைத்தரும் சமன்பாடுகள்

$$y = 2xp - p^2$$

$2x - 2p = 0$ இவற்றினின்று p-ஐ நீக்க வருவது $y = x^2$ இந்தப் பரவளையம் தீர்வுவரையல்ல. ஏனெனில் $y = x^2$ முதற்

சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமானதல்ல. ஆகவே தனித் தீர்வு இந்தச் சமன்பாட்டுற்கு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு (iii)

$$x-y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3 \text{ எனும்} \qquad (1\cdot 82)$$

லாக்ராஞ்சு சமன்பாட்டின் தனித்தீர்வு காண்க. உள்ளமை, தனித் தன்மைத் தேற்றத்தின் நியதிகள் (1), (3) இங்கு பொருந்துகின்றன. ρ தன்மைகாட்டி, வரையைத் தரும் சமன்பாடுகள்.

$$x-y = \frac{4}{9}\rho^2 - \frac{8}{27}\rho^3, \frac{8}{9}(\rho-\rho^2) = 0.$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து $\rho = 0$ அல்லது முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$y = x \text{ அல்லது } y = x - \frac{4}{27}$$

இவற்றுள் இரண்டாவது மட்டுமே, எடுத்துக்கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

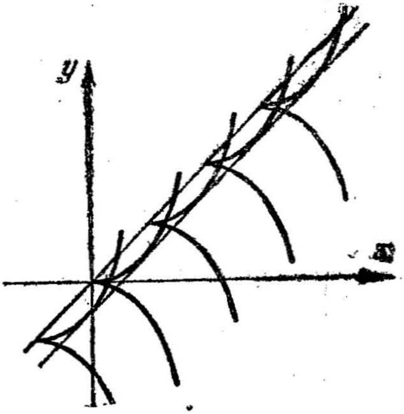
$$y = x - \frac{4}{27} \text{ என்பது தனித்தீர்வா எனக்காண,}$$

(1·82)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் நுண்தொகை காணவும், தீர்வு வரைகள் $y = x - \frac{4}{27}$ எனும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் வழி இக்கோட்டின் திசையில் செல்லுகின்றனவா எனவும் காண வேண்டும்.

லாக்ராஞ்சு சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண வருவது,

$$(y-c)^2 = (x-c)^3 \qquad (1\cdot 83)$$

(1·83)-லிருந்துபடம் (1·30) லிருந்தும் $y = x - \frac{4}{27}$ எனும் நேர்கோடு இந்த அரைக் கனப் பரவளையங்களின் (semi cubical parabolas) தழுவுவரை எனக் காணலாம். ஆகவே, தனித்தன்மை நியதிகள் இந்தக் கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன.



படம் 1–30

ஒரே திசையில் இரண்டு தீர்வு வரைகள் உள்ளன. அவை $x = y - \frac{4}{27}$ என்பதுவும், இந்தக் கோட்டை

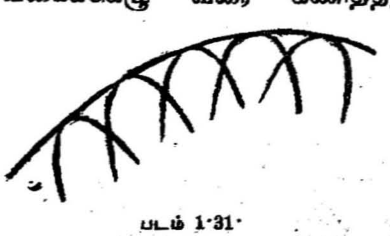
அந்தப் புள்ளியில் தொடும் அரைக்கன (semicubical) பரவளையமும் ஆகும். தீர்வு வரையின் தழுவு வரை இங்கு தனித்தீர்வு ஆகும்.

$$\phi(x, y, c) = 0 \tag{1·84}$$

எனும் சமன்பாடு தரும் வரைகளின் (c-யின் பல்வேறு மதிப்புக் களுக்கு) தழுவு வரை, $\phi(x, y, c) = 0$ எனும் வரைகளின் ஏதேனும் ஒரு வரையைத் தொடுவதாக ஆனால், அவற்றின் ஒவ்வொரு துண்டும் இந்தக் குடும்பத்தின் கணக்கற்ற வரை களுக்குத் தொடு வரையானால் அப்போது $F(x, y, y') = 0$ என்பது தனித்தீர்வு வரையாகும்.

உண்மையாகவே, தழுவு வரையின் x, y, y' என்பவை, அதற்குத் தொடுவரையாக அமைந்துள்ள தீர்வு வரையின் x, y, y' மதிப்புகளுடன் பொருந்தும். ஆகவே, தழுவு வரையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் x, y, y' எனும் மதிப்புக்கள் $F(x, y, y')=0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கிணங்கியனவாக, அமையும். (படம் 1·31 பார்க்கவும்) தழுவு வரையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தனித் தன்மை புறக்கணிக்கப்படுகின்றது. ஏனெனில் ஒரே திசையில் ஒரு புள்ளியில் குறைந்தது இரண்டு வரைகளாவது செல்கின்றன. அவை தழுவு வரையும், (1·84)-ல் தரப்படும் அதற்குத் தொடு வரையாக அமையும் தீர்வு வரையும், இதன் பலன், தழுவு வரை தனித் தீர்வு வரை என ஆகிறது.

$F(x, y, y') = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு வரைத்தொகுதி $\phi(x, y, c) = 0$ என்பது காணப்பட்டால், அதன் தழுவு வரையைக் கண்டு, அதன் தனித்தீர்வைக் காண முடியும். வகைக்கெழு வரை கணிதத்திலிருந்து அல்லது கணிதப் பகுப்பாய்விலிருந்து, நமக்குத் தெரிவது,



படம் 1·31

$$\phi(x, y, c) = 0, \frac{\partial \phi}{\partial c} = 0$$

எனும் சமன்பாடு தரும் c தன்மை காட்டியில், தழுவு வரையும் உள்ளது. ஆனால், c தன்மைகாட்டி வரையில் தழுவு வரையன்றிப் பிறவரைகளும் உள்ளன.

உதாரணமாக, $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ தரும் தீர்வு வகைத் தொகுதியில் உள்ள முடிச்சுப் புள்ளிகளும் (multiple points)

உள்ளன. c தன்மை காட்டி வரையின் ஒரு கிளைத்திட்டமாகத் தழுவுவரையாயிருக்கக் கீழ்வருவன போதுமானது.

(1) அளவில் மட்டும் எல்லைக்குட்பட்ட பகுதி வகைக்கெழு இருக்கவேண்டும்.

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| < N_1 \quad \left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right| < N_2$$

$$(2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$$

இவை போதுமானவை என்பது கவனிக்கத்தக்கது. ஆகவே, இந்த நியதிகள் புறக்கணிக்கப்பட்டாலும் தழுவுவரைகள் இருக்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு வரைத்தொகுதி, $(y-c)^2 = (x-c)^{3}$ [பக்கம் 84, எடுத்துக்காட்டு 2 பார்க்கவும்] இதன் தனித் தீர்வு காணவும்.

c-தன்மைகாட்டி வரை காணவும்.

$(y-c)^2 = (x-c)^3, \quad 2(y-c) = 3(x-c)^2$ துணை அலகு c-ஐ நீக்கக் கிடைப்பது,

$$y = x, \; x - y - \frac{4}{27} = 0$$

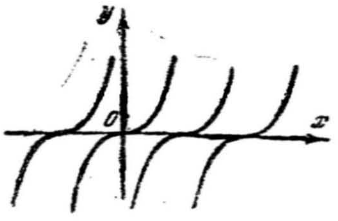
நேர்க்கோடு $y = x - \dfrac{4}{27}$ என்பது தழுவுவரை, ஏனெனில் தழுவுவரைத் தேற்றத்தின் எல்லா நியதிகளும் பொருந்துகிறது. சார்பலன் $y = x$, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தாது. $y = x$ என்பது பிறை நியமவரை (cusplocus) [படம் 1·30]. தழுவுவரைத் தேற்றத்தின் இரண்டாவது நியதி இந்தக் கோட்டின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் புறக்கணிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4

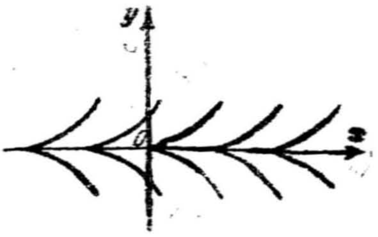
$$y^{\frac{1}{5}} - x + c = 0 \qquad \ldots \; (1.85)$$

எனும் தீர்வு வரைத்தொகுதி, ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கெனத் தரப்பட்டுள்ளது. என்றால், இந்தச் சமன்பாட்டின் தனித் தீர்வு காணவும்.

வேண்டியவரைத் தொகுதியின் தழுவுவரை காண்பது இங்கு நாம் செய்யவேண்டியது. நேரடியாக மேற்கூறிய முறையைப் பின்பற்றினால் கிடைப்பது முரணான சமன்பாடு $1 = 0$ என்பதாம்.



படம் 1·32.



படம் 1·33.

இதிலிருந்து (1.85)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுக்குத் தழுவுவரை இல்லை என முடிவுக்கு வருவது இயற்கையே. இருந்தாலும் (1.85)-ன் இடப் பக்கத்தின் y-ஐச் சார்ந்த சார்பலன் $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{5} y^{-\frac{4}{5}}$. இது $y=0$ கணக்கிலடங்காததாகிறது. ஆகவே $y = 0$. ஆகவே, $y = 0$ என்பது (1.85)-ன் வரைகளுக்குத் தழுவு வரையாக இருக்க வாய்ப்பு இருக்கிறது- இது $y = 0$ எனும் கோட்டில் நியதிகள் புறக்கணிக்கப்படுவதால் நேரடி முறையில் தெளிவாகாது.

தழுவுவரைத் தேற்றத்தின் நியதிகள் பொருந்தும்படி சமன்பாட்டை மாற்ற வேண்டும். மாறின சமன்பாடு முதல் சமன்பாட்டிற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். உதாரணமாக (1.85)ன் சமன்பாட்டை $y - (x - c)^5 = 0$ என எழுதலாம். இப்போது தழுவு வரைத்தேற்றத்தின் நியதிகள் பொருந்துகின்றன. பொது முறையைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$y = (x - c)^5 \; ; \; 5\,(x - c)^4 = 0$$

c-ஐ நீக்க $y = 0$ (படம் 1.32)

எடுத்துக்காட்டு 5

$$y^2 - (x - c)^3 = 0 \qquad \dots \quad (1.86)$$

ஏதேனும் ஒருவகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு தரப்பட்டால் அதன் தனித் தீர்வைக் காணவும்.

இதன் c தன்மைகாட்டி

$$y^2 - (x - c)^3 = 0 \quad x - c = 0$$

c-ஐ நீக்க $y=0$. $y=0$ எனும் நேர்கோட்டில் $\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}=0$. ஆகவே, $y=0$ என்பது (1·86)-ல் உள்ளவரைத் தொகுதியின் முடிச்சுப் புள்ளிகளின் நியமப் பாதையாகும். இங்கு அது பிறைப்புள்ளிப் பாதையாகும். (cusp) ஆனால் இந்த இடத்தில் இது தழுவுவரையாகவும் அமைகிறது. படம் 1·83, அரைக்கன வர வளையங்களையும் (1·86) அவற்றின் தழுவுவரை $y=0$-ஐயும் காட்டுகிறது.

அத்தியாயம் 1-ன் கணக்குகள்

1. $\tan y\, dx - \cot x\, dy = 0$
2. $(12x + 5y - 9)\, dx + (5x + 2y - 3)\, dy = 0$
3. $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $x\frac{dy}{dx} + y = x^6$
5. $y\, dx - x\, dy = x^2\, y dy$
6. $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$
7. $y \sin x + y' \cos x = 1$
8. $y' = e^{x-y}$
9. $\frac{dx}{dt} = x + \sin t$
10. $x(\ln x - \ln y)\, dy - y\, dx = 0$
11. $xy(y')^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$
12. $(y')^2 = 9y^4$
13. $\frac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$
14. $x^2 + (y')^2 = 1$
15. $y = xy' + \frac{1}{y'}$
16. $x = (y')^3 - y' + 2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^3}$

18. $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$

19. $xy = c$ எனும் வரைத் தொகுதிக்குள்ள குத்துவரைத் தொகுதி (Orthogonal trajectories) யைக் காண்க.

20. தொடுகோட்டுக்குக் கீழ் நீளம், (Subtangent) புள்ளியின் x உறுப்பு போன்று இரு மடங்காக இருக்கும் வரைகளின் சமன்பாடு காண்க.

21. y அச்சில் தொடுகோட்டால் வெட்டப்படும் துண்டு, தொடும் புள்ளியின் x உறுப்புக்குச் சமமாக இருக்கும் வரைகளின் சமன்பாடு காண்.

22. $x^2 + y^2 = 2\,ax$ எனும் வரைத் தொகுதியின் குத்து வரைத் தொகுதியைக் காண்க.

23. ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை குறையும் வேகம், அதன் வெப்ப நிலைக்கும், காற்றின் வெப்பநிலைக்குமுள்ள வேறுபாட்டுடன் நேர்விகிதத்தில் உள்ளதெனக் கொண்டு கீழ் வரும் கணக்கின் தீர்வு காண்க. காற்றின் வெப்பநிலை 20°C, பொருள் 100°C-யிலிருந்து 60°C-க்கு 20 நிமிடங்களில் குறைகிறது. அது 30°C-க்கு குறைய ஆகும் காலம் என்ன ?

24. ஒரு விசைப்படகு அமைதியான நீரில் மணிக்கு 10 கி.மீ வேகத்தில் போகும். விசை நிறுத்தப்படுகிறது. $t = 20$ வினாடியில், வேகம் $v_1 = 6$ கி.மீ/மணிக்குக் குறைகிறது விசை நின்று 2 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு படகின் வேகம் என்ன ? (நீரின் தடைவிசை படகின் வேகத்துடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளதெனக் கொள்க.)

25. ஒரு புள்ளியிலிருந்து புறப்படும் எல்லா ஒளிக்கதிர்கள் ஓர் ஆடியில் விழ, மீள்கதிர்கள் ஒரே திசையிலிருந்தால் ஆடியின் வடிவம் என்ன என்பதை நிச்சயிக்கவும்.

26. $y'^2 + y^2 = 4$

27. ஒரு வரையில் ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டின் அச்சுக்கள் அடங்கிய துண்டு, அந்தப் புள்ளியால் சமமாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. வரையின் சமன்பாடு என்ன ?

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x - 4}{2x - y + 5}$

29. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{1+x} + y^2 = 0.$

30. எண் மதிப்பில் தீர்வு காண்.

$\dfrac{dy}{dx} = x + y^2$, $y(0) = 0$ என்ருல்,

$y(0{\cdot}5)$-ன் மதிப்பை ·01 திருத்தத்திற்குக் காண்க

31. $\dfrac{dy}{dx} = xy^3 + x^2 \quad y(0) = 0$ என்ருல்,

$y(0{\cdot}6)$-ன் மதிப்பை ·01 திருத்தத்திற்குக் காண்க.

32. $y' = 1{\cdot}31 \quad x - 0{\cdot}2\,y^2 \quad y(o) = 2, \quad h = 0{\cdot}02$ இடைவெளியில் y-க்கு 15 மதிப்புக்களைப் பட்டியலில் காண்க.

33. $y = 2xy' - y'^2$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \cos\,(x - y)$

35. சமச்சரிவு முறையைப் (பக்கம் 21 காண்க) பயன்படுத்தி, $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2$-இன் தீர்வு வரையை படத்தில் காட்டுக.

36. $(2x + 2y - 1)\,dx + (x + y - 2)\,dy = 0.$

37. $y'^2 - y'e^{2x} = 0.$

38. $y^2 + 2\,ax = a^2$ எனும் பரவளையங்களின் குத்து வரைகளைக் காண்க.

39. $y = 5\,xy' - (y')^2$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குத் தனித் தீர்வு உண்டா?

40. திருத்த முறையில் (approximate method) விடை காண், $\dfrac{dy}{dx} = x - y^2$, $y(1) = 0$. அடுத்தடுத்துத் திருத்தம் காண் முறையைப் பயன்படுத்தவும், y_1, y_2 காணவும்.

41. $y = x^2 + \displaystyle\int_1^x \frac{y}{x}\,dx$

42. $y' = \sqrt[3]{x - 5y} + 2$ எனும் சமன்பாட்டிற்குத் தனித்தீர்வு உண்டா ?

43. $(x - y)\, y\, dx - x^2\, dy = 0.$

44. $y^2 = cx^3$ எனும் வரைத் தொகுதியின் குத்துவரைத் தொகுதியைக் காண்க,

45. $\dot{x} + 5x = 10t + 2,\ t = 1,\ x = 2$ எனும் மதிப்புக்களுக்குத் தீர்வு காண்க.

46. $t = 2,\ x = 4$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^3}$-ன் தீர்வு காண்க.

47. $x = 2,\ y = -1$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு $y = xy' + y^2$ன் தீர்வுக் காண்க.

48. $x = 1\ \ y = -1$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு $y = xy' + y'^2$ன் தீர்வுக் காண்க.

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$

50. $\dot{x} - x \cot t = 4 \sin t$

51. $y = x^2 + 2y'x + \dfrac{y'^2}{2}$

52. $y' - \dfrac{3y}{x} + x^3 y^3 = 0$

53. $y(1 + y'^2) = a$

54. $(x^3 - y)\, dx + (x^2 y^2 + x)\, dy = 0$

55. $\mu = \mu\,(x^2 + y^2)$ எனும் வடிவில் உள்ள கீழ்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் நுண்தொகைகாண் குணகம் காண்க. $(3y^2 - x)\, dx + 2y\,(y^2 - 3x)\, dy = 0$

56. $(x - y)y\,dx - x^2 dy = 0$

57. $y' = \dfrac{x + y - 3}{1 - x + y}$

58. $xy' - y^2 \ln x + y = 0.$

59. $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0.$

60. $(4y + 2x + 3)y' - 2y - x = 0.$

61. $(y^2 - x)y' - y + x^2 = 0.$

62. $(y^2 - x)y' + 2xy = 0.$

63. $3xy^2y' + y^3 - 2x = 0.$

64. $(y')^2 + (x + a)y' - y = 0$ (a மாறிலி)

65. $(y')^2 - 2xy' + y = 0.$

66. $(y')^2 + 2yy' \cot x - y^2 = 0.$

2. இரண்டாம் படியும் அதற்கும் மேற்பட்ட படியுடை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

1. nth படி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உள்ளமைத் தனித்தன்மைத் தேற்றம்

nthபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் உருவம்

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-1)}) \qquad \ldots \quad 2\cdot1$$

அல்லது மிக உயர்ந்த படியில் நேரடியாகக் கூற இயலாததாயின்

$$F(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n)}) = 0.$$

இதற்கு உள்ளமை, தனித்தன்மைத் தேற்றம் நிறுவ ஏற்கனவே, இவ்வாறு நிறுவப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு (பக்கம் 56 பார்க்கவும்) இதனைக் கொண்டு வந்து நிறுவ வேண்டும்.

சமன்பாடு $y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots\ldots\ldots y^{(n-1)})$ எனும் சமன்பாட்டை $y' = y_1$, $y'' = y_2$ $y^{(n-1)} = y_{n-1}$ எனும் அறியா மாறிகளின் சார்பலன்களாகக் கொண்டு (y-ல் மட்டுமல்ல), (2·1)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாகக் கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைக் கொள்ளவும்.

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_1, \\ y'_1 &= y_2, \\ y'_2 &= y_3 \\ &\ldots \\ y'_{n-2} &= y_{n-1} \\ y'_{n-1} &= f(x, y, y_1\, y_2 \ldots\ldots y_{n-1}) \end{aligned}\right\} \quad 2\cdot2$$

இப்போது இந்தச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு உள்ளமை தனித்தன்மைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம். (பக்கம் 56 பார்க்கவும்) அதன்படி (2·2)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளின் வலது

பக்கங்கள், கோரிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையன வாகவும், x ஐத் தவிர எல்லா மாறிகள் சம்பந்தப்பட்டவரை லீப்சிஸ் நியதியை அனுசரிக்கின்றனவாகவும் இருந்தால் (2·2)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளுக்கு $y(x_0) = y_0$, $y_1(x_0) = y_{10}$ ... $y_{n-1}(x_0) = y_{n-1, 0}$ எனும்படித் தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வு உள்ளது. (2·2)-ல் உள்ள முதல் $(n-1)$ சமன்பாடுகளின் வலப் பக்கங்கள் தொடர்ச்சியுடையனவாகவும், லீப்சிஸ் நியதியை அனுசரிக்கின்றனவாகவும் உள்ளது. அதுமட்டுமல்ல, y, y_1 ... y_2 ... y_{n-1} என்ற மாறிகளில் அத்தனை திருத்தமற்ற நியதியாகிய எல்லையுடை வகைக்கெழுவுடையனவாகவும் உள்ளன. ஆகவே கடைசிச் சமன்பாடு $y'_{n-1} = f(x, y, \ldots y_{n-1})$ ன் வலப்பக்கம் கோரிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாகவும் லீப்சிஸ் நியதியை எல்லா மாறிகளிலும் அனுசரித்ததாகவும் இருந்தால், அல்லது அத்தனை திருத்தமற்ற. இரண்டாவதிலிருந்து மேற் பட்ட பகுதி வகைக்கெழுக்கள் எல்லையுடையனவாக, எல்லா மாறிகளிலும்—இருந்தால் உள்ள தனித்தன்மை நியதிகள் அனு சரிக்கப்பட்டதாகும்.

ஆகவே, முந்திய மாறிகள் x, y-க்குத் திரும்பக் கீழ்வரும் உள்ளமை, தனித்தன்மைத் தேற்றம் வருகிறது.

தேற்றம் 2·1 $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$ ... $y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ என இருந்து $(x_0\, y_0\, y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களுக்கு அண்மையில் சார்பலன் $(y^{(n)} = f(x, y, \ldots y^{(n-1)})$ எல்லா மாறிகளிலும் தொடர்ச்சியுடையனவாகவும் இரண்டாவது மாறியிலிருந்து எல்லா மாறிகளிலும் லீப்சிச் நியதிக் குட்பட்டதாகவும் இருந்தால் non வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $y^{(n)} = f(x, y, y', y''\, y^{(r+1)})$ தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வு உடைய தாக இருக்கும்.

பிந்திய நியதிக்குப் பதில் அத்தனைத் திருத்தமல்லாத நியதி —அதாவது இரண்டாவது மாறியிலிருந்து எல்லா மாறிகளிலும் எல்லையுறு பகுதி வகைக்கெழு உடையது என்பதைக் கொள்ளலாம்.

nth படி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு எல்லா பகுதித் தீர்வுகளும் கொண்ட தீர்வுத் தொகுதியாகும்.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \ldots\ldots y^{(n-1)}) \quad \ldots \quad (2\cdot1)$$

வலப்பக்கம் மாறிகளில் சில இடைவெளிகளில், உள்ளமை தனித் தன்மைத் தேற்றத்தின் நியதிகளை அனுசரித்தால், பொதுத் தீர்வு

n அலகுகளைச் சார்ந்திருக்கிறது. அவை, சார்பலனின் துவக்க மதிப்பும், அதன் வகைக்கெழுக்கள் ஆகிய $y_0\ y'_0\ y''_0\ y''', \ldots y_0^{(n-1)}$ இவற்றைச் சார்ந்திருக்கும். குறிப்பாக, இரண்டாம் படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $y'' = f(x, y, y')$ இரண்டு துணை அலகுகளைச் சார்ந்து நிற்கும், y_0, y'_0 என்பனவாம். இப்போது $y_0\ y'_0$ என்பனவற்றை நிலையாக்கி, அதாவது $(x_0\ y_0)$ எனும் புள்ளியும், அதன் வழியுள்ள தீர்வுக்கு வரையுள்ள தொடுகோட்டின் திசையும் தரப்பட்டால், உள்ளமை தனித்தன்மை நியதிகள் அனுசரிக்கப்பட்டால் தனித்தன்மை வாய்ந்த திட்டமான ஒரே ஒரு தீர்வு நிச்சயிக்கப்படும்.

உதாரணமாக, திணிவுள்ள ஒரு துகள் $f(t.x\ \dot{x})$ எனும் விசை செயல்பட நேர்கோட்டில் இயங்குமானால் $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ என்பது இயக்கச் சமன்பாடாகும், துவக்க நிலை $x\ (to) = xo$, துவக்க வேகம் $\dot{x}\ (t_0) = x_0$ தரப்பட்டால் திட்டமான தீர்வு காணப்படும், அதாவது இயக்க விதி $x = x(t)$ என்பது இங்கு $f(t\ x\ \dot{x})$ தனித்தன்மை உள்ளமைத் தேற்ற நியதிக்குட்பட்டது என்பதைக் கூருமலே கொள்கிறோம்.

(பக்கம் 58-ல் கண்ட) துவக்க மதிப்பையும் துணை அலகுகளையும் தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்கும் தேற்றம், நிறுவதல் முறையை மாற்ருமலேயே, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கும், அதனுல் n th வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கும் புகுத்தலாம்.

2. படி குறைக்கப்படும் மிக எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் (The Most Elementary cases of Reducing the Order)

சில கணக்குகளில் சமன்பாட்டின் படியைக் குறைக்க இயலும். இதனுல் தீர்வு காண்பது எளிதாகும், அடிக்கடி காணப்படும் இவ்வகைக் கணக்குகளைக் கீழே தருகிறோம்.

1. வேண்டிய சார்பலனும் அதன் (R-1) படி வரை உள்ள வகைக்கெழுக்களும் தோன்ருத சமன்பாடுகள்.

$$F(x,\ y^{(k)}\ y^{(k-1)}\ y^{(n)} = 0 \qquad 23$$

இங்கு $y^{(k)} = p$ எனப் பிரதியிட சமன்பாட்டின்படி $(n-k)$க்குக் குறையும்,

இவ்வாறு மாறி மாற்றம் செய்த பின்னர் சமன்பாடு (23) $F\ (x,\ p,\ p'\ \ldots\ p^{(n-k)} = 0$ என மாறும், இதிலிருந்து

$p = p(x, c, c_2 \ldots c_{n-k})$ எனத் தீர்வு காணலாம். y-ஐக் காண $y^{(k)} = p(x, c, \ldots_{(n-k)})$ என்பதை k மடங்கு நுண் தொகைகாண வேண்டும். குறிப்பாக இருபடிச் சமன்பாட்டில் y இல்லை எனில் $y' = p$ எனப் பிரதியிட முதற்படிச் சமன்பாடு வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

இங்கு $\frac{d^4y}{dx^4} = p$ ஆகுக. அப்போது $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 0$ மாறிகளைப் பிரித்து நுண்தொகை காண வருவது $\ln|p| = \ln|x| + \ln c$ அல்லது $p = cx\ \frac{d^4y}{dx^4} = cx$. ஆகவே,

$$y = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

துவக்க வேகம் பூச்சியமாகக் கீழே காற்றில் விழும் துகளின் இயக்க விதியைக் காண்க. காற்றின் தடை விசை வேகத்தின் வர்க்கத்துடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளது.

இயக்கச் சமன்பாடு

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ ஆகும்.}$$

s' என்பது கீழ் விழுந்த தூரம், m துகளின் திண்வு; t சென்ற கால அளவு.

$$t = 0 \text{ எனின் } s = 0, \frac{ds}{dt} = 0.$$

சமன்பாட்டில் வெளிப்படையாகத் தனியாக s காணப்படுவதில்லை. $\frac{ds}{dt} = v$ என இடச் சமன்பாட்டின்படி குறையும். அப்போது இயக்கச் சமன்பாடு $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ ஆகிறது.

மாறிகளைப் பிரித்து நுண்தொகைக் காண அடைவது,

$$\frac{mdv}{mg - kv^2} = dt;\ t = m\int_0^v \frac{dv}{mg - kv^2} = \frac{1}{k\sqrt{g}} = \tan h^{-1}\frac{kv}{\sqrt{g}}$$

ஆகவே, $v = \frac{\sqrt{g}}{k}\tan h(k\sqrt{g}t)$

dt-ஆல் பெருக்கி நுண்தொகை காண,

$$s = \frac{1}{k^2} \ln \cosh (k\sqrt{gt})$$

2. சாராமாறி (independent Variable) இல்லாத சமன்பாடுகள் :

$$F(y, y' y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

இதன் படியை ஒன்று குறைக்க முடியும் ; அதற்கு $y' = p$ எனப் பிரதியிடவும், p-ஐக் காணவேண்டிய சார்பலனாகக் கொள்ளவும். $p = p(y)$ என்றால், $\frac{d^k y}{dx^k}$ எனும் எல்லா வகைக் கெழுக்களையும் புதிய சார்பலனின் y-ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழுக் களாகக் கூறவேண்டும்.

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} p\right)\frac{dv}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2} p^2 t \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

இன்னும் இது போன்று இன்று உயர்ந்தபடி வகைக்கெழுக்களுக்கும் $\frac{d^k y}{dx^k}$ எனும் வகைக்கெழுவை $(k - 1)$ படிக்கு மேற்படாத y-ஐச் சார்ந்த p-ன் வகைக்கெழுவாகக் கூற முடியும் என்பது எளிதில் புலனாகிறது. ஆகவே, படியின் தரத்தில ஒன்று குறை வதையும் காண்கிறோம். குறிப்பாக இரண்டாம்படி வகைக் கெழுவில் சாராமாறி இல்லை எனின் அந்த வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டை முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக மாற்ற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$\frac{dy}{dx} = p$ எனப் பிரதியிட $\frac{d^2y}{dx^2} ; = p \frac{dp}{dy}$ $yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$

மாறிகளைப் பிரித்துத் தீர்வுக்காண $p = c_1 y$; $\frac{dy}{dx} = c_1 y$ மீண்டும் மாறிகளைப் பிரித்து நுண் தொகை காண $\ln|y| = c_1 x + \ln c_2$ அல்லது $y = c_2 e^{c_1 x}$.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தனியூசலிச் சமன்பாடாகிய $\ddot{x} + a^2 \sin x = 0$ என்பதன் தீர்வுகாண். துவக்க மதிப்புகள் $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = 0$.

படியின் தரத்தைக் குறைக்க,

$\dot{x} = v$ ஆகுக. $\ddot{x} = v \dfrac{dv}{dx}$

$$v dv = -a^2 \sin x dx.$$

$$\frac{v^2}{2} = a^2 (\cos x - \cos x_0)$$

$$v = \pm a \sqrt{2(\cos x - \cos x_0)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \sqrt{2(\cos x - \cos x_0)}$$

$$t = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(\cos x - \cos x_0)}}.$$

வலப்பக்கம் நுண்தொகை எளிய சார்பலன்களால் தீர்வுக்காண இயலாது. ஆனால் நீள்வட்டச் சார்பலன்களாக அதனை மாற்ற முடியும்.

3. $F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$ ... **2·4**

எனும் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம் $\phi(x, y\ y' \ldots y^{(n-1)})$ எனும் $(n-1)$th படி வகைக்கெழுச் சார்பலனின் வகையீடாக இருத்தல்.

இங்கு உடனடியாக முதல் நுண்தொகை எனப்படுவதைக் காண்கிறோம். அதாவது ஒரு ஏதேனும் நிலைஎண் கொண்ட $(n-1)$th படி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்கிறோம். இது தரப்பட்ட nth படிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒப்பாகும். ஆகவே படியின் தரம் ஒன்று குறைகிறது. (2·4)-ன் சமன்பாடு $\dfrac{d\phi}{dx}(x, y, y' \ldots y^{n-1}) = 0$ என (2·4) எழுதப்படலாம்.

(2·5)-ன் தீர்வு $y(x)$ எனின் $\phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ எனும் சார்பலன் முற்றொருமைபாகம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, $\phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ எனும் சார்பலன் ஒரு நிலை எண்ணாகும். அதாவது முதல் நுண்தொகை $\phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = c$ எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

இதனை $d(yy') = 0$ என எழுதலாம்.

ஆகவே, $yy' = c$
அல்லது $ydy = c_1 dx$

$y^2 = c_1 x + c_2$ என்பது முழுத் தீர்வு ஆகும்.

சிலசமயம் $\phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ எனும் ஒரு வகைக்கெழுச் சார்பலனை, $\mu(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ எனும் குணகத்தால் பெருக்கினல் மட்டுமே, அதன் வகையீடு $F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ ஆகும்.

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

இதனை $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ ஆல் பெருக்க நாம் அடைவது,

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0 \quad \text{அல்லது}$$

$$d\left(\frac{y'}{y}\right) = 0. \quad \text{ஆகவே,} \quad \frac{y'}{y} = c_1 \ \text{அல்லது,}$$

$$\frac{dy}{dx} \ln|y| = c_1 \ \text{ஆகவே,} \ \ln|y| = c_1 x + \ln c_2 \quad (c_2 > 0)$$

ஆகவே, $y = c_2 e^{c_1 x}$ $c_2 \neq 0$ (இந்தப் பிரிவில் எ–டு (3)-ல் இருப்பது போன்று.)

குறிப்பு : $\mu(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ எனும் குணகத்தால் பெருக்கும்போது. கணக்குக்கு ஒவ்வாத இந்தக் குணகத்தைப் பூச்சியமாக்கும், தீர்வுகள் புகுத்தப்படலாம், μ என்பது தொடர்ச்சி அறுபடுவதால் தீர்வுகளில் ஒரு பகுதி இழக்கவும் நேரிடும். எடுத்துக்காட்டு (6) ல் $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ ஆல் பெருக்குவதால் $y = 0$ எனும் தீர்வை இழக்கிறோம். ஆனல். $y = c_2 e^{c_1 x}$ என்பதில் c_2 பூச்சியமும் ஆகலாம் என்று கருதினல் இந்தத் தீர்வையும் அடைகிறோம்.

4. $(y, y', y'' \ldots y^n$ எனும் மாறிகளில் சமபடித்தாக இருக்கும் $F(x, y, y' \ldots y^n) = 0$.

$y, y' \ldots y^{(n)}$ எனும் மாறிகளில் சமபடித்தான சமன்பாடு

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0. \qquad 2.5$$

இதற்குக் கீழ்வரும் முற்றொருமை பொருந்தும்,

$$F(x, ky, ky' \ldots ky^{(n-1)}) = k^p F(x, y, y' \ldots y^{(n)})$$

$y = e^{\int z dx}$ எனப் பிரதியிடப் படியின் தரத்தை ஒன்று குறைக்கலாம்.

வகைக்கெழு காணும்போது நாம் அடைவது,

$$y' = e^{\int zdx} z,$$

$$y'' = e^{\int zdx} (z^2 + z')$$

$$y''' = c^{\int zdx} (z^3 + 3\, zz' + z'')$$

$$y^{(k)} = e^{\int zdx} \phi(z, z'\, z'' \ldots z^{(k-1)})$$

[இதைக் கணித முறைக் கண்டு தெளிதல் (Mathematical Induction) வழியாய் நிறுவ முடியும்],

(2·5)-ல் இதனைப் பிரதியிட, சமபடித்தாக இருப்பதன் பயனாய், $e^{p\int zdx}$ எனும் குணகம் 'F' எனும் குறியீட்டுக்கு வெளியே எடுக்க முடியும். இதனால் நாம் அடைவது.

$$e^{p\int zdx} f(x, z, z' \ldots z^{(n-1)}) = 0$$

$e^{p\int zdx}$ ஆல் வகுக்க வருவது,

$$f(x, z, z' \ldots z^{(n-1)}) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$y\, y'' - (y')^2 = 6\, x\, y^2$$

$y = e^{\int zdx}$ என இட, $z' = 6\, x$, $z = 3x^2 + c_1$

$y = e^{\int (3x^2 + c_1)\, dx}$ அல்லது $y = c_2 e^{(q^3 + c_1 x)}$

அடிக்கடி பயன்படு கணக்குகளில் வருவது படிகுறையக் கூடிய கீழ்வரும் இரண்டாம்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும்.

(1) அதன் உருவம் $F(x, y'') = 0$ … (2.6)

இங்கு படியைக் குறைக்க $y' = p$ என இடவும். அப்போது வரும் சமன்பாடு $F\left(x \frac{dp}{dx}\right) = 0$ இதனை பக்கம் 75-ல் பார்த்தோம்.

சமன்பாடு (2.6) லிருந்து $y'' f(x)$ என வரலாம். இருமுறை நுண் தொகை காணலாம். அல்லது துணையலகைப் புகுத்தி (2.6)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்குப் பதிலாக.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi(t),\ x = \psi(t) \text{ எனலாம்.}$$

ஆகவே, $dy' = y''dx = \phi(t)\,\psi'(t)\,dt$

$$y' = \int \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt + c_1$$

$$dy = y'\,dx;\ y = \int\left[\int \varphi(t) + \psi'(t)\,dt + c_1\right]\psi'(t)dt + c_2$$

(2) $F(y'\,y'') = 0$ ... (2·7)

இங்கு $y' = p$ என்றால் பக்கம் 76-ல் (1·61)-ல் உள்ள சமன்பாடாக (2·7) மாறுகிறது அல்லது (2·7)-ஐத் துணை அலகில் சொல்ல

$$y'_x = \varphi(t),\ y''_{xx} = \psi(t)$$

ஆகவே, $dx = \frac{dy'}{y''} = \frac{\varphi'(t)\,di}{\psi(t)},\ x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + c_1$

நுண்தொகை கண்டு y-ஐ நிச்சயிக்கலாம்.

$$dy = y'\,dx = \varphi(t)\,\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$$

$$y = \int \frac{\varphi(t)\,\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + c_2$$

(3) $F(y\,y'') = 0$ ... (2·8)

கீழ்வருமாறு படியின் தரத்தைக் குறைக்கலாம்.

$$\frac{dy}{dx} = p,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy},$$

(2·8)-லிருந்து $y'' = f(y)$ எனக் கண்டால் இதனை $2y'dx = 2dy$ என்பதால் பெருக்க,

$$d(y')^2 = 2f(y)\,dy. \quad \text{ஆகவே,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + c_1}$$

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} = dx.$$

$$x + c_2 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}}.$$

(2·8)-ல் சமன்பாட்டைத் துணை அலகுகள் கொண்ட சமன்பாட்டாய் தர $y = \varphi(t)$, $y'' = \psi(t)$.

ஆகவே, $dy' = y''dx$, $dy = y'dx$ நாம் அடைவது $y'dy' = y''dy$; அல்லது $\frac{1}{2}d(y')^2 = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$.

$$(y')^2 = 2\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$y' = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\,\varphi'(t)dt + c_1}.$$

$dy = y'$-லிருந்து dx ஐயும் பிறகு x ஐயும் அடைகிறோம்.

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\phi(t)\,dt}{\sqrt{2\int \psi(t)\,\varphi'(t)dt + c_1}}$$

$$x = \pm\int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{2\int \psi(t)\,\varphi(t)\,dt + c_1}} + c_2 \quad \dots \quad (2·9)$$

சமன்பாடு (2·9)-ம் $y = \varphi(t)$ யும் தீர்வுவரைக் குடும்பத்தைத் துணை அலகில் தருகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$y'' = 2y^3$. $y(0) = 1$. $y'(0) = 1$ இரு பக்கங்களையும் $2y'\,dx$ ஆல் பெருக்க,

$$d(y')^2 = 4y^3\,dy$$

$$(y')^2 = y^4 + c_1$$

துவக்க மதிப்புக்களிலிருந்து, $c_1 = 0$, $(y') = y^2$

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + c_2, \quad c_2 = -1$$

$$\therefore y = \frac{1}{1-x}$$

3. n வரிசைஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (Linear Equations of n th Order)

n வரிசை ஒருபடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு என்பது காணவேண்டிய சார்பலனும், அதன் வகைக்கெழுக்களிலும் படி ஒன்று என இருப்பது அதன் வடிவம்.

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}\dots a_{n-1}(x)y'+a_n[x]y=\phi(x) \quad \dots (2\cdot10)$$

வலப்பக்கம் $\phi(x)=0$ என்றால், சமன்பாடு சமபடித்தான ஒரு படிச் சமன்பாடெனப்படும். ஏனெனில் காணவேண்டிய சார்பலன் y யிலும் அதன் வகைக்கெழுக்களிலும் சமபடித்தாக இருப்பதால்,

குணகம் $a_0(x)$ $a<x<b$ என்ற இடைவெளியில் எங்கும் பூச்சியமாகாதிருந்தால் $a_0(x)$ ஆல் வகுத்து, இந்த இடைவெளியில் மாறும் x எனும் மாறிக்கு,

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}\dots p_n(x)\,y=0 \quad \dots (2\cdot11)$$

அல்லது
$$y^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\,y^{(n-i)} \quad \dots (2\cdot11_1)$$

எனும் வடிவில் எழுத முடியும்.

$a<x<b$ எனும் இடைவெளியில் $p_i(x)$ எனும் குணகங்கள் தொடர்ச்சியுடையதானல் துவக்க மதிப்புக்கணிமையில்.

$$y_0(x_0)=y_0\ y'_0(x_0)=y'_0\dots y^{(n-1)}(x_0)\,y_0^{(n-1)}$$

(இங்கு x_0 என்பது $a<x<b$ எனும் இடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி) என்றால் உள்ளமை தனித்தன்மை தேற்ற நியதிகள் அனுசரிக்கப்படும்.

ஏன், $(2\cdot11_1)$-ன் வலப்பக்கம் எல்லா மாறிகளையும் சார்ந்து தொடர்ச்சியுடையது.

பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(k)}}=-p_{n-k}(x)\,(k=0_1,n-1)$

அளவில் மட்டும் எல்லையுடையனவாக உள்ளன. ஏனெனில், $a<x<b$ என்ற இடைவெளியில் சார்பலன்கள் $p_{n-k}(x)$ தொடர்ச்சியுடையனவாதலால் எல்லையுடையவை.

ஒரு படித்தன்மையும் சமபடித்தன்மையும் $x=\phi(t)$ என பிரதியிடுவதாய் மாறுவதில்லை என்பது குறிப்பிடத் தக்கது. இங்கு $\phi(t)$, n தடவை வகைக்கெழு காணக்கூடியதும், 't' மாறும் இடை

வெளியில் $\phi'(t) \neq 0$ ஆக இருப்பதாகவுமுள்ள ஏதேனும் ஒரு சார்பலனாகும்.

$$\text{இங்கு } \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad \frac{1}{\phi^1(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{1}{(\phi'(t))} - \frac{dy}{dt}\frac{\phi''(t)}{(\phi'(t))^3}$$

$\frac{d^ky}{dx^k}$ எனும் வரிசையுள்ள வகைக் கெழு $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$.

$\frac{d^ky}{dx^k}$ எனும் வகைகெழுக்களில் ஒரு படிச் சமபடித்தான சார்பலனாகும். ஆகவே (2·11)ன் சமன்பாட்டில் பிரதியிட ஒருபடித் தன்மையும் சமபடித் தன்மையும் மாறுவதில்லை. ஒருபடித்தன்மையும் சமபடித் தன்மையும் $y(x) = \alpha(x)\,z(x)$ எனும் ஒருபடித்தான உருமாற்றத்தால் மாறுவதில்லை.

இரு சார்பலன்களின் பெருக்கற்பலனின் வகைக்கெழுகாண் சூத்திரப்படி

$$y^{(k)} = \alpha(x)z^{(k)} + k\alpha'(x)z^{(k-1)} + \frac{k(k-1)}{2!}\alpha(x)z^{(k-2)} \ldots + \alpha^{(k)}(x)z$$

$$z, z' \ldots z^{(k)}$$

அதாவது $y^{(k)}$ எனும் வகைக்கெழு, zz'-ல் சமபடித்தான ஒரு படிச் சார்பலன் ஆகும். ஆகவே மாறி மாற்றம் செய்த பின்னர், சமபடித்தான ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம் $a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} \ldots a_n(x)\,y = 0$ என்பது $z, z^1, z^{(n)}$-ல் சமபடித்தான ஒருபடிச் சார்பலன் ஆகும்.

$y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n)-1} \ldots P_n(x)\,y = 0$ எனும் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டை சுருக்கிய உருவத்தில்

$L[y] = 0$ என எழுதுவோம்.

இங்கு $L[y] = y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots P_n(x)\,y$. $L[y]$ என்பதை ஒரு படிவகையீட்டுச் செயலி் (Linean differential Operator) என்போம். ஒரு படிவகையீட்டுச் செயல் கீழ்வரும் இரண்டு அடிப்படைத் தன்மைகளையுடையது,

(1) ஒரு படிவகையீட்டுச் செயலின் குறியீட்டுக்கு வெளியே நிலை எண் குணகத்தை எடுக்க முடியும்.

$L[y] \equiv c\,L[y]$

சொல்லப்போனல்

$$(cy)^{(n)} + P_1(x)(cy)^{n-1} \ldots + P_n(x)(cy)$$
$$\equiv c[y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\,y]$$

(2) y_1, y_2 எனும் இரண்டு சார்பலன்களின் கூடுதல் மேல் செயல்படு செயலியின் விளைவு, தனித்தனியாக அவற்றின்மேல் செயலி செயல்பட வரும் விளைவுகளின் கூடுதலாகும்.

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

சொல்லப்போனால்,

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + P_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} \ldots P_n(x)(y_1 + y_2)$$

$$\equiv [y_1^{(n)} + P_1(x)\, y_1^{(n-1)} \ldots P_n(x)\, y_1]$$

$$+ [y_2^{(n)} + P_1(x)\, y_2^{(n-1)} \ldots P_n(x)\, y_2]$$

மேற்கூறிய இரண்டு தன்மைகளிலிருந்து வரும் கிளைத்தன்மையாதெனில்,

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i L[y_i] \text{ என்பதாம்}$$

இங்கு c_i என்பவை நிலை எண்கள்.

இந்த ஒருபடி வகையீட்டுச் செயலின் தன்மைகளைப் பயன்படுத்தி, ஒருபடிச் சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு பற்றிய பல தேற்றங்களை நிறுவுவோம.

தேற்றம் 2.2 ஒருபடித்தான சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $L[y] = 0$-ன் தீர்வு y_1 என்றால், c நிலை எண்ணாக cy_1-ம் அந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

நிருபணம்: கொள்கை $L[y_1] \equiv 0$

நிறுவ: $L[cy_1] \equiv 0$ என செயலின் முதற்பண்பைக் கொண்டு,

$$L[cy_1] \equiv CL[y_1] \equiv 0$$

தேற்றம் 2.3 y_1, y_2 இரண்டும் தனித்தனியே சமபடித்தான ஒருபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு $L[y] = 0$-ன் தீர்வானால் $y_1 + y_2$ எனும் கூடுதலும் அதன் தீர்வு ஆகும்

நிருபணம்: கொள்கை: $L[y_1] \equiv 0$; $L[y_2] \equiv 0$

நிறுவ: $L[y_1 + y_2] \equiv 0$

செயலியின் இரண்டாம் தன்மையைப் பயன்படுத்த நாம் அடைவது,

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2] \equiv 0$$

தேற்றம் : 2.2, 2.3 இவற்றின் இணைத் தேற்றம் இச்சைக் கேற்பக் கொண்ட நிலை எண் குணங்களுடன் சேர்ந்த $y_1, y_2, \ldots y_m$ எனும் தீர்வு களின் ஒருபடிச் சேர்க்கை $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i$; அந்த ஒருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடு $L[y] = 0$-ன் தீர்வு ஆகும்.

தேற்றம் 2·4. $P_i(x)$ எனும் மெய்யெண் குணகங்களை யுடைய சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு $L[y] = 0$, $y(x) = U(x) + i\,v(x)$ எனும் கலப்பெண் தீர்வை உடைத்தாயிருந்தால் மெய்ப்பகுதி $U(x)$ என்பதுவும், கற்பனைப்பகுதி $v(x)$ என்பதுவும் அந்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தனித்தனித் தீர்வு ஆகும்.

நிருபணம் : கொள்கை : $L[U(x) + i\,V(x)] \equiv 0$

நிறுவ : $\equiv [U] \equiv 0 \quad \equiv [V] \equiv 0$

கொள்முதல் இரண்டாவது தன்மைகளைக் கொண்டும், மெய் மாறியைக் கொண்ட கலப்பெண் சார்பலன் முற்றும் பூச்சியமானுல் மெய்ப்பகுதியும் கற்பனைப்பகுதியும் தனித்தனி பூச்சியமாக வேண்டும் எனும் தேற்றம் கொண்டும் நிருபணம் பூர்த்தியாகிறது.

குறிப்பு : $u(x) + i\,v(x)$ எனும் கலப்பெண் சார்பலனுக்கும் செயலியின் முதல் இரண்டாவது தன்மைகளைப் பயன்படுத்துவது பொருத்தமே. ஏனெனில் அத்தன்மைகளை நிறுவும்போது $(cy)' = cy'$ என்பதையும் (c நிலை எண்) ; $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$ என்பதையும் பயன்படுத்திஞேம். இவை மெய்மாறியைக் கொண்ட கலப்பெண் சார்பலன்களுக்கும் பொருந்தும் என்பது கவனிக்கத் தக்கது.

$a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் x மாறும்போது $y_1(x)$, $y_2(x) \ldots y_n(x)$ என்பது ஒரு படியாகச் சார்ந்தவை என்றுகூற, (2·12) $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ldots \alpha_n y_n \equiv 0$ என இந்த இடைவெளியில் $\alpha_i \neq 0$ எனும்படி எண்கள் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ இருக்க வேண்டும். (2·12)-ல் உள்ள முற்றொருமை $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots \alpha_n = 0$ என்ருல் மட்டுமே பொருந்துமானுல் அப்போது $y_1\, y_2 \ldots y_n$ எனும் சார் பலன்கள் $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் ஒருபடியாகச் சார்ந்துநிற்காத சார்பலன்கள் (Linearly independent functions) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1. $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் $1, x, x^2 \ldots x^n$ என்பவை ஒருபடியாகச் சார்ந்து நிற்காத சார்பலன் களாகும். ஏனெனில்,

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \ldots \alpha_{n+1} x^n \equiv \quad (2·13)$$

என்பது பொருந்த எல்லா $x_1 = 0$ என இருக்கவேண்டும். ஏதேனும் ஒரு $\alpha_i \neq 0$ என்ருல். (2·13)-ன் இடப் பக்கம் n படிக்கு மேற்படாத பல்லுறுப்புக்குச் சமன்பாடாகும். ஆகவே, n-க்கு மேற்படாத மூலங்கள் உடையது. ஆகவே, எடுத்துக்கொண்ட இடைவெளியில் n-க்கு மேற்படாத புள்ளிகளில் மட்டுமே பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஏதேனும் இடைவெளி,

$$a < x < b\text{-யில் } e^{k_1 x},\ e^{k_2 x} \ldots e^{k_n x}$$

(இங்கு $k_i \neq k_j$ எனெனில், $i \neq j$) எனும் சார்பலன்கள் ஒருபடியாகச் சார்ந்து நிற்காத சார்பலன்களாகும்,

எடுத்துக்கொண்ட சார்பலன்கள் ஒருபடியாகச் சார்ந்து நிற்பவை எனக் கொள்வோம். அவ்வாறெனில்,

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2\ e^{k_2 x} \ \ldots\ \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0. \qquad \ldots \quad (2\cdot14)$$

இங்கு ஏதேனும் ஒரு α_i ஆவது $\neq 0$. அதனை $\alpha_n \neq 0$ எனக் கொள்வோம். (2·14)-ல் உள்ள முற்றொருமையை $e^{k_1 x}$ ஆல் வகுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x}$$
$$+ \ldots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0. \ \ldots \quad (2\text{-}15)$$

இது e^{px} என்றுள்ள $(n-1)$ அடுக்குச் சார்பலனின் ஒருபடிச் சேர்க்கைத் தொடர்பு ஆகும். (2·15)-ஐ $e^{(k_2 - k_1)x}$ -ஆல் வகுத்து வகையீடு காண, வெவ்வேருன அடுக்குகள் $(n-2)$ அடுக்குச் சார்பலன்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கைத் தொடர்பு வருகிறது.

இவ்வாறு அடுத்தடுத்து $(n-1)$ முறைச் செயல்பட நாம் அடைவது,

$$\alpha_n (k_n - k_1)(k_n - k_2) \ldots (k_n - k_{n-1})\, e^{(k_n - k_{n-1})x} \equiv 0$$

ஆனுல் $\alpha_n \neq 0$ என்பது கொள்கையாதலால் இது முரண்பாடாகும். ஏனெனில் $k_i \neq k_j$ ($i \neq j$ எனும் போது)

இந்த நிருபணம் k_i என்பது கலப்பெண்ணுயினும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

சார்பலன்கள்

$$e^{k_1x}, \quad x e^{k_1x} \quad \ldots \quad x^{n_1} \; e^{k_1x}$$

$$e^{k_2x}, \quad x e^{k_2x} \quad \ldots \quad x^{n_2} \; e^{k_2x}$$

$$e^{k_px} \quad x e^{k_px} \quad \ldots \quad x^{n_p} \; e^{k_px}$$

$i \neq j$ எனும்போது $k_i \neq k_j$; $a < x < b$ எனும் ஏதேனும் இடை வெளியில் ஒருபடித்தாகச் சாராது இருக்கும் சார்பலன்கள் ஆகும்.

இவை ஒரு படித்தாகச் சார்ந்து நிற்பவை எனக் கொள்வோம். அப்போது,

$$P_1(x)e^{k_1x} + P_2(x)e^{k_2x} + \ldots P_p(x)e^{k_px} \equiv 0 \qquad (2.16)$$

இவற்றுள் $P_i(x)$ என்பது n_i க்கு மேற்படாத அடுக்குள்ள பல்லுறுப்புக்கோவை. அன்றியும் ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை —$P_p(x)$ என்போம் — முற்றொருமையாக பூச்சியமாகாதது. (2.16)-ஐ e^{k_1x} ஆல் வகுத்து, $n_1 + 1$ முறை வகையீடு காண நாம் காண்பது (2·16)-ல் உள்ள முதல் கூடுதல் மறைகிறது. இதேபோன்ற ஒருபடிச் சேர்க்கை ஆனால், குறைந்த சார்பலன்களின் சேர்க்கை,

$$Q_2(x)\, e^{(k_2-k_1)x} \ldots Q_p(x)e^{(k_p-k_1)x} = 0 \ldots (2{\cdot}17)$$

வருகிறது.

Q_i, P_i எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் அடுக்குகள் $(i = 2, 3 = -p)$ ஒன்றுகின்றன. ஏனெனில், $P_i(x)\, e^{px}$, $P \neq 0$ என்பதை வகையிடும்போது $[P_i(x) + P_i'(x)]e^{px}$ என வருகிறது. அதாவது, $P_i(x)\, e^{px}$ எனும் பெருக்கல் பலனை வகையிட்டதும் மிக அதிக அடுக்குள்ள $P_i(x)$-ன் உறுப்பின் குணகம் பூச்சியமல்லாத ρ ஆகிறது. குறிப்பாக, $P_p(x)$, $Q_p(x)$ எனும் சார்பலன்களின் அடுக்குகள் ஒன்றுகிறது. ஆகவே, $Q_p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை முற்றொருமையாகப் பூச்சியமாகாது. (2·17)-ஐ $e^{(k_2-k_1)x}$ ஆல் வகுத்து $(n_2 + 1)$ முறை வகையீடு காண அப்போதும் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஆனால் இன்னும் குறைந்த சார்பலன்களின் சேர்க்கையாக வருகிறது. இந்த செயலை $(\rho - 1)$ முறை திரும்பத் திரும்பச் செயல்படுத்த, நாம் அடைவது,

$$R_p(x)\, e^{(k_p - k_{p-1})} \equiv 0.$$

ஆனால் இது ஒவ்வாதது. ஏனெனில் $R_p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடுக்கு $P_p(x)$-ன் அடுக்குக்குச் சமம். ஆகவே, $R_p(x)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை முற்றொருமையாகப் பூச்சிய மாகாது.

தேற்றம் 2·5 : $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ எனும் சார்பலன்கள் ஒருபடித்தாகச் சார்ந்து நிற்பவையானால், அதே இடைவெளியில் ரான்ஸ்கியன் (Wronskian*) எனப்படும்.

அணிகோவை,

$$W(x) = W[y_1\, y_2 \,\cdots\, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_n \\ y_1^{h-1} & y_2^{h-1} & \cdots & y_n^{h-1} \end{vmatrix}$$

என்பது முற்றொருமையாகப் பூச்சியமாகும்.

நிரூபணம் : கொள்கை $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \cdots \alpha_n y_n \equiv 0 \ldots (2.18)$

($a < x < b$ எனும் இடைவெளியில்) இங்கு எல்லா α_1க்களும் ஒருங்கே பூச்சியமல்ல. (2·18)-ல் உள்ள முற்றொருமையை $(n-1)$ முறை வகையீடு செய்யக்கிடைப்பது.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ldots \alpha_n y_n \equiv 0 \\ &\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0 \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{aligned}\right\} (2\cdot 19)$$

இந்த சமபடித்தான (d_i-ஐச் சார்ந்தது). ஒருபடி n சமன்பாடுகளின் தொகுதிக்கு (எல்லா α_i-க்களும் பூச்சியமல்லாததால்) $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் சாரமுடைய தீர்வு ஒன்று உள்ளது. ஆகவே, (2·19)-ன் அணிகோவை—ரான்ஸ்கியன் எனப்படும் $W[y_1, y_2 \cdots y_n]$ — $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் பூச்சியமாகும்.

தேற்றம் 2·6. $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய $p_i(x)$ எனும் சார்பலன்களைக் குணகங்களாகக் கொண்டதும். $y, y_2 \ldots, y_n$ எனும் ஒருபடிச்சாரச் சார்பலன்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்டதுமான சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு

$y^{(n)} + p_n(x)y^{(b-1)} \quad \ldots \quad P_n(x)y = 0.$ ஆனால் ... (2·20)

---

* போலந்து தேசத்து கணித அறிஞர் ரான்ஸ்கி (1775—1853) என்பவர் பெயரால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

ரான்ஸ்கியன் அணிகோவை

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 \ y_2 & \dots & y_n \\ y_1' \ y_2' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} \ y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$a \leqslant x \leqslant b$ இடைவெளியில் ஓரிடத்தும் பூச்சியமாகாது.

நிரூபணம் : $a \leqslant x \leqslant b$ எனும் இடைவெளியில் ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $x = x_0$ எனும் இடத்து $W(x_0) = 0$ ஆகுக. கீழ்வரும் சமன்பாடுகளுக்கேற்ப நிலை எண்கள் $\alpha_i (t = 1, 2 \dots n)$ என்பவற்றைக் கொள்க.

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_1 y_1(x_0) & + \alpha_2 y_2(x_0) & \dots \alpha_n y_n(x_0) & = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) & + \alpha_2 y_2'(x_0) & \dots \alpha_n y_n'(x_0) & = 0 \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ \alpha_1 y_1'^{(n-1)}(x_0) & + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = 0 \end{array}\right\} (2 \cdot 21)$$

இங்கு எல்லா α_1களும் ஒருங்கே பூச்சியமல்ல. இவ்வாறு இருக்க முடியும். ஏனெனில் (2·21) உள்ள n காணவேண்டிய α_i உள்ள சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் அணிகோவை $W(x_0) = 0$ ஆனதால். ஆகவே சாரமுள்ள தீர்வு இந்தச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு உள்ளது. இவ்வாறு கண்டெடுக்கப்பட்ட α_iக்கு, ஒருபடிச் சேர்க்கையாகிய,

$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 x_2(x) \dots + \alpha_n y_n(x)$ என்பது (2·21) ல் உள்ள சமன்படித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். அன்றியும் (2·21)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியால் துவக்க நியதி,

$$y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 0 \dots y^{(n-1)}(x_0) = 0. \dots \quad (2 \cdot 22)$$

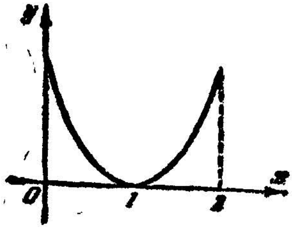
அனுசரிக்கப்படுகிறது. அத்தகைய துவக்கநியதி $y \equiv 0$ எனும் சாரமற்ற தீர்வினாலும் அனுசரிக்கப்படுகிறது என்பது மிகவும் வெளிப்படையே. தனித்தன்மைத் தேற்றத்தின் (2·22)-ல் உள்ள துவக்க மதிப்புக்களுக்கும் இதுமட்டும் தீர்வு ஆகும். அகவே, $\alpha_1 x_1(x) + \alpha_2 y_1(x) \quad \alpha_n(y_n x) \equiv 0$. ஆகையால் தேற்றம் கொள்கையைக் கொண்டாலும் கூட தீர்வுகள் $y_1 \ y_2 \cdots y_n$ என்பவை ஒருபடிச் சார்ந்து நிற்கும் சார்பலன்களேயாகும்.

குறிப்பு 1 : (2·5), (2·6) தேற்றங்கள்படி (2·20):ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $y_1 \ y_2 \dots y_n$, $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் ஒருபடிச்சாராப் பலன்களாக உள்ளவை. $a < x < b$

எனும் இடைவெளியில் உட்பட்ட $a_1 < x < b_1$ வரும் அவ்வாறே யாகும்.

குறிப்பு 2 : தேற்றம் 2.6-ல், தேற்றம் 2.5-ல் உள்ளதுக்கு மாறாக, $y_1, y_2 \dots y_n$ எனும் சார்பலன்கள் (2.20)-ன் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின், தொடர்ச்சியுடைய குணகங்களுடன் கூடிய தீர்வுகள் எனக் கொள்ளப்பட்டது. $y_1 y_2 \dots y_n$ என்பவற்றை $(n-1)$ முறை வகையிடக்கூடிய தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன்களென்பதைத் தள்ள முடியாது. (2·20)-ன் தீர்வு அல்லாத ஒருபடிச் சார்பு அற்ற சார்பலன்களை ரான்ஸ்கியின் அணிகோவையை எவரும் ஒருசில புள்ளிகளில் மட்டுமன்றி பூச்சியமாகக்கூடிய தொடர்ச்சியுடைய குணகங்களைக் கொண்டவை—எடுத்துக்காட்டாகக் கூறமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக. $0 < x < 2$ எனும் இடைவெளியில் இரண்டு சார்பலன்களை, $y_1(x), y_2(x)$ என்பவற்றைக் கொள்வோம்.

$y_1(x) = (x-1)^2$ $\quad 0 < x < 1$ எனும் இடத்து,



படம் 2-1

$y_1(x) = 0 \qquad 1 < x < 2$

$y_2(x) = 0 \qquad 0 < x < 1$

$y_2(x) = (x-1)^2 \qquad 1 < x < 2$

(படம் 2. 2 பார்க்கவும்)

இங்கு $\begin{vmatrix} y_1, & y_2, \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix} = 0.$ $0 < x < 2$ எனும் இடத்து,

ஏனெனில், $0 < x < 1$ என்ற இடைவெளியில் இரண்டாவது கலம், பூச்சியமாகும் $1 < x < 2$ எனும் இடைவெளிக்கு முதற் கலம் பூச்சியங்களைக் கொண்டது. இருந்தாலும் $0 < x < 2$ என்ற முழு இடைவெளியில் $y_1(x), y_2(x)$ என்பவை நாடிச்சாரா சார்பலன்களாகும்,

ஏனெனில் $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$, $0 < x < 2$ எனும் முற்றொருமையைக் கொண்டால், முதலில் $0 < x < 1$ எனும் இடைவெளியில் $\alpha_1 = 0$ பிறகு $1 < x < 2$ எனும் இடைவெளியில் $\alpha_2 = 0$

தேற்றம் 2·7 $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} \dots p_n(x) y = 0$ (2·20) எனும் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் $P_i(x)$ எனும் குணகங்கள் தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன்களாகும். $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் பொதுத்

தீர்வு இச்சைக்கேற்பக் குணகங்களைக் கொண்ட, ஒருபடிச் சாரா n தனித்தனித் தீர்வுகளாகிய y_i-க்களின் $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ எனும் ஒரு படிச் சேர்க்கையாகும்.

நிரூபணம்: $a < x < b$ எனும்போது (2·20)-ல் உள்ள சமன்பாடு தனித்தன்மை உள்ளமைத் தேற்ற நியதிக்குட்பட்டது. ஆகவே, $a < x < b$ எனும்போது தீர்வு $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ என்பது பொதுத் தீர்வு ஆகும். அதாவது இலக்கின்றி எல்லாத் தனித் தனித் தீர்வுகளையும் கொண்டதாகும். ஆனால் இச்சைக்கேற்ப எடுத்த c_1 எனும் குணகங்கள் $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y'_0$ ...... $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களுக்கு இணங்கியதாக வேண்டும். இங்கு x_0 என்பது $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் அமையும் புள்ளியாகும்.

பொதுத் தீர்வு $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ என்பது துவக்க மதிப்புக்களுக்கிணங்க வேண்டுமென நாம் கோரினால் அப்போது கீழ்வரும் n ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை அடைகிறோம், (c_i எனும் மாறிகளால் $c = 1, 2 \ldots n$)

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_1) &= y_0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y'_i(x_0) &= y'(0) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) &= y^{(n-1)}(0) \end{aligned}\right\}$$

இங்கு பூச்சியமாகாத அணிகோவையுடைய காணவேண்டிய n ராசிகள், c_i உள்ளன, (2·20)-ன் உள்ள n ஒருபடிச்சாரா தீர்வுகளின் ரான்ஸ்கியன் ஆனதால் அணிகோவை பூச்சியமல்ல. ஆகவே, x_0 எனும் மதிப்பை $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில்

கொள்ள, எத்தகைய வலப்பக்க மதிப்பாயினும் c_i எனும் ராசிகளின் மதிப்புக்களைக் காணலாம்.

தேற்றம் 2 7-ன் கிளை. சமபடித்தான ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகளின் மிக அதிக எண்ணிக்கை அதன் வரிசையின் எண்ணிக்கையாகும்.

குறிப்பு : ஒரு சமபடித்தான ஒருபடி n வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் (homogeneous linear equation of nth order) ஏதேனும் n ஒருபடிச்சாராச் சிறப்புத் தீர்வுகள் அதன் அடிப்படைத் தீர்வுத் தொகுதி (fundamental system of solution) எனப்படும். இச்சைக்கேற்ப அடிப்படைத் தீர்வுத் தொகுதி அமைக்க n^2 எண்களை இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளவும்.

அவை $yi^{(k)}(x_0)$ $[(=1)\,2 \ldots n; \quad k = 0, 1 \ldots n-1]$. இவை ஒரே நியதிக்குட்பட்டதாக வேண்டும்.

அதாவது,
$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0), & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

இங்கு x_0 என்பது $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. என்றால், துவக்க மதிப்புக்கள் $zi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0\ 1; \ldots n-1; i = 1, 2 \ldots n)$ என்பன $yi(x)$ எனும் அடிப்படைத் தீர்வுத் தொகுதியை நிச்சயிக்கின்றன. ஏனெனில் $x = x_0$ எனும் புள்ளியில் ரான்ஸ்கியன் அணிகோவை பூச்சியமல்ல. ஆகவே, 2·5, 2·6 தேற்றங்களின் ஆதாரத்தால் தீர்வுகள் $y_1, y_2 \ldots y$ என்பவை ஒருபடிச்சாராத் தீர்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4. $y'' - y = 0$ எனும் சமன்பாட்டுக்கு ஒருபடிச்சாராத் தனித்தனித் தீர்வுகள் $y_1 = e^x$ $y = -e^{-x}$ (பக்கம் 102—எடுத்துக்காட்டு 2). ஆகவே பொதுத்தீர்வு $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$y = c_1 e^x + c_2 \cos h\, x + c_2 \cos h\, x$ என்பது, $y''' - y' = 0$ என்பதன் தீர்வு, பொதுத் தீர்வு அல்ல. ஏனெனில், e^x, $\cos x$, $\sin hx$. என்பவை ஒருபடித்தாகச் சார்ந்து நிற்பவையாகும். ஒருபடித்தாகச் சாரத்தனித்தனித் தீர்வுகள் $1, \cos h\, x, \sin h\, x$ ஆகும். ஆகவே, பொதுத்தீர்வு $y = c_1 + c_2 \cos h\, x + c_1 \sin h\, x$. இங்கு $e_1\ c_2\ c_3$ என்பவை ஏதேனும் நிலை எண்கள்.

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots P_n(x)\, y = 0 \quad \dots \; (2\cdot20)$$

எனும் சமப்படித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒரு சார மூள்ள தனித் தீர்வு $\bar{y}_1$ கண்டபின்னர், $y = y_1 \int u\, d\, x$ எனப் பிரதியிடச் சமன்பாட்டின் வரிசையை, அதன் சமபடித்தான ஒரு படித்தன்மை மாறுது குறைக்க முடியும்.

$y = y_1 \int u\, dx$ எனப் பிரதியிடுவதற்குப் பதிலாக $y = y_1 z$ எனவும்: $z^1 = u$ எனவும் இருமுறைப் பிரதியிடலாம். $y = y_1 z$ (2·23) எனும் சமபடித்தான ஒருபடி உருமாற்றம் சமன்பாட்டின் சமபடித்தான ஒருபடித் தன்மையை மாற்றுது. (பக்கம் 99—100 பார்க்கவும்). ஆகவே, (2·20)-ல் உள்ள சமன்பாடு

$$a_0(x)\, z^{(n)} + a_1(x)\, z^{(n-1)} + a_n(x)\, z = 0 \quad \dots \; (2\cdot24)$$

என மாறுகிறது.

(2·23)-ல் உள்ள தொடர்பால் (2.24)-ன் தீர்வு $z \equiv 1$ (2·90)-ன் தீர்வு $y = y_1$-க்கு ஒத்ததாகிறது,

(2.24)-ல் $z \equiv 1$ எனப் பிரதியிட நாம் அடைவது $a_n(x) \equiv 0$

ஆகவே (2.24)-ன் சமன்பாடு அடையும் உருவம்,

$$a_0(x)\; z^{(n)} + a_1(x)\, z^{(n-1)} \;\dots\; a_{n-1}(x)\; z' = 0$$

$z' = u$ எனப் பிரதியிட வரிசையின் தரம் ஒன்று குறைகிறது, அதாவது வருவது.

$$a_0(x)\, u^{(n-1)} + a,(x)\, n^{(n-2)} \quad a_{(n-1)}(x)\, u = 0$$

இதே பிரதியிடல் அதாவது $\bar{y} = y \int u\, d\, x\, y$, இங்கு $L[y] = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு—சமவடிவத்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடு $L[v] = f(x)$-ன் வரிசையை ஒன்று குறைக்கிறது என்பது கவனிக்கத்தக்கது. ஏனெனில் இந்தப் பிரதியீடு சமன் பாட்டின் வலப்பக்கத்தைப் பாதிப்பதில்லை.

($a < x < b$ எனும் இடைவெளியில்) சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் k ஒருபடிச் சாராச்சீர்வுகள் $y_1\, y_2 \dots yk$ நாம் அறி வோமானல் சமன்பாட்டின் வரிசைத்தரத்தை $n - k$க்குக் குறைக்க முடியும். அதே இடைவெளி $a < x < b$-ல் —.

ஏனெனில், $L[y] = 0$ (2.20)

எனும் சமன்பாட்டில் $y = y_k \int u dx$ எனப் பிரதியிட்டு வரிசையை ஒன்று குறைக்கவும். இதனால் நாம் அடைவது சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு.

$$a_0(x) u^{(n-1)} + a_1(x) u^{(n-2)} + \dots a_{n-1}(x) u = 0 \quad (2.25)$$

இதன் வரிசை எண் $(n-1)$.

$y = y_1 \quad y = y_2 \quad y = y_{k-1}$ என அடுத்தடுத்து,

$y = y_k \int u dx$ அல்லது $u = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)$ல் பிரதியிட்டு நாம் அடைவது $u_1 = \left(\frac{y_1}{y_k}\right)^1$, $u_2 = \left(\frac{y_2}{y_k}\right)^1$ $u_{k-1} = \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)^1$ எனும் $(k-1)$ ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகளாகும்.

[கவனத்திற்குரியது யாதெனில் (2.25)ன் சாரமற்ற தீர்வு $u \equiv 0$ நாம் ஏற்கனவே சமன்பாட்டின் வரிசையைக் குறைக்கப் பயன்படுத்திய $y = y_k$ என்பதற்கு ஒத்ததாகும் என்பதாம்].

தீர்வுகள் $u_1 \; u_2 \dots u_{k-1}$ என்பவை ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகள். ஏனெனில் $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் அவற்றிடையே ஒருபடித் தொடர்பு இருந்தால்

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots \alpha_{k-1} u_{k-1} \equiv 0$ என ஆகும்

அல்லது

$$\alpha_1 \left(\frac{y_1}{y_k}\right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{y_2}{y_k}\right)^1 + \dots \alpha_{k-1}\left(\frac{y_{k+1}}{y_k}\right)^1 \equiv 0 \cdot 26$$

இங்கு ஏதேனும் ஒரு α_i ஆவது $\neq 0$. dx ஆல் பெருக்கி (2 26)-ன் நுண் தொகை காண x_0-லிருந்து x வரை $a < x < b - x_0$ என்பது இடைவெளி $[a, b]x$ அல்லது ஒரு புள்ளி நாம் அடைவது

$$\alpha_1 \frac{y_1(x)}{y_k(x)} + \alpha_2 \frac{y_2(x)}{y_k(x)} - \dots \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)} +$$

$$-\left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \dots \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)}\right] = 0$$

அல்லது இதனை $y_k(x)$ ஆல் பெருக்கி.

$$-\left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \dots \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)}\right] = \alpha_k$$

என ஏதேனும் ஒரு $\alpha_i \neq 0$ எனுமாறு ஒருபடித் தொடர்பு

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \;\dots\; \alpha_k y_k \equiv 0$ என வருகிறது

இது நாம் முதற்கொள்கை எடுத்துக் கொண்டும் கூட இவ்வாறு வருகிறது.

இவ்வாறு ஒரு தனித்தீர்வு y_k-ஐப் பயன்படுத்திச் சமன்பாட்டின் வரிசை எண்ணிக்கையை, ஒன்று குறைக்க முடிகிறது. அத்துடன் அதன் சமபடித்தான ஒருபடித் தன்மை மாறுமலும் இருக்கிறது. அத்துடன் மாறிய சமன்பாட்டின் $(k-1)$ ஒருபடிச் சாராத தீர்வுகளும் காணமுடிகிறது. இதே முறையை மீண்டும் வரிசை எண்ணிக்கையில் ஒன்று குறைக்கப் பயன்படுகிறது. இத்த முறையைக் k முறைப்பயன்படுத்த $(n-k)$ வரிசையுள்ள சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$xy'' - xy' + y = 0. \qquad \ldots \qquad (2{\cdot}27)$$

$y_1 = x$ என்பது ஒரு தீர்வு என்பது எளிதில் புலனுகிறது. வரிசையின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்கக் கீழ் வருமாறு பிரதியிடவும்.

$$y = x\int u dx \; y' = xu + \int u dx.$$

$y'' = xu' + 2u \quad \ldots \quad (2{\cdot}27)$ கீழ்வருமாறு மாறுகிறது.

$$x^2u' + (2-x)xu = 0.$$

இதிலிருந்து $\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x}\,dx \; c - c_1\,\frac{e^x}{x^2}$

$$y = x\int u dx = x\left[c_1\int\frac{ex}{x^2}\,dx + c_2\right].$$

உதவித்தேற்றம் : (Lemma)

கீழ்வரும் சமன்பாடுகளில்

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \quad\ldots\quad + P_n(x)y = 0 \qquad \ldots \qquad (2{\cdot}28)$$

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \quad\ldots\quad + q_n(x)y = 0 \qquad \ldots \qquad (2{\cdot}29)$$

$Pi(x), qi(x)\ (i = 1, 2 \ldots 4)$, என்பவை $a \leqslant x < b$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன்கள் இவற்றிற்கு அடிப்படைத் தீர்வுத் தொகுதி. $y_1, y_2 \ldots y_n$ ஒன்றேயானல், சமன்பாடுகளும் ஒன்றேயாகும். அதாவது $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் $Pi(x)[i = 1, 2 \ldots n)$.

நிரூபணம் : உறுப்பு உறுப்பாக (2·29)-ஐ (2·28)-லிருந்து கழிக்க வரும் புதுச்சமன்பாடு,

$$[P_1(x) - q_1(x)]y^{(n-1)} + [P_2(x) - q_2(x)]y^{(n-2)} + \dots [P_n(x) - q_n(x)]\,y = 0. \quad \dots \quad (2·30)$$

இவற்றின் தீர்வுகள் $y_1\, y_2 \dots y_n$ எனும் (2·28), (2·29) எனும் சமன்பாடுகளுக்கு ஒருங்கே பொருந்தும் தீர்வுகளின் சார் பலன்களாகும். (2·30)-ல் ஏதேனும் ஒரு குணகமாவது $a \leqslant x < b$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு புள்ளி x_0-ல் பூச்சியமல்ல எனக் கொள்வோம், $P_j(x)\; q_i(x)$ என்பவை தொடர்ச்சியுடைய சார் பலன்களாதலால் x_0 எனும் புள்ளிக்கு அண்மையில் இந்தக் குணகம் பூச்சியமல்ல, ஆகவே, $y_1\, y_2 \dots y_2$, எனும் சார்பலன்கள் ஒருப்படிச் சாராச் சார்பலன்களாகும். இவை (2·30)-ல் உள்ள சமபடித்தான ஒருபடி $(n-1)$ வரிசைக்கு மேற்படாத சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். இந்த முடிவு (2·7)-ல் தேற்றக் கிளக்கு முரணுகிறது. ஆகவே, (2·30)-ல் உள்ள எல்லாக் குணங்களும் முற்றொருமையாகப் பூச்சியமாகும். அதாவது,

$$P_i(x) - q_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2 \dots 4) \text{ அதாவது,}$$

$$P_i(x) \equiv q_i(x) \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

$a \leqslant x < b$ என்ற இடைவெளியில் இவ்வாறு அடிப்படைத் தீர்வுத் தொகுதி $y_1, y_2, \dots y_n$

$$y^{(n)} + O(x)\, y^{(n-1)} \dots P_n(x)\, y = 0) \quad \dots \quad (2.28)$$

என்ற சமன்பாட்டை முற்றிலும் நிச்சயிக்கிறது. ஆகவே, $y_1\; y_2 \dots y_n$ என அடிப்படைத் தீர்வுகள் கொண்ட (2·28)-ல் சமன்பாடு என்ன என்பதைப் பிரச்சினையாக எழுப்பலாம்.

(2·28)-ல் உள்ள தீர்வு y என்பது $y_1, y_2 \dots y_n$ எனும் தீர்வு களைச் சார்ந்து இருப்பதால், ரான்ஸ்கயன் அணிக்கோவை $W[y_1, y_2 \dots y_n] = 0$. இதை விரித்து எழுத,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y \\ y_2 & y'_2 & \dots & y^1 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y^{(n-1)} \\ y_1^{n} & y_2^{n} & \dots & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

கடைசிக் காலத்தின் மூல உறுப்புகளை விவரித்து எழுத

$$W[y_1, y_2 \ldots y_n]\, y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_1 \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_2^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \ldots = 0 \quad (2\cdot31)$$

(2·31-ல் கிடைத்த சமன்பாடுதான், $y_1, y_2 \ldots y_n$ என்பவற்றை அடிப்படைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட நாம் கோரிய சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு (ஏனெனில் $y - y_1 (i) = i, 2$ n என்பதற்கு $W[y_1\, y_2 \ldots y_n\, y] = 0$. (2.31)-ல் இரு பக்கங்களையும் பூச்சியமல்லாது $W[y_1\, y_2 \ldots y_n]$ எனும் மிக அதிக வரிசையுள்ள வகைக்கெழுவின் குணகத்தால் வகுக்க (2·28)-ல் உள்ள வடிவத்திற்கு மாற்றுகிறோம். குறிப்பாக இதிலிருந்து வருவது,

$$P_i(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^{n} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (2\cdot32)$$

எனும் அணிக்கோவை ரான்ஸ்கியன் $W[y_1, y_2 \ldots y_n]$-ன் வகைக்கெழுவுக்குச் சமம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

என்பதை அணிக்கோவையின் வகைக்கெழு காணும் விதியைப் பயன்படுத்திப் பார்த்தால் அது 1-லிருந்து n அணிக்கோவைகளின்

கூடுதலாகும். இவை i-க்கு 1-லிருந்து தொடர்ந்து n வரை மதிப்புக் கொடுத்து i வரிசை மட்டும் வகைக்கெழுக் கொண்டு மற்றவை மாற்றுதிருக்க வரும் அணிகோவைகளாகும். இந்த $i = n$ எனும் மதிப்பிற்குரிய கடைசி அணிகோவை மட்டும் (2·82) உடன் பொருந்தி பூச்சியமல்லாததாக இருக்கும். மற்ற அணிகோவைகளின் மதப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சிய மாகும். ஏனெனில் i வரிசையும் i_1 வரிசையும் ஒன்றுக இருப்பதால்,

ஆகவே $\rho_1(x) = -\dfrac{W^1}{W}$ இதனை dx ஆல் பெருக்கி நுண் தொகை காண நாம் அடைவது,

$$\ln|W| = -\int \rho_1(x)\,dx + \ln c \quad W = ce^{\int \rho_1(x)\,dx}$$

$$\text{அல்லது} \qquad W = ce^{-\int_{x_0}^{x} \rho_1(x)\,dx}. \qquad \ldots (2\cdot 83)$$

$x = x_0$ என்பதற்கு நாம் பெறுவது $C = W(x_0)$. ஆகவே,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \rho_1(x)\,dx}. \qquad \ldots (2\cdot 84)$$

M. ஆஸ்ட்ராகிராட்ஸ்கி (M Ostrogradsky) என்பவரும் லியோவில் (Lioville) என வரும் தனித்தனியாக இந்த வாய்பாடு களை — 2·83, அல்லது 2·84 கண்டனர். ஆகவே இவை ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கி லியோவில் வாய்பாடுகள் எனப்படும்.

ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கி லியோவில் வாய்பாடுகள் ... (2·84)

$$y'' + P_1(x)\,y' + P_2(x)\,y = 0 \qquad \ldots (2\cdot 85)$$

எனும் இரண்டாம் வரிசை சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன் பாடுகளின் தீர்வை அதற்கு சாரமுள்ள ஒரு தீர்வு y_1 அறிவோ மானுல் பயன்படுத்தலாம். (2·84)-ல் உள்ள ஆஸ்ட்ரா கிராட்ஸ்கி லியோவில் வாய்பாட்டின்படி (2·25)-ன் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y_1 \end{vmatrix} = c_1\, e^{-\int p_1(x)dx}$$

அல்லது, $y_1y' - yy'_1 = c_1\, e^{-\int p_1(x)\,dx}$-ன் தீர்வுமாகும். இது முதல் வரிசை ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். நுண்தொகைகாண குணகம் கண்டு இதர தீர்வு காண முடியும்.

$\mu = \dfrac{1}{y_1^2}$ -ஆல் பெருக்க நாம் அடைவது,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)(dx)}.$$

ஆகவே,

$$\frac{y}{y'} = \int \frac{ce^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_2$$

$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

4. நிலைஎண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித்தான ஒருபடிச்சமன்பாடுகளும், ஆயிலர் சமன்பாடுகளும்
(Homogeneous Linear equations with Constant Coefficients and Eulers Equations)

1. நிலை எண்குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்.

சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடாகிய,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \qquad \dots (2{\cdot}36)$$

இதனில் a_i எனும் எல்லாக் குணகங்களும் நிலை எண்களானால், அதன் சிறப்புத் தீர்வு k நிலை எண்ணாக, $y = e^{kx}$ எனும் வடிவத்தில் காண முடியும். (2·36)ல் $y = e^{kx}$ எனவும், $y^{(p)} = k^k e^{kx}$ $(P = 1, 2 \dots n)$ எனவும் பிரதியிட,

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \dots + a_n e^{kx} = 0$$

ஆகிறது. பூச்சியமில்லாத e^{kx} ஆல் வகுக்க தன்மையுடைச் சமன்பாடு

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots a_n = 0 \qquad \dots (2{\cdot}37)$$

வருகிறது. இந்த k-ல் n படிச்சமன்பாடு எந்த k-ன் மதிப்புக்கு $y = e^{kx}$ என்பது முதலில் தரப்பட்ட சமபடித்தான ஒருபடிச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும் என்பதைக் காட்டுகிறது. இந்தத் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டில் எல்லா மூலங்கள் k_1, k_2, ... k_n யாவும் வெவ்வேறானால் நாம் அடைவது ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகள் (2·36-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்கு) $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$ ... $e^{k_n x}$ ஆகும்.

(பக்கம் 102-ல் எடுத்துக்காட்டு 2 பார்க்கவும்).

ஆகவே, $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \ldots c_n e^{k_n x}$

(c_i என்பவை இச்சைக்கேற்ப உள்ள நிலை எண்கள்).

(23·6)-ல் உள்ள முதல்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு ஆகும். நிலை எண்குணங்களைக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக்காண இந்த முறையை முதல் முதலாக ஆயிலர் என்பவர் பயன்படுத்தினார்.

எடுத்துக்காட்டு 1,

$$y'' - 3y + 3y = 0.$$

இதன் தன்மையுடைச் சமன்பாடு,

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

இதன் மூலகங்கள், $k_1 = 1$, $k_2 = 2$,

ஆகவே பொதுத்தீர்வு $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ எனும் வடிவுத்திலாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.

$$(y'' - y') = 0.$$

இதன் தன்மையுடைச் சமன்பாடு

$$k^3 - k = 0$$

இதன் மூலகங்கள் $k_1 = 0_1$ $k_2 = 1$ $k_3 = -1$ எடுத்துக் கொண்ட சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $p = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

(2.36-ல்) உள்ள சமன்பாட்டு குணகங்களை மெய்யெண்கள் எனக் கொண்டமையால் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் கலப்பெண் மூலங்கள், இணை எண்களாக மட்டும் வரும். $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ எனும் இணைக் கலப்பெண் மூலங்களுக்கேற்ற தீர்வுகள் $e^{(\alpha + \beta i)x}$, $e^{(\alpha - \beta i)x}$ என்பவையாம். இவற்றை மெய்யெண்கள் மட்டும் வரும் தீர்வுகளாகக் கூறமுடியும். ஒரு தீர்வின் மெய், கற்பனைப் பகுதிகள் கொண்ட தீர்வு,

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

அல்லது $e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$

ஆகவே, ஒவ்வொரு இணைக்கலப்பெண் மூலஜோடி எண்கள் $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ இவற்றிற்கு ஏற்ற தீர்வுகள் $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$y'' + 4y' + 5 = 0$. இதன் தன்மையுடைச் சமன்பாடு $k^2 + 4k + 5 = 0$. இதன் மூலங்கள் $k_{1,2} = -2 \pm i$

ஆகவே. பொதுத் தீர்வு $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$y'' + a^2 y = 0$

இதன் தன்மையுடைச் சமன்பாடு $k^2 + a^2 = 0$.

இதன் மூலங்கள் $k_{1,2} = \pm ai$

பொதுத் தீர்வு $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$

தன்மையுடைச் சமன்பாட்டுக்கு பொருந்து மூலங்கள்(multiple roots) இருந்தால் e^{kx} எனும் வடிவில் உள்ள தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை n-க்குக் குறைவாக இருக்கும். ஆகவே குறைவான ஒருபடிச் சாராத்தீர்வுகளை வேறுவழியில் காண வேண்டும். தன்மையுடைச் சமன்பாட்டில் αi தடவை k_i எனும் மூலங்கள் ஒன்றுனல், சமன்பாட்டின் தீர்வு $e^{k_i x}$ மட்டுமல்ல, ஆனுல் $xe^{k_i x}$, $x^2e^{k_i x} \ldots x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$ என்பவையும் தீர்வுகளாகும் என நாம் நிறுவுவோம்.

தன்மையுடை சமன்பாட்டில் $k_i = 0$ எனும் மூலம் α_i முறை வருகிறதெனக் கொள்வோம். அப்போது (2·87)-ல் உள்ள தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கத்தில் பொதுக்குணகம் $e^{k_i x}$. அப்போது $a_n = a_{n-1} = \ldots a_{n-\alpha_i+1} = 0$. தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் உருவம்

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} \ldots + a_{n-\alpha_1} k^{\alpha_1} = 0.$$

இதற்கேற்ற சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ \ldots \ a_{n-\alpha_i} y^{(\alpha_i)} = 0.$$

இதன் சிறப்புத் தீர்வுகள், $1, x, x^2 \ldots x^{\alpha_i - 1}$ என்பது எளிதில் புலனுகிறது. ஏனெனில் α_i-குக் குறைவான வரிசையுடைய வகைக் கெழுக்கள் இதில் இல்லை. ஆகவே α_i தடவை பொருந்தும் $k_i = 0$ எனும் மூலத்திற்கேற்ற (பக்கம் 102, எடுத்துக்காட்டு 1 பார்க்கவும்.) $1, x, x^2 \ldots x^{\alpha_i - 1}$ எனும் α_i ஒருபடிச் சாராத்தீர்வுகளாகும், தன்மையுடைச் சமன்பாட்டில் $k_i \neq 0$ எனும் α_1 முறை

பொருந்தும் மூலங்கள் வந்தால் $y = e^{k_1x}z$ என மாறி மாற்றம் செய்தோமானால் பூச்சியம் பொருந்தும் மூலங்களாக வரும் கணக்காக மாறும்.

ஏன், பக்கங்கள் 99—100-ல் ஏற்கெனவே குறிப்பிட்டபடி சமபடித்தான ஒருபடி வகைக்கெழுச்சமன்பாடு இந்த மாறி மாற்றத்தால் அதன் தன்மை மாருதிருக்கிறது. (2·38)-ல் உள்ள மாறிமாற்றத்தால் குணகங்கள் நிலை எண்களாகவே இருக்கின்றன. ஏனெனில்,

$$y^{(p)} = (z\,e^{k_1x})^{(p)} = e^{k_1x}\,(z^{(p)} + pz^{(p-1)}k_1$$

$$+ \frac{p^{(p-1)}}{2!}\,z^{(p-2)}\,k_1^2 + \quad \dots \quad \dots + z\,k_1^p)$$

(2·36)-ல் பிரதியிட்டு e^{k_1x}-ஆல் வகுக்க $z, z' \dots z^{(n)}$-ன் குணகங்கள் நிலை எண்களாகவே இருக்கின்றன. ஆகவே, மாறி மாற்றம் செய்தபின்னர் வரும் சமபடித்தான n வரிசையில் நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமன்பாடு,

$$b_0\,z^{(n)} + b_1\,z^{(n-1)} \dots b_n\,z = 0, \qquad \dots \quad (2\cdot39$$

$$a_0\,k^n + a_1\,k^{(n-1)} \quad \dots \quad + a_n = 0 \qquad \dots \quad (2\cdot37)$$

என்ற தன்மையுடன் சமன்பாட்டின் மூலகங்களும்

$$b_0\,p^n + b_1\,p^{n-1} \quad \dots \quad + b_n = 0, \qquad \dots \quad (2\cdot40)$$

என்ற (2·39)-ன் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் k_1 என்பதன் கூடுதல் அளவு வேறுபாடுடையன. ஏனெனில், (2·36)-ன தீர்வு $y = e^{kx}$, (2·39)-ன் தீர்வு $z = e^{k_1x}$ இவற்றிடையே உள்ள தொடர்பு $y = z^{k_1x}$ அல்லது $e^{kx} = e^{px}\,e^{k_1x}$ ஆகவே $k = p + k_1$; ஆகவே $k = k_1$ எனும் (2·27)-ன் மூலத்திற்கு பொருத்தமாக $p_1 = 0$ எனும் (2·40)-ன் மூலம் உள்ளது. பொருந்தும் எண்ணிக்கையும் மாருது என எளிதில் நிறுவலாம். அதாவது $p_1 = 0$ என்பதன் பொருந்தும் எண்ணிக்கையும் α_1-யே ஆகும்.

(2·37)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் பொருந்து மூலம் k_1, இந்தச் சமன்பாட்டின் குணகங்களை மாற்றுவதால் அதன் வெவ்வேறு மூலங்கள் பொருந்துவதால் ஏற்படுகிறது எனக் கருதலாம். $k = p + k_1$ எனும் தொடர்பால், (2·40)-ன் α_1 மூலங்கள் $p = 0$ ஆகும்போது பொருந்தும்.

α_i முறை பொருந்தும் $p = 0$ எனும் மூலங்களுக்கேற்ப $z = 1, z = x, \ldots z = x^{\alpha_i - 1}$ எனத் தீர்வுகள் உள்ளன. ஆகவே $y = ze^{k_i x}$ எனும் தொடர்பால் (2·37)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் α_i முறை பொருந்தும் k_i எனும் மூலத்திற்கேற்ப,

$$y = e^{k_i x}, y = x\, e^{k_i x}, \ldots y = x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x} \quad \ldots \quad (2{\cdot}41)$$

என α_i தனித் தீர்வுகள் உள்ளன.

தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் வெவ்வேறு மூலங்களுக்கேற்ற தீர்வுகள்.

$$e^{k_i x} \quad x\, e^{k_i x} \;..\; x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x} \; (i = 1, 2 \ldots m) \ldots \quad (2{\cdot}42)$$

ஒருபடிச்சாராத் தீர்வுகள் எனக் காட்டவேண்டும். ஆனல், இதனை பக்கம் 102-ல் எடுத்துக்காட்டு 8-ல் ஏற்கனவே நிறுவியுள்ளோம்.

இவ்வாறு (2·36)-ன் பொதுத்தீர்வின் வடிவம்,

$$y = \sum_{i=1}^{m} (c_{0i} + c_{1i}\, x + c_{2i} x^2 \ldots c_{\alpha_{i-1}}) (x^{\alpha_i - 1}) e^{k_{in}}$$

ஆகும். இங்கு c_{si} என்பவை இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் நிலை எண்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

இதன் தன்மைகாட்டிச் சமன்பாடு,

$$k^3 - 2k^2 + 3k - 1 = 0 \text{ அல்லது } (k - 1)^3 = 0.$$

இதன் முக்கிய மூலங்கள் $k_{1, 2, 3} = 1$ ஆகவே பொதுத் தீர்வு $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^x$ எனும் வடிவ மாகும்.

தன்மை காட்டிச் சமன்பாடு, $(p + qi)$ எனும் சிக்கல் எண் மூலங்களை 'α' தடவைத் திரும்ப வருவதானல் தீர்வுகள் $e^{(p+qi)x}$, $x\, e^{(p+qi)x}$, $x^2 \; e^{(x+qi)x} \; x^{q-1} \; e^{(p+yi)x}$. ஆகும், $e^{(p+pi)x} = e^{px} \; (\cos qx + \sin qx)$ எனும் ஆயிலர் சூத்திரங்களால் இவற்றின் உருமாற்றம் பெற மெய், கற்பனை எண் பகுதிகளைத் தனித்தனியாகப் பிரித்தால் கிடைப்பது 2 α தீர்வுகள்.

$$\left.\begin{array}{l} e^{px}\cos qx, \quad x e^{px}\cos qx, \\ x^2 e^{px}\cos qx, \ldots \quad x^{\alpha-1} e^{px}\cos qx, \\ e^{px}\sin qx, \quad x e^{px}\sin qx, \\ x^2 e^{px}\sin qx, \ldots \quad x^{\alpha-1} e^{px}\sin qx. \end{array}\right\} \ldots (2.43)$$

$p - qi$ எனும் துணை கலப்பெண் மூலம் $p - pi$–கேற்ற மெய், கற்பனைத் தீர்வுகள் புதிய ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகள் யாதும் இல்லை. இவ்வாறு α முறை பொருந்தும் சோடிக் கலப்பெண் மூலம் $p \pm qi$க்கேற்ப 2α, ஒருபடிச்சாரா மெய்த் தீர்வுகள்—(2.43) கண்டவை—உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$y^{iv} + 2y'' + y = 0.$$

இதன் தன்மையுடைய சமன்பாடு $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$,

அல்லது $(k^2 + 1)^2 = 0$, இதன் இரட்டை மூலம் $\pm i$

இதன் பொதுத் தீர்வின் வடிவம்

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x.$$

2. ஆயிலர் சமன்பாடுகள் (Euler's equations)

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} \ldots a_{n-1} xy' + a_n y = 0 \quad \ldots \quad (2.44)$$

எனும் சமன்பாட்டில் a_i என்பவை நிலை எண்கள். இத்தகைய வடிவச் சமன்பாடுகள் ஆயிலர் (Euler) சமன்பாடுகள் எனப்படும். $x = e^t$* எனத் தனிமாறிக்குப் பிரதியிட இந்தச் சமன்பாடு நிலை எண் குணகங்கள் உள்ள சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடாக மாறும்.

99-ம் பக்கத்தில் கூறியதுபோல, சமபடித்தன்மையும் ஒருபடித்தன்மையும் இத்தகைய தனிமாறியை மாற்றம் செய்வதால் மாறுவதில்லை. குணகங்களும் நிலை எண்களாகவே இருக்கின்றன. ஏனெனில்,

* அல்லது $x = e^{-t}$, $x < 0$ என்றால், இங்கு திட்டமாகக் கூற $x > 0$ எனவே கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} e^{-t}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^ky}{dx^k} &= e^{-kt}\left(\beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} \dots + \beta_n \frac{d^ky}{dt^k}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot45)$$

இங்கு β_i என்பவை நிலை எண்கள் (2·44)-ல் உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட e^{-kt}, $x^k = e^{kt}$ எனும் காரணிகளால் வகுக்க முடியும்.

(2·45)-ன் தகுதியை உய்த்துணரும் முறையால் (method of induction) நிறுவலாம். அதற்கு (2·45)-ஐச் சரி எனக்கொண்டு, வகைக்கெழு காண, $\frac{d^{kh}y}{d^{kt+1}}$-க்கு எத்தகைய தொடர்பு வரும் எனக் காட்டவேண்டும்.

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} &= e^{(k+1)t}\left(\beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^3y}{dt^3} + \dots + \beta_k \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right), \\ &\quad - ke^{-(k-1)}\left(\beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + \beta_s \frac{d^ky}{dt^k}\right), \\ &= e^{-(k+1)t}\left(\gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{d^2y}{dt^2} = \dots \gamma_{k+1} \frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

இங்கு γ_i என்பவை நிலை எண்களாகும்.

இவ்வாறு (2·45)-ன் தகுதி நிறுவப்பட்டது. ஆகவே நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய பெருக்கற பலன்கள்

$$x^k \frac{d^ky}{dx^k} = \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} \dots \beta_k \frac{d^ky}{dt^k}$$

— ஆயிலர் சமன்பாடு $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^ky}{dx^k} = 0$-ல் ... (2·44)

ஒருபடியாக வருகின்றவை — புதிய தன் மாறியாக t-ன் சார் பலன் y-யும் அதன் வகைக்கெழுக்களும் (நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடியவை) ஆகக் கூறப்படுகின்றன. இதிலிருந்து நாம் முடிவிற்கு வருவது யாதெனில், மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு

$$b_0 \frac{d^ny}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \dots b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0 \quad \dots (2\cdot46)$$

என்பது நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு என்பதாம்.

இவ்வாறு ஆயிலர் சமன்பாட்டை நிலைஎண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடிச் சமன்பாடாகவும் $y = e^{kt}$ எனும் தீர்வுடையதாகவும், மாற்றுவதற்கு பதிலாக, நேரடியாக $y = x^k$ எனும் வடிவத்தில் தீர்வு, முதல் சமன்பாட்டிற்குக் காணமுடியும் ஏனெனில், $e^{kt} = x^k$.

(x^k என்பதால் வகுத்தபின்) வரும் சமன்பாடு

$$a_0 k(k-1) \ldots (k-n+1) - a_1 k(k-1) \ldots (k-n+2) \ldots + a_n = 0 \quad \ldots (2{\cdot}47)$$

ஏனெனில், k என்பதைக் காண முற்படும்போது அது (2·46)-ல் உள்ள மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக k இருக்கவேண்டும். ஆகவே, α_i முறை பொருந்தும் k_i எனும் மூலத்திற்கேற்ற தீர்வுகள் $e^{k_i t}$ $t\,e^{k_i t}$ $t^2 e^{k_i t}$ $t^{\alpha-1} e^{k_i t}$ ... இவை மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள். அல்லது $x^k, x^{k_i}, \ln x, x^{k_i}, \ln^2 x \ldots x^{k'} \ln^{k_i - 1} x$ என்பவை முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள். α_i முறை பொருந்தும் (2·47)-ன் கலப்பெண் சோடி மூலங்கள் $p + q_i$-க்கு ஏற்ற தீர்வுகள்,

$$e^{pt}\cos qt \quad t\,e^{pt}\cos qt \quad \ldots \quad t^{\alpha-1} e^{pt}\cos qt$$

$$e^{pt}\sin qt \quad t\,e^{pt}\sin qt \quad \ldots \quad t^{\alpha-1}\, pt \sin qt$$

இவை மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள்.

அல்லது

$$x^p\cos(q\ln x),\ x^p \ln x \cos(q\ln x) \ldots x^a \ln^{\alpha-1} x\cos(q\ln x)$$

$$x^p\sin(q\ln x)\ x^p \ln x \sin(q\ln x) \ldots x^a, \ln^{\alpha-1} x\sin(q\ln x)$$

இவை முதல் ஆயிலர் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} xy' - y = 0.$$

$y = x^k$ எனும் வடிவில் தீர்வு காணவேண்டும்.

$$k(k-1) + \frac{5}{2}k - 1 = 0.$$

ஆகவே,

$$k_1 = \frac{1}{2}\ k_2 = -2.$$

ஆகவே, பொதுத்தீர்வு $x > 0$ எனும்போது,

$$y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$x^2 y' - xy' + y = 0.$$

$y = x^k$ எனும் வடிவில் தீர்வு காணவேண்டும்.

$$k(k-1) - k + 1 = 0.$$

அல்லது,

$$(k-1)^2 = 0$$

$k_{1,2} = 1$ ஆகவே, $x > 0$ எனும்போது பொதுத்தீர்வு

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$x^2 y'' + x y' + y = 0$$

$y = x^k$ எனும் வடிவில் தீர்வு காணவேண்டும்.

$k(k-1) + k + 1 = 0$ ஆகவே, $k_{1,2} = \pm i$ ஆகவே $x > 0$ எனும்போது பொதுத்தீர்வு,

$$y = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x.$$

$$a_0 (ax+b)^n y^n + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = 0. \quad \ldots \quad (2\cdot 48)$$

எனும் வடிவில் உள்ள சமன்பாடுகளும் ஆயிலர் சமன்பாடுகள் எனப்படும். $ax + b = x_1$ எனப் பிரதியிட தனி மாறியை மாற்றி (2·44)-ல் உள்ள வடிவத்தில் சமன்பாடு காணப்படும். ஆகவே தனித்தீர்வுகள் $y = (ax+b)^k$ என்ற வடிவத்தில் காணலாம், அல்லது, (2·48)-ஐ $(ax+b) = e^t$ (அல்லது) $ax + b = -e^t$, $ax + b < 0$) எனப் பிரதியிட நிலை எண்ணுடன் கூடிய சமபடித் தான ஒருபடிச் சமன்பாடாக (2·48)-ஐ மாற்றலாம்.

5. சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்
(Non homogeneous linear equations)

சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் வடிவம்,

$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = \varphi(x)$ ஆகும்.

$a_0(x)$ ஆனது x மாறும் இடைவெளியில் $\neq 0$ என்றால் $a_0(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) \quad \ldots \quad (2\cdot 49)$$

(முன்னர் கூறிய குறியீட்டின்படி) இதனைச் சுருக்கி எழுத,

$L[y] = f(x)$.

$a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் (2·49)-ல் உள்ள குணகங்கள் $p_i(x)$ தொடர்ச்சியுடையனவாகவும், சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் $f(x)$-ம் தொடர்ச்சியுடையதாகவும் இருந்தால்,

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \; [k = 0, 1 \ldots (n-1)]$$

[இங்கு $y_0^{(k)}$ ஒரு மெய்யெண், x_0 என்பது $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் ஒரு புள்ளி] எனும் நியதிக்கேற்பத் தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வையுடையதாக இருக்கும். இந்த சமன்பாடு

ஏன் கீழ்வரும் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம்

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_n(x)y + f(x) \quad \ldots (2\;49_1)$$

துவக்கப் புள்ளிக்கு அண்மையில் உள்ளமை தனித்தன்மை தேற்ற நியதிகளுக்குட்பட்டதாக இருக்கும்.

அவை (1) வலப்பக்கம் எல்லா மாறிகளுக்கேற்பத் தொடர்ச்சியுடையதாதல்.

(2) $y^{(k)} (k = 0, 1, \ldots n-1)$ எனும் எல்லாவற்றிற்கும் சார்ந்த எல்லையுடைய பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உடையதாதல். ஏனெனில் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $-p_{n-k}(x)$ ஆகும். ஆனால், இவை கொள்கைப்படி $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையவை. மீண்டும் $y_0^{(k)}$ எனும் துவக்க மதிப்புக்கள் கட்டுக்கடங்கியவையல்ல என்பதையும் கவனிக்கிறோம்.

ஒருபடிச் செயலியின் கீழ்வரும் அடிப்படைத் தன்மைகள்,

$L(cy) - cL[y]$

$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L(y_2]$-லிருந்து ($c$ நிலை எண்) உடனே வரும் முடிவு.

1. $L[\bar{y}] = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு $\bar{y}$, இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாடு $L[y] = 0$ என்பதன் தீர்வு v_1 இவற்றின் கூடுதல் $\bar{y} + x_1$ (2 49)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

நிரூபணம் :

$$L[\bar{y} + y_1] - L[\bar{y}] + L[y_1].$$

ஆனால்,

$$L[\bar{y}] \equiv f(x), \quad L[y_1] \equiv 0.$$

ஆகவே,

$$L[\bar{y} + y_1] \equiv f(x).$$

2. $L[y] = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$-ன் தீர்வு y_i என்றால் α_i நிலை எண்களாக $L[y] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$-ன் தீர்வு $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\alpha_i y_i] \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i L[y_i] \quad (2.50)$$

ஆனால் $L[y_i] \equiv f_i(x)$ ஆகவே,

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x).$$

இந்தத் தன்மை ஒன்றன்மேல் ஒன்று பொருந்துதல் நெறி (Principle of superposition) எனப்படும். $m \to \infty$ எனும்போது $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ எனும் கந்தழித் தொடர் ஒழுங்கு தொடராகும் போதும் இந்த நெறி உண்மையாகும். அன்றியும் (2·50)-ல் உள்ள முற்றொருமையில் எல்லை அடையாளமாகையால் n உறுப்பு வாராக வகையிடு செய்தல் சாத்தியமாகும்.

3. $L[y] = U(x) + iV(x)$ எனும் சமன்பாட்டில் குணகங்கள் $p_i(x)$ யாவும் மெய்யெண்களாகவும், $v(x)$, $u(x)$ எனும் சார்பலன்களும் மெய்யெண்களாகவும் இருந்து, $y = U(x) + iV(x)$ என்பது அதன் தீர்வு ஆனால் தீர்வின் மெய்ப்பகுதி $U(x)$-ம், கற்பனைப் பகுதி $V(x)$-ம் முறையே $L[y] = U(x)$, $L[y] = V(x)$ என்பதன் தீர்வுகளாகும்.

நிரூபணம் : $L[u + iv] \equiv U(x) + iV(x)$

அல்லது $L[u] + iL[v] \equiv U(x) + iV(x)$

தனித்தனியே மெய்ப்பகுதிகள் $L[u] \equiv U(x)$

கற்பனைப் பகுதிகள் $L(v) \equiv V(x)$.

தேற்றம் 2·8. $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் $L[y] = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டில், குணகங்கள் $p_1(x)$-ம், வலப்பக்கம் $f(x)$-ம் தொடர்ச்சியாக இருக்க அதன் பொதுத்தீர்வு $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ என்ற அதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $\bar{y}$ என்ற சமபடித்தானமல்லாத சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வும் சேர்ந்த கூடுதலாகும்.

திருபணம் :
$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \bar{y}. \qquad \ldots \quad (2·51)$$

என்பது $L[y]=f(x)$ எனும் சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் பொது தீர்வு என நிறுவவேண்டும்

இதில் c_i என்பவை இச்சைக்கேற்ப உள்ள நிலை எண்கள் $y_i\ (i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை இதற்கொத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் ஒருபடிச் சாரத்தீர்வுகள் முதல் அமிட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம் (பக்கம் 11 — 2 பார்க்கவும்) இந்தச் சமன்பாடு உள்ளமை தனித்தேற்றத்து நிபதிக்குட்பட்டது என்பதையும் கொள்வோம். $a < x_0 < b$ எனும்படி துவக்க மதிப்புக்கள்

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}\ (k = 0, 1, \ldots n-1) \qquad \ldots \quad (2·52)$$

ஆக இருக்கும்படி c_i எனும் நிலை எண்களை காண முடியும் என நிறுவ வேண்டும். (2·52)-ல் உள்ள நிபந்தனை (2·51)-ல் உள்ள தொடர்பு உட்படக் கீழ்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதி கிடைக்கிறது.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) + \bar{y}(x_0) = y_0, \\
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y'_0, \\
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i''(x_0) + \bar{y}''(x_0) = y''_0, \\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
&\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) + \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (2·53)$$

இந்த n சமன்பாடுகள், c_i-ல் ஒருபடித்தானவை n அறிய ராசிகளைக் கொண்டவை, இச்சைகேற்பக் கொண்ட வலப் பக்கங்கள் உடையவை — இவை $c_i = (i = 1, 2, \dots n)$ எனும் மதிப்புக்களுக்குத் தனித்தன்மை (Unique) வாய்ந்த தீர்வு உடையவை. ஏனெனில் (2·53)-ன் அணிகோவை $W(y_1, \dots y_n)$ எனும் ரான்ஸ்கயன் ஆகும். சமபடித்தான சமன்பாட்டின், ஒருபடிச் சாரா தீர்வுகளை உடையது. $a < x < b$ எனும் இடைவெளியில் எந்த மதிப்புக்கு குறிப்பாக $x = x_0$ எனும் மதிப்புக்கு இது பூச்சியமல்ல.

ஆகவே, சமபடித்தானதல்லாத ஒரு படிச்சமன்பாட்டின் துண்தொகை (அல்லது தீர்வுகாணல்) என்பது சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண்பதுவும், ஏற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு காண்பதுவும் என்பதாக முடிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.

$$y'' + y = x$$

இதன் ஒரு சிறப்புத் தீர்வு x என்பது எளிதில் புலனாகிறது. இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (பக்கம் 113-ல் எடுத்துக்காட்டு 4 பார்க்கவும் . ஆகவே, முதலில் கொண்ட சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$.

ஒரு சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண்பது இயலாததாகவும், ஆனல் அதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ காணவும் முடிந்தால் துணை அலகுகள் மாறச் செய்முறையில் (Variations of parameters) சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு காண முடியும்.

இந்த முறையைப் பயன்படுத்தும்போது சமபடித்தானதல்லாத முழுத்தீர்வை $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_1$ என்ற வடிவத்தில் காண முயல்கிறேம். அதாவது y எனும் ஒரு அறியாச் சார்பலனுக்குப் பதிலாக, n அறியாச் சார்பலன்கள் $c_i(x)$-ஐப் புகுத்துகிறேம். இத்தகைய $c_i(x)$ $(i = 1, 2 \dots n)$ எனும் சார்பலன்கள்.

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} \dots p_n(x)\, y = f(x) \quad \dots \quad (2{\cdot}49)$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கிணங்கி இருக்கவேண்டுமாதலால், $c_i(x)$ எனும் n சார்பலன்கள் $(n-1)$ சமன்பாட்டிற்கு இணங்கியிருக்க வேண்டுமெனக் கோருகிறேம். இந்தச் சமன்பாடுகளைக் கொள்ளும்

போது $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x)$-ன் வகையீடுகள் c_i-ன் நிலை எண்கள் வடிவத்தில் உள்ளனவாக இயன்றவரைக் கொள்ள முயலுகிறோம். $c_i(x)$ கீழ்வருமாறு எடுத்துக்கொள்ளவும்.

அதாவது,

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i(x)\text{-ல்}$$

வலப் பக்கத்தில் இரண்டாவது கூடுதல் பூச்சியமாக இருக்கும் அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{n} i(x)\, y_i(x) = 0 \text{ எனும் படிக்—கொள்ளவும்.}$$

ஆகவே, $y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y'_i(x)$.

அதாவது, y'-ன் வடிவம் c_i-ன் வடிவம் போன்றதாகிறது. இதேபோல இரண்டாவது வகையீட்டில்

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y'' + \sum_{i=1}^{n} c'_i(x)\, y'_i\text{-ல்}$$

இரண்டாவது கூடுதல் பூச்சியமாயின் $c_i(x)$ கீழ்வரும் நியதிக்குட்பட்டதாக இருக்க வேண்டும்.

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(x)\, y'_i = 0.$$

தொடர்ந்து $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i$-ன் வகையீடுகள் $(n-1)$ வரிசை வரையிலும் ஒவ்வொரு முறையும் $\sum_{i=1}^{n} c_1'(x)\, y_i^{(k)}(x)$ பூச்சியமாகும்படிக் கணக்கிட அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(x\ \ y_i^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots \overline{n-2}) \quad (2{\cdot}54)$$

நாம் அடைவது,

$$\left.\begin{aligned}
y &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i, \\
y' &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y'_{(i)}, \\
y'' &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y''_i, \\
\dots & \quad \dots \quad \dots \\
y^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n-1)}, \\
y^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_1^{(n)} - 1 \sum_{i=1}^{n} c'_i(x)\, y_1^{(n-1)}
\end{aligned}\right\} \quad (2\cdot 55)$$

கடைசிச் சமன்பாட்டில் $\sum_{i=1}^{n} c'\, y_i^{(n-1)} = 0.$ என நாம் கோர முடியாது. ஏனெனில் $c_i(x)$ எனும் சார்பலன்கள் ஏற்கனவே (2·54)-ல் உள்ள $(n-1)$ நியதிக்குட்பட்டவை. அன்றியும் முதல் சமன்பாடாய் (2·49)-க்கும் ஒத்ததாக வேண்டும். (2·55)-ல் உள்ள $y, y', \dots y^{(n)}$-ஐ சமன்பாடாகிய,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-)} + \dots p_n(x)y = f(x) \qquad \dots \quad (2\cdot 49)$$

இதில் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது $c_i(x)$ $(i = 1, 2 \dots n)$ நிச்சயிக்கவேண்டிய சமன்பாடாகும். (2·49)-ல் உள்ள இடப் பக்கத்தில் கூடுதல் $\sum_{i=1}^{n} c'_i(x)\, y_i^{(n-1)}$ மட்டுமே எஞ்சி நிற்கும் என்பதை எளிதில் காணலாம். ஏனெனில், மற்றவை $y = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i$ எனும் சார்பலன், அதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டிற்கிணங்கி நின்று c_i நிலை எண்களாகும்போது என்ன வடிவமோ அதே வடிவில் மற்றைய உறுப்புக்களும் இருக்கும்.

இதை நாம் நம்பவேண்டுமானால், நேரடியாகக் கணக்கிட கிடைக்கும். அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}$$

$$+ p_2 \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = f(x)$$

அல்லது,

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \left[y_i^{(n)} + p_1(x) y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y_i \right]$$

$$= f(x) \qquad \dots \quad (2{\cdot}56)$$

எல்லா y_i-களும் ஒத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தனித்தீர்வுகளாகும். ஆகவே, $y_i^{(n)} + p_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_i \equiv 0$. ($i = 1, 2 \dots n$) சமன்பாடு (2·56)-ன் புது வடிவம்,

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i y_i^{(n-1)} = f(x) \text{ ஆகும்.}$$

சுருங்கக் கூறுமிடத்து, $c_i(x)$ ($i = 1, 2 \dots n$) எனும் சார்பலன்கள் கீழ்வரும் n ஒருபடிச் சமன்பாடுகளால் நிச்சயிக்கப்படுகின்றன.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y'_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y''_i = 0,\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_i^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (2{\cdot}57)$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் அணிகோவை பூச்சியமல்லாதது. ஏனெனில் இந்த அணிகோவை

$$\begin{vmatrix} y_2 & y & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y'_{(n-1)} \end{vmatrix}$$

சமன்பாட்டிற்கொத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் ரான்ஸ்கியன் அணிகோவையாகும். $c'_i(x) = y\ x)$ என (2·57)-ன் தீர்வு கண்ட பின்னர் நுண்தொகை காணவருவது $c_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + c_i$.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டில் பொதுத்தீர்வு $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. c_1, c_2 இவற்றை மாறும்படிச் செய்வோம். $y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$. (2·57)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து $c_1(x), c_2(x)$ காணப்படுகின்றன.

$$c'_1(x) \cos x + c'_2(x) \sin x = 0$$
$$-c'_1(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

ஆகவே $c'_1(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$. $c_1(x) = \ln(\cos x) + \bar{c}_1$

$$c'_2(x) = 1 \qquad c_2(x) = x + \bar{c}_2$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு $y = c_1 \cos x + \bar{c}_2 \sin x + \ln(\cos x) + x \sin x$.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $x = c_1 \cos at + c_2 \sin at$. நிலை எண்களை மாற்றச்செய்ய $x = c_1(t) \cos at + c_2(t) \sin at$

$$c'(t) \cos at + c_2(t) \sin at = 0.$$
$$-a c'_1(t) \sin at + a c'_2(t) \cos at = f(t).$$

இதிலிருந்து வருவது

$$c'_1(t) = -\frac{1}{a} f(t) \sin at, \quad c_1(t) = -\frac{1}{a}\int_0^t f(u) \sin au\,du + \bar{c}_1$$

$$c'_2(t) = \frac{1}{a} f(t) \cos at, \; c_2(t) = -\frac{1}{a}\int_0^t f(u) \cos au\,du + \bar{c}_2$$

$$x(t) = -\frac{\cos at}{a} f(u) \sin au\,du + \frac{\sin at}{a}\int_0^t f(u) \cos au\,du$$

$$+ \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at,$$

அல்லது

$$x(t) = \frac{1}{a}\int_0^t f(u) \; [\cos au \sin at - \sin au \cos at]\, du$$

$$+ \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at.$$

இதிலிருந்து கடைசியாகக் கிடைப்பது,

$$x(i) = \frac{1}{a}\int_0^t f(u) \sin a(t-u)\, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \sin at.$$

கவனிக்கவும் : வலப் பக்கத்து முதல் தொகை முதல் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு ஆகும். அது $x(0) = 0$, $x(0) = 0$ எனும் துவக்க மதிப்புக்குட்பட்டது. இவ்வாருக $L(y) = f(x)$ என்ற சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண, அதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் n ஒருபடிச்சாரத் தனித்தீர்வுகள் காணவேண்டும். பிறகு துணை அலகுகளை மாறச் செய்ய வேண்டும். இவ்வாறு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண இயலுகிறது.

இப்போது இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டில் $k < n$ எனவுள்ள $y_1, v_2, \ldots y_k$ எனும் k ஒருபடிச்சாரத் தீர்வுகள் மட்டும் அறிவோமானல் 107 — 108 பக்கங்களில் கண்டபடி மாறி மாற்றம் செய்ய ஒருபடித்தன்மை மாருமலேயே, அதன் வரிசையை $(n - k)$-க்குக் குறைக்கலாம். $k = (n - 1)$ என்ருல் சமன்பாட்டின் வரிசை ஒன்ரு மாறுகிறதெனவும் நுண்தொகை கண்டு முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண இயலும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

இதேபோல சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \ldots \bar{y}_k$ எனும் k தீர்வுகளைப் பயன்படுத்தலாம். ஏனெனில் அவற்றின் வேறுபாடுகள் அதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

உண்மையாக. $L[\bar{y}] \equiv f(x)$, $L[\bar{y}_p] \equiv f(x)$ என்ருல்,

$$L[\bar{y}_j - \bar{y}_p] \equiv L[\bar{y}_j] - L[\bar{y}_p] \equiv f(x) - f(x) \equiv 0$$

இதற்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தனித் தீர்வுகள்

$$(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_k), (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_k), \ldots, (\tilde{y}_{k-1} - \tilde{y}_k) \quad \ldots \quad (2.58)$$

என்பவை ஒருபடிச்சாராதனவானல் $L(y) = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டின் வரிசையை $n - (k - 1)$-க்குக் குறைக்க முடியும். $\tilde{y}_j - \tilde{y}_p$ எனும் இதர வேறுபாடுகள் (2.58)-ல் உள்ள தீர்வுகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கை என்பது எளிதில் புலனுகிறது. ஆகவே, வரிசையைக் குறைக்க அவைகளைப் பயன்படுத்த முடியாது.

$$L[y(x)] = f(x). \quad \ldots \quad (2{\cdot}59)$$

எனும் சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் தீர்வு காண காஷி முறை (cauchy's method) என ஒன்றுளது. இதில் தீர்வு $K(x, s)$ எனக் கொள்கிறோம். இந்தத் தீர்வு (ஒரு துணை அலகைச் சார்ந்தது). ஒத்த சமபடித்தான சமன்பாடு $L[y(x)] = 0$ தீர்வு ஆகும்.

$$K(s, s) = K(s, s) = \ldots = K'^{(n-2)}(s, s) = 0; \quad \ldots \quad (2{\cdot}60)$$

$$K^{(n-1)}(s, s) = 1. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2{\cdot}61)$$

எனும் நியதிக்குட்பட்டது.

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s)\, ds \quad \ldots \quad (2{\cdot}62)$$

என்பது (2·59)-ன் தனித் தீர்வு எனவும்

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{n-1}(x_0) = 0$$

எனும் துவக்க நியதிகளுக்குட்பட்டதெனவும் எளிதில் காணலாம்.

(2.60), (2.61) நியதிகளைக் கவனத்தில் கொண்டு (2·62)-ஐ வகையீடு செய்ய :

$$\left.\begin{aligned}
y'(x) &= \int_{x_0}^{x} K'_x(x, s) f(s)\, ds, \\
y''(x) &= \int_{x_0}^{x} K''_x(x, s) f(s)\, ds, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x, s) f(s)\, ds, \\
y^{n}(x) &= \int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x, s) f(s)\, ds + f(x).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2{\cdot}63)$$

(2·62)-ஐயும் (2.63)-ஐயும், (2·59)-ல் பிரதியிட நாம் அடைவது,

$$\int_{x_0}^{x} L\,[K(x,s)]\,f(s)\,ds + f(x) \equiv f(x),$$

ஏனெனில், $K(x, s)$ என்பது ஒத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வும் $L\,[K(x,s)] \equiv 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வும் ஆகும்.

பொதுத் தீர்வாகிய $y = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i\,(x)$ எனும் சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்விலிருந்து (2·30), (2·61) என்பதற்கேற்ப c_i-க்களைக் கொண்டால், $K(x, s)$ எனும் தீர்வை பொதுத் தீர்வினின்று அகற்றிக் காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

$$y'' + a^2 y = f(x) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2·64)\text{-ன்}$$

பொதுத் தீர்வு $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$ (2.60), (2·61) உள்ள நியதிகள் கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தருகின்றன:

$$c_1 \cos\, as + c_2 \sin\, as = 0.$$

$$-ac_1 \sin as + ac_2 \cos as = 1.$$

ஆகவே, $c_1 = -\dfrac{\sin as}{a}$, $c_2 = \dfrac{\cos as}{a}$. நாம் கோரிய தீர்வு $K(x, s)$

$$K\,(x, s) = \frac{1}{a} \sin a\,(x - s)$$

எனும் வடிவில் உள்ளது.

(2.62)-ன் படி, துவக்க நியதிக்குக் கட்டுப்பட்ட (2.64)-ன் தீர்வை,

$$y\,(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \sin\, a\,(x - s)\,f\,(s)\,ds.$$

எனக் குறிக்க முடியும்.

$x_0 = 0$ என்பதற்கு (பக்கம் 143 — 144ஐப் பார்க்கவும்), மாற்று முறைப்படி முன்னர் கண்ட தீர்வுடன் இந்தத் தீர்வு பொருந்தும்.

$K(x, s)$ எனும் சார்பலனுக்கு இயல்பியல் (Physical) விளக்கம் கூற முடியும். அதே போல (2·62)-ல் உள்ள வலப் பக்கம் உள்ள ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கும் விளக்கம் கூற முடியும். தனி மாறியை 't' எனக் குறிப்பது மிகவும் உகந்தது.

அனேக கணக்குகளில்,

$$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\, y = f(t) \qquad (2{\cdot}65)$$

இன் தீர்வு $y(t)$ ஒரு தொகுதியின் இடப்பெயர்ச்சியை விளக்குவதாக இருக்கும். $f(t)$ என்பது விசையையும் 't' என்பது காலத்தையும் தருவதாகும்.

$t < s$ எனும்போது தொகுதி ஓய்வு நிலையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். $s < t < s + \varepsilon$ என்ற இடைவெளியில் பூச்சியமல்லாத விசை $f_\varepsilon(t)$ எனக்கொள்வோம். இந்த விசையின் உந்தம் ஒன்று. அதாவது,

$$\int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\, d\tau = 1.$$

$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\, y = f_\varepsilon(t)$-ன் தீர்வு $y_\varepsilon(t)$ எனக்குறிப்போம். $\varepsilon \to 0$ எனும் போது $y_\varepsilon(t)$ எனும் எல்லை உள்ளது என எளிதில் சரிபார்க்க முடியும். $f_\varepsilon(t)$ என்பது குறி மாறுதது எனக்கொள்ள அதனைச்சாராது அந்த எல்லையிருக்கும் ஏன் ?

$$y_\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)\, f_\varepsilon(s)\, ds.$$

இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த $t > s + \varepsilon$ எனும் வெளிக்கு நாம் அடைவது,

$$y_\varepsilon(t) = K(t, s+\varepsilon^*) \int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\, d\tau = K(t+s+\varepsilon^*),$$

$0 < \varepsilon^* < \varepsilon$ எனும் இடைவெளியில்.

ஆகவே $\lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) = K(t, s)$. ஆகவே $K(t, s)$ எனும் சார்பலனை $t = s$ எனும் நேரத்து உந்தத்தின் 'வினை செய் சார்பலன்' (influence function) எனக் கூறலாம்.

(t_0, t) எனும் இடைவெளியை $s_i\ (i = 0, 1, \ldots, m)$ எனும் புள்ளிகளாய் m சம இடைவெளிகளாகப் பிரித்து - அவற்றின் நீளம் $\Delta s = \dfrac{t - t_0}{m}$ — (2·65)-ல் உள்ள சார்பலன் $f_i(t)$-ஐ $f_i(t)$ எனும் சார்பலன்களின் கூடுதலாகக் கூறலாம். இங்கு $f_i(t)$ என்பது $s_{i-1} < t < s_i$ எனும் இடைவெளியில் மட்டும் பூச்சியமல்லாது $f(t)$ உடன்பொருந்தும்.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t).$$

மேற்பொருந்தும் கொள்கைப்படி, (2·65)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i(t) \text{ எனும் வடிவமாகும்.}$$

இங்கு $y_i(t)$ என்பது, பூச்சியத்தைத் துவக்க மதிப்புகளாக உடைய

$$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ \ldots\ + p_n(t) y = f_i(t)\text{-ன்}$$

தீர்வுகளாகும். m மிகமிக அதிகமானுல் $y_i(t)$ என்பதை $f_i(s_i)$ Δs எனும் வீர்யமுடைய நேர உந்தத்தின் விளைசெய் சார்பலன் எனக்கருதலாம்.

$$\text{ஆகவே } y(t) \simeq \sum_{i=1}^{m} K(t, s_i) f(s_i) \Delta s$$

$m \to \infty$ எனும்போதுள்ள எல்லையைக் கணக்கிட (2·65)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்கு பூச்சியத்தைத் துவக்க மதிப்புக்களாக உடைய தீர்வை

$$y = \int_{t_0}^{t} K(t, s) f(s)\, ds \text{ எனும்}$$

வடிவில் அடைகிறோம். இது எதைக் காட்டுகிறதென்றால், நிலையாகச் செயல்படும் விசையை நேர உந்தங்களின் விளைகளின் கூடுதல் எனக் கருதலாம் என்பதாம்.

6. நிலை எண் குணகங்களுடன்கூடிய சமபடித்தான தல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடுகளும் ஆயிலர் சமன்பாடுகளும்

(Non-homogeneous linear equations with constant coefficients and Euler's Equations)

பல இடங்களில், சமபடித்தானதல்லாத, நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை விடுவிக்கும்போது கஷ்டமில்லாமல் சில தனித்தீர்வுகளைக் கண்டு, ஏற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வுகாணும் கணக்குகளாக ஒடுக்க முடியும்.

உதாரணமாக, வலப்பக்கம் s படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகுக. அப்போது சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y =$$
$$= A_0\, x^s + A_1\, x^{s-1} + \dots + A_s, \qquad \dots \quad (2\cdot 66)$$

இங்கு a_j-க்களும் A_i-க்களும் நிலை எண்களாகும். $a_n \neq 0$ ஆனால், (2.66)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்கு s படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைத் தீர்வு உள்ளது. ஏன் $y = B_0\, x^s + B_1\, x^{s-1} + \dots + B_s$ என (2·66)-ல் இட்டு ஒரேபடியுள்ள இடப்பக்க, வலப்பக்க x உறுப்புக்களின் குணகங்களை ஒப்பிட B_i எனும் குணகங்களைக் காணக் கீழ்வரும் ஒருபடிச் சார்புகள் வருகின்றன. $a_n \neq 0$ என்றால் அதன் தீர்வுகாண முடியும்.

$$a_n\, B_0 = A_0, \quad B_0 = \frac{A_0}{a_n}\ .$$

ஆக $a_n\, B_1 + s\, a_{n-1}\, B_0 = A_1$ ஆகவே B_1 காணமுடியும்,

$$a_n\, B_2 + (s-1)\, a_{n-1} B_1 + s\,(s-1)\, a_{n-2}\, B_0 = A_2,$$

ஆகவே B_2 வின் மதிப்பு வருகிறது.

. . . .

$a_n B_s + \dots = A_s$ எனவே,

B_s-ன் மதிப்புத் திட்டப்படுத்தப்படுகிறது.

இவ்வாறு $a_n \neq 0$, என்றால் வலப்பக்கப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படிக்குச் சமமான படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் சிறப்புத் தீர்வு உள்ளது.

இப்போது $a_n = 0$ என்போம். பொதுவாக, கூறுவதற்காக $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_{n-\alpha+1} = 0$ ஆனால் $a_{n-\alpha} \neq 0$ என்போம்).

அதாவது $k = 0$ என்பது தன்மையுடைய சமன்பாட்டின் α முறை வரும் மூலமாகும் $\alpha = 1$ எனவும் ஆகலாம். அப்போது (2·66)-ல் உள்ள சமன்பாடு அடையும் வடிவம்,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha}\, y^{(\alpha)} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s. \quad \dots \quad (2\cdot67)$$

$y^{(\alpha)} = z$ எனக்கொள்ள முன் சொன்ன கணக்காக வருகிறது. ஆகவே (2·67)-க்குச் சிறப்புத் தீர்வு உள்ளது. இங்கு

$$y^{(\alpha)} = B_0 x_s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s.$$

ஆகவே y என்பது $(s + \alpha)$ படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். அல்லாமலும், $(\alpha - 1)$ படியும் அதற்குக் கீழும் உள்ள உறுப்புக்களின் குணகங்கள் நம் இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட நிலை எண்கள். இங்கு அவற்றை பூச்சியமாகக் கொள்ளலாம். அப்போது சிறப்புத் தீர்வின் வடிவம்,

$$y = x^{\alpha}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

எடுத்துக்காட்டு 1

$$y'' + y = x^2 + x. \quad \dots \quad (2\cdot68)$$

இதன் சிறப்புத் தீர்வின் வடிவம்

$$y = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

இதனை (2·68)-ல் பிரதியிட்டு ஒரேபடியுள்ள x-ன் குணகங்களை ஒப்பிட நாம் அடைவது

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -2, \quad \tilde{y} = x^2 + x - 2$$

ஆகவே, பொதுத்தீர்வு $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 + x - 2$

எடுத்துக்காட்டு 2

$$y'' + y' = x - 2.$$

$y = x\,(B_0 x + B_1)$ எனும் வடிவில் சிறப்புத் தீர்வு காண வேண்டும். இதனைச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு ஒரேபடியுள்ள x-ன் குணகங்களை ஒப்பிட

$$B_0 = \tfrac{1}{2}, \quad B_1 = -3, \quad \tilde{y} = x\,(\tfrac{1}{2}x - 3).$$

ஆகவே, பொதுத்தீர்வு $y = c_1 + c_2\, e^{-x} + x\,(\tfrac{1}{2}x - 3)$.

இப்போது,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s \quad \dots \quad (2\cdot69)$$

எனும் வடிவில் உள்ள சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாட்டைக் கவனிப்போம். இங்கு எல்லா a_j-க்களும் A_j-க்களும் நிலை எண்களாகும். (பக்கம் 129—130 ஐப் பார்க்கவும்) முன்னர் கூறியதுபோல $y = e^{pxz}$ என மாறி மாற்றம் செய்ய சமன்பாடும் அடையும் வடிவம்

$$e^{px}[b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z] = e^{px}[A_0 x^s + A_1 x^{s-1} \dots A_s].$$

அல்லது

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_n z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s \quad \dots (2{\cdot}70)$$

இங்கு எல்லா b_j-க்களும் நிலை எண்கள். $b_n \neq 0$ என்ருல் சிறப்புத் தீர்வின் வடிவம் $\bar{z} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s$,

ஆகவே, (2·69)-ன் சிறப்புத் தீர்வு

$$\bar{y} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s) \text{ ஆகும்.}$$

$b_n \neq 0$ எனும் நியதி

$$b_0 \bar{k}^n + b_1 \bar{k}^{n-1} + \dots + b_n = 0 \quad \dots (2{\cdot}71)$$

எனும் தன்மையுடையச் சமன்பாட்டிற்கு $\bar{k} = 0$ என்பது மூலம் அல்ல என்பதைக் காட்டுகிறது.

ஆகவே $k = p$ என்பது

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a^n = 0. \quad \dots (2{\cdot}72)$$

எனும் தன்மையுடையச் சமன்பாட்டின் மூலம் அல்ல. ஏனெனில் இந்தத் தன்மையுடைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களிடையேயுள்ள தொடர்பு $k = \bar{k} + p$ ஆகும். (பக்கம் 130—131 ஐப் பார்க்கவும்).

இப்போது, (2·71)-ன் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலம் α முறை பொருந்தும் $k = 0$ ஆனுல், அல்லது வேறு விதமாகக் கூறுமிடத்து (2·72)-ன் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் α முறை பொருந்தும் மூலம் $k = p$ ஆனுல் (2·70), (2·69) இவற்றின் சிறப்புத் தீர்வுகள் முறையே கீழ்க்கண்ட வடிவத்தில் உள்ளன.

$$\bar{z} = x^{\alpha}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s)$$

$$\bar{y} = x^{\alpha} e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s).$$

சுருக்கிக் கூறுமிடத்து: நிலை எண்குணங்களுடன் கூடிய ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்க வடிவம்.

$$e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s)$$

ஆனுல், p தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் அல்லாதாயின், சிறப்புத் தீர்வும் அதே வடிவத்தில், அதாவது,

$$\tilde{y} = e^{px}(B_0x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + E_s).$$

எனும்படிக் காணவேண்டும்.

ஆனுல், தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலம் α முறை பொருந்தும் p ஆனுல் (இதனை தனி அல்லது திரும்பும் முறை என்பர்) சிறப்புத் தீர்வு

$$\tilde{y} = x^{\alpha} e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s)$$

எனும் வடிவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$$y'' + 9y = e^{5x}$$

இதன் சிறப்புத் தீர்வு $\tilde{y} = B\,e^{5x}$ வடிவில் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

$$y'' + y = e^{3x}(x - 2).$$

இதன் சிறப்புத் தீர்வு $\tilde{y} = e^{3x}(B_0x + B_1)$ வடிவில் காண வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

$$y'' - y = e^{x}(x^2 - 1)$$

இதன் சிறப்புத்தீர்வு $\tilde{y} = x\,e^{x}(B_0x^2 + B_1x + B_2)$ வடிவில் காணவேண்டும். ஏனெனில், தன்மையுடைச் சமன்பாட்டுக்கு $k=1$ சாதாரண மூலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5).$$

$\tilde{y} = x^3 e^{-x}(B_0x + B_1)$ வடிவில் சிறப்புத் தீர்வுக் காண வேண்டும். ஏனெனில் $k = -1$ என்பது தன்மையுடைச் சமன் பாட்டின் மும்முறை பொருந்தும் மூலமாகும்.

மேற்சொன்ன காரணங்களும் முடிவுகளும் p கலப்பெண்ணு யினும் பொருந்தும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

ஆகவே ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம்

$$e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx] \quad \dots \quad (2{\cdot}73)$$

என இருந்து, $P_s(x)$ அல்லது $Q_s(x)$-ல் ஒன்று s படியுடைய பல் லுறுப்புக் கோவையாகவும், மற்றது s-க்கு மேற்படாத படியுடைய

தாகவும் இருந்தால் கோணச் சார்பலன்களை ஆயிலர் சூத்திரங்களால் படிச் சார்பலனுக்கு (Exponenital functions) மாற்ற வலப் பக்கம் $e^{(p+qi)x} R_s(x) + e^{(p-qi)x} T_s(x)$ என வருகிறது. ... (2.74)

இங்கு $R_s(x)$: $T_s(x)$ என்பவை s படி பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும்.

மேற்சொன்ன விதியை வலப்பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் பயன்படுத்தலாம். அதாவது $p \pm qi$ என்பது தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலமல்லவானல், (2·74)-ன் வலப் பக்க வடிவிலேயே தீர்வைக் காணமுடியும். ஆனல் $p \pm qi$ என்பது α முறை பொருந்து மூலமானல் சிறப்புத் தீர்வுக்கு x^{α} எனும் குணகமும் சேர்கிறது. மீண்டும் கோணச் சார்பலனுக்கேற்ற இந்த விதியை வகுப்போம் :

(a) $p \pm qi$ என்பது தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அல்லவானல் சிறப்புத் தீர்வை $\bar{y} = e^{px} [\overline{P}_s(x) \cos qx + \overline{Q}_s(x) \sin qx]$ எனும் வடிவில் காணவேண்டும். இங்கு $\overline{P}_s(x)$, $\overline{Q}_s(x)$ என்பவை s படியுள்ள தேராக் குணகங்களுடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும்.

$P_s(x)$ அல்லது $Q_s(x)$-ல் ஏதேனும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின்படி Q-க்குக் குறைவாகவோ, அல்லது சிறப்பாகவா, பூச்சியமாகவோ ஆனல் அப்போதும், பொதுவாகக் கூறுமிடத்து $\overline{P}_s(x)$ அல்லது $\overline{Q}_s(x)$ எனும் இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளும், s படியாக இருக்கும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(b) $p \pm qi$ என்பது α முறை பொருந்து மூலமானல் சிறப்புத் தீர்வை

$$\bar{y} = x^{\alpha} e^{px}[\overline{P}_s(x) \cos qx + \overline{Q}_s(x) \sin qx]$$

எனும் வடிவில் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$$

$\pm 2i$ எனும் எண்கள் தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களானதால் $\bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x$ எனும் வடிவில் சிறப்புத் தீர்வுகள் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

$\pm 2i$ என்பது தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் இருமுறை பொருந்தும் மூலமானதால் சிறப்புத் தீர்வின் வடிவம் $\bar{y} = x\,(A \cos 2x + B \sin 2x)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

$y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$ தன்மையுடைச் சமன்பாட்டுக்கு $\pm i$ என்பன இருமுறை பொருந்தும் மூலங்கள் ஆதலால் சிறப்புத் தீர்வின் வடிவம்.

$$\bar{y} = x^2\,(A \cos x + B \sin x) \text{ ஆகவேண்டும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10

$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\,(x \cos + 3 \sin x)$ $-1 \pm i$ என்பன தன்மையுடைச் சமன்பாட்டின் சாதாரண மூலங்கள் ஆகவே, சிறப்புத் தீர்வின் வடிவம்.

$$\bar{y} = x\,e^{-x}\,[\,(A_0 x + A_1) \cos x + (B_0 x + B_1) \sin x].$$

பல இடங்களில் (2.73)-ன் வடிவில் வலப் பக்கமுடைய ஒரு படித்தான நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண படிச்சார் பலனுதவியை நாடுதல் நலம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y'' - 2y' + y = \cos x$ எனும் சமன்பாட்டில் ஆயிலர் சூத்திரப்படி $\cos x$-ஐ மாற்றலாம். அல்லது மிகவும் எளிதாகக் கூற

$$y'' - 2y' + y = e^{ix} \qquad \ldots \quad (2{\cdot}75)$$

இச் சமன்பாட்டில் சிறப்புத் தீர்வின் மெய்யெண் பகுதி முதல் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

(2.75)-ன் சிறப்புத் தீர்வை $y = A\,e^{ix}$ வடிவில் காண வேண்டும். அப்போது $A = \frac{i}{2}$. $y = \frac{i}{2}\,(\cos x + i \sin x)$.

ஆகவே முதல் சமன்பாட்டின் சிறப்பு,

$$\bar{y}_1 = \text{மெய்.}\; y = -\tfrac{1}{2} \sin x.$$

பல இடங்களில் நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித் தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண 'செயலி முறையை'ப் பயன்படுத்தலாம்.

நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வைச் செயலி முறையில் காணல் வகை.

k வரிசையுடைய வகைக்கெழுக்களுக்குப் பின்வரும் குறியீடுகளைத் தருவோம்.

$$\frac{d^k y}{dx^k} = D^k y.$$

இந்தக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

எனும் சமன்பாட்டை

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_n y = f(x) \text{ என எழுதுவோம்.}$$

அல்லது $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$ ...(2·76)

கோவை $a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$ என்பது பல்லுறுப்புச் செயலி (Operator polynomial) எனப்படும். இந்தப் பல்லுறுப்புச் செயலியை சுருக்கமாக $F(D)$ எனக் குறிப்போம். (2·76)-ல் உள்ள சமன்பாட்டை $F(D) y = f(x)$ எனும் வடிவில் எழுதலாம்.

கீழ்வரும் உண்மைகளை எளிதில் நிலைநாட்டலாம்:

1. $F(D) e^{kx} \equiv e^{kx} F(k)$,
2. $F(D^2) \sin ax \equiv \sin ax \, F(-a^2)$,
3. $F(D^2) \cos ax \equiv \cos ax \, F(-a^2)$,
4. $F(D) e^{kx} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k) v(x)$.

1. ஏன், $F(D) e^{kx} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n) e^{kx} =$

$$= e^{kx} (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n)$$
$$= e^{kx} F(k).$$

2. $F(D^2) \sin ax =$

$$= (a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \ldots + a_{n-1} D^2 + a_n) \sin ax =$$
$$= [a_0(-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} (-a^2) + a_n] \sin ax =$$
$$= \sin ax \, F(-a^2)$$

மூன்றாவது முற்றொருமையையும் இதேபோல் நிறுவலாம்.

3. $F(D^2) \cos ax = \cos ax \, F(-a^2)$.

$$4. \quad F(D)\,e^{kx}\,v(x) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\; D^p\;[e^{kx}\,v(x)]$$

$$= e^{kx} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\,[k^p v\;(x) + p\,k^{p-1}\,Dv +$$

$$+ \frac{p\,(p-1)}{2!}\,k^{p-2}\,D^2\,v + \dots + D^p v] =$$

$$= e^{kx} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\,(D+k)^p v =$$

$$= e^{kx}\,F(D+k)\,v\,(x).$$

களி $F_1(D)$, $F_2(D)$ என்ற செயலின் கூடுதல் $[F_1(D)+F_2(D)]$ எனும் செயலி ஆகும். $f(x)$ன் மேல் இது செயல்படும்போது அதனை

$$[F_1(D) + F_2(D)]\;f(x) = F_1(D)\;f(x) + F_2(D)\;f(x)$$

எனும் சமன்பாட்டால் விளக்கலாம்.

இந்த விளக்கத்திலிருந்து வருவது,

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\;D^p + \sum_{p=0}^{n} b_{n-p}\,D^p =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (a_{n-p} + b_{n-p})\,D^p$$

ஏனெனில், n முறை வகையீடு செய்வதற்குரிய சார்பலன் ஒன்றின் மீது இட, வலப்பக்கங்கள் செயல்படும்போது ஒரே முடிவு வருகிறது. அதாவது சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவையின் கூடுதல் விதி பல்லுறுப்புச் செயலிக் கோவைகளுக்கும் பொருந்தும்.

மிகவும் பலமுறை வகையீடு செய்வதற்குரிய ஒரு சார்பலன் மீது $F_1(D)$. $F_2(D)$ எனும் இரு செயலிகளின் பெருக்கற்பலன் செயல்பட்டால் $[F_1(D).\,F_2(D)]\,f(x) = F_1(D)\,[F_2(D)\,f(x)]$ என வரும். அதாவது செயலிகளில் வலக்காரணி முதலில் $f(x)$ன் மேல்

செயல்படும். இந்த விளக்கத்தின் அடிப்படையில் பார்த்தால் சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவைப் பெருக்கலுக்கும் செயலிக் கோவைப் பெருக்கலுக்கும் உள்ள விதிகளில் வேறுபாடில்லை என எளிதில் காணலாம்.

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p} D^p \sum_{q=0}^{m} b_{m-q} D^q =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} a_{n-p}\, b_{m-q}\, D^{p+q}, \qquad \ldots (2{\cdot}77)$$

ஏனெனில்,

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p} D^p \sum_{q=0}^{m} b_{m-q} D^q f(x) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} D^p \left[\sum_{q=0}^{m} b_{m-q} f^{(q)}(x) \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} a_{n-p}\, b_{m-q}\, f^{(p+q)}(x).$$

இது $f(x)$-ன் மேல் $\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} a_{n-p}\, b_{m-q}\, D^{p+q}$

எனும் செயலி செயல்படும்போது வரும் முடிவுடன் பொருந்தும்.

$$F_1(D)\, F_2(D) = F_2(D)\, F_1(D).$$

சிறப்பாக (2.77)லிருந்து செயலிப் பெருக்கல் மாற்று விதிக்கு (Commutative Law) உட்பட்டதெனக் காண்கிறோம்.

$$F(D)\,[F_1(D) + F_2(D)] = F(D)\, F_1(D) + F(D)\, F_2(D)$$

என்பது கூடுதலில் வகையீடு செய்யும் விதியிலிருந்து வருகிறது. அதாவது, பரவு விதிக்கும் செயலி உட்பட்டதெனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, கூட்டல், பெருக்கல் எனும் கிரியைகள் சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்குப் பொருந்துவது போன்றே, பல்லுறுப்புச் செயலிகளுக்கும் பொருந்துமெனக் காண்கிறோம்.

இப்போது $\frac{1}{F(D)}$ எனும் செயலியின் பொருளை விளக்குவோம்.

$$F(D)\,y = f(x) \qquad \dots \quad (2{\cdot}78)$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = \frac{1}{F(D)}\, f(x)$ என்பதே தொடர்ச்சியுடைச் சார்பலன் $f(x)$-ன் மீது $\frac{1}{F(D)}$ செயல்படும் போது வரும் முடிவாகும்.

ஆகவே, $F(D)\left[\frac{1}{F(D)} f(x)\right] \equiv f(x) \qquad \dots \quad (2{\cdot}79)$

$\frac{1}{F(D)} f(x)$ என்பது குறிப்பிட்ட துவக்க நியதிக்குட்பட்ட (2·78)-ன் தீர்வு எனக் கருதலாம். இருந்தாலும் நமது காரியத்திற்கு $\frac{1}{F(D)} f(x)$ என்பது (2·78)-ன் ஒரு தீர்வு (எந்தத் தீர்வு என்பது பொருட்டல்ல) எனக் கருதுவதே நலம். ஆகவே $f(x)$ எனும் சார்பலன்மேல் $\frac{1}{F(D)}$ எனும் செயலியின் செயல், ஒத்த சமபடித் தான சமன்பாட்டின் தீர்வின் கூடுதல் என மட்டுமே விளக்க முடியும். $\frac{1}{F(D)}$ எனும் செயலியின் செயலை இவ்வாறு விளக்கும் போது சமன்பாடு

$$\frac{1}{F(D)}\,[F(D) + f(x)] = f(x) \qquad \dots \qquad \dots \quad (2.80)$$

என்பது சரியாகும். ஏனெனில் $f(x)$ என்பது

$F(D)y = F(D)\,f(x)$ என்பதன் ஒரு தீர்வு

என்பதை எளிதில் அறியலாம்.

$\frac{1}{F(D)}$ ஆல் $\Phi(D)$ எனும் செயலியைப் பெருக்க வருவதை

$\Phi(D)\frac{1}{F(D)} f(x) = \Phi(D)\left[\frac{1}{F(D)} f(x)\right]$ எனும்

சமன்பாட்டால் சொல்லலாம்.

இதே போல $\frac{1}{F(D)}\,\Phi(D)\,f(x) = \frac{1}{F(D)}\,[\Phi(D)\,f(x)]$

ஆகையால் (2·79), (2·80)-ல் உள்ள சூத்திரங்களில் அடைப்புக்கள் தேவையில்லை.

அன்றியும் $\frac{1}{D^p} f(x) = \int\int \ldots \int f(x)\, dx^p$ என்பதையும்

கவனிக்கவும். ஏனெனில் $\frac{1}{D^p} f(x)$ என்பது $D^p(y) = f(x)$-ன்

ஒரு தீர்வு என $\frac{1}{F(D)}$-ன் விளக்கத்தால் காண்கிறோம்.

கீழே $\frac{1}{F(D)}$-ன் சில தன்மைகளைச் சரி பார்ப்போம்.

(1) $\frac{1}{F(D)} k f(x) = k \frac{1}{F(D)} f(x)$, இங்கு k நிலை எண் காரணி.

ஏனெனில், $F(D)\, k \frac{1}{F(D)} f(x) = kF(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = k f(x)$.

(2) $\frac{1}{F(D)} e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}$, $F(k) \neq 0$ ஆக இருந்தால்

ஏன் $\frac{e^{kx}}{F(k)}$ என்பது $F(D)\, y = e^{kx}$ என்பதன் தீர்வு ஆகும்.

ஏனெனில் பக்கம் 155-ல் உள்ள சூத்திரம் (1)-ன் படி

$$F(D)\frac{e^{kx}}{F(k)} \equiv \frac{F(k)\, e^{kx}}{F(k)} \equiv e^{kx}$$

(3) $\frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}$, $F(-a^2) \neq 0$ என்றால்

$\frac{\sin ax}{F(-a)^2}$ என்பது $F(D^2)\, y = \sin ax$ என்பதன் தீர்வு ஆகும்.

ஏனெனில் பக்கம் 155-ல் உள்ள இரண்டாவது சூத்திரத்தின்படி

$$F(D^2) \frac{\sin ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \sin ax \equiv \sin ax.$$

(4) $\frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$ $F(-a^2) \neq 0$ என்றால்

ஏனெனில், பக்கம் 155-ன் சூத்திரம் (3)-ன்படி.

$$F(D^2) \frac{\cos ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{(F-a^2)} F(-a^2) \cos ax \equiv \cos ax$$

(5) $\frac{1}{F(D)} e^{kx}\, v(x) = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$.

ஏன் $e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$ என்பது $F(D)\, y = e^{kx}\, v(x)$ எனும்

சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். ஏனெனில் பக்கம் 155-ல் சூத்திரம் (4)-ன்படி,

$$F(D)e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}v(x)=e^{kx}F(D+k)\frac{1}{F(D+k)}v(x)$$
$$\equiv e^{kx}v(x)$$

(6) $\frac{1}{F(D)}[f_1(x)+f_2(x)]=\frac{1}{(F(D)}f_1(x)+\frac{1}{F(D)}f_2(x)$

இது மேற் பொருந்தும் கொள்கையின் கிளை முடிவு (Corollary to principle of super position) ஆகும். (பக்கம் 137 பார்க்கவும்.)

(7) $\frac{1}{F_1(D)\cdot F_2(D)}f(x)=\frac{1}{F_1(D)}\cdot\frac{1}{F_2(D)}f(x)$

அதாவது,

$$y=\frac{1}{F_1(D)}\left[\frac{1}{F_2(D)}f(x)\right] \quad \ldots (2\cdot 81)$$

என்பது,

$$F_1(D)F_2(D)y=f(x) \quad \ldots (2\cdot 82)$$

என்பதன் தீர்வு ஆகும்.

(2·81)-ஐ (2.82)-ல் பிரதியிட நாம் அடைவது,

$$F_2(D)F_1(D)\frac{1}{F_1(D)}\left[\frac{1}{F_2(D)}f(x)\right]\equiv F_2(D)\frac{1}{F_2(D)}f(x)\equiv f(x)$$

சமபடித்தானதல்லாத நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் சிறப்புத் தீர்வை செயலி முறையில் காணும் முறையைச் சில உதாரணங்களால் கீழே காட்டுவோம்:

(1) $y''+4y=e^x$ அல்லது $(D^2+4)y=e^x$ ஆகவே,

$$y=\frac{1}{D^2+4}e^x=\frac{e^x}{5}.$$

(2) $y^{IV}+y=2\cos 3x$ அல்லது $(D^4+1)y=2\cos 3x$,

$$y=\frac{1}{D^4+1}2\cos 3x=\frac{2\cos 3x}{(-9)^2+1}=\frac{1}{41}\cos 3x$$

(3) $y''+9y=5\sin x$, $(D^2+9)y=5\sin x$,

$$y=\frac{1}{D^2+9}5\sin x=\frac{5\sin x}{-1+9}=\frac{5}{8}\sin x$$

(4) $y''-4y'+4y=x^2e^{2x}$, $(D-2)^2y=x^2e^{2x}$

$$y=\frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}x^2=e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2=e^{2x}\frac{x^4}{12}.$$

(5) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x (D-1)^3 y = e^x$

$$y = \frac{1}{(D-1)^3} e^x, \text{ இங்கு}$$

$F(k) = 0$ பக்கம் (160)ல் இரண்டாவது சூத்திரத்திற்குப் பதில் (5) சூத்திரம் பயன்படுத்துவோம்; e^x என்பதை $e_0 \cdot 1$, எனும் பெருக்கற்பலனைக் கருதுவோம்,

$$y = \frac{1}{(D-1)^3} e^x \cdot 1 = e^x \frac{1}{D^3} \cdot 1 = e \frac{x^3}{6}$$

(6) $y''' - y = \sin x$, $(D^3 - 1) y = \sin x$ ... (2·83)

இங்கு செயலியில் D-ன்படி ஒற்றை எண்ணாக வருவதால் (4) சூத்திரம் பயன்படுத்த முடியாது. ஆகவே, இந்தச் சமன் பாட்டிற்குப் பதிலாக

$(D^3 - 1) y = e^{ix}$ என்பதைப் பார்ப்போம்

அல்லது $(D^3 - 1) y = \cos x + i \sin x$. ... (2·84)

(2.80)-ன் கற்பனைப் பகுதி முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும் (பக்கம் 146 பார்க்கவும்).

$$y = \frac{1}{D^3 - 1} e^{ix} = \frac{e^{ix}}{i^3 - 1} = \frac{-e^{ix}}{1+i}$$

$$= \frac{(-1+i)(\cos x + i \sin x)}{2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\cos x \sin x + \frac{i}{2}(\cos x - \sin x).$$

இதன் கற்பனைப் பகுதி $\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$ என்பது (2.83)ன் தீர்வு ஆகும்.

(7) $y'' + y = \cos x \, (D^2 + 1) y = \cos x$, $y = \frac{1}{D^2+1} \cos x$

$F(-a^2) = 0$ ஆனதால் 159 பக்கம் சூத்திரம் (3) பயன்படாது. ஆகவே மீண்டும் இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு பதில் $y'' + y = e^{ix}$ அல்லது $y'' + y = \cos x + i \sin x$ இதனைக் கொள்ளவும். தீர்வின் மெய்ப்பகுதி முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

$$(D^2 + 1) y = e^{ix}; \; y = \frac{1}{D^2+1} e^{ix} = \frac{1}{(D-i)(D+i)} e^{ix}$$

$$= \frac{1}{(D-i)} \frac{e^{ix}}{2i} = \frac{e^{ix}}{2i} \frac{1}{D} 1 = \frac{e^{ix} x}{2i} = \frac{x(\cos x + i \sin x)}{2i}$$

இதன் மெய்யெண் பகுதி $\frac{x \sin x}{2}$ என்பதே முதல் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு ஆகும்.

(8) $y^{IV} - y = e^x, (D^4 - 1)y = e^x, y = \frac{1}{D^4 - 1} e^x$

$$= \frac{1}{(D-1)} \frac{1}{(D+1)(D^2+1)} e^x = \frac{1}{D-1} \frac{e^x}{4}$$

$$= \frac{1}{4} e^x = \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{x e^x}{4}.$$

இப்போது $P_p(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை மீது $\frac{1}{F(D)}$ எனும் செயலி எவ்வாறு செயல் படுகிறதெனப் பார்ப்போம்.

1ஐ முறைக்கு பல்லுறுப்புக்கோவை

$$F(D) = a_n + a_{n-1}D + \dots + a_0 D^n \qquad \dots \qquad (a_n \neq 0)$$

என்பதால் வகுப்போம். இது D-ன் படியில் ஏறுவரிசையில் அமைந்துள்ளது. சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தல் விதியைப் பின்பற்றுவோம். ஈவு p படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையாக வரும்போது வகுத்தலை நிறுத்துவோம்.

அதாவது ஈவு $= b_0 + b_1 D + \dots + b_p D^p = Q_p(D)$

மீதி $R(D) = C_{p+1} D^{p+1} + C_{p+2} D^{p+2} + \dots + C_{p+n} D^{p+n}$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இது $(p+1)$க்குக் குறையாத படியுள்ள செயலி D-ஐ உடையதாகும். ஈவு, மீதி, வகுக்கும் எண் இவற்றிடையே தொடர்பின்படி நாம் அடைவது

$$F(D)\, Q_p(D) + R(D) \equiv 1. \qquad \dots \qquad (2{\cdot}85)$$

இந்த முற்றொருமை சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்குப் பொருந்தும். ஆனால் கூட்டல் பெருக்கல் விதிகள் சாதாரண பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு உள்ளது போலவே, செயலிப் பல்லுறுப்புக்கோவைக்கும் அமையுமாதலால் அவற்றிற்கும் இந்த முற்றொருமை பொருந்தும்.

(2·85)-ன் வல இடப் பக்கங்கள்,

$A_0 x^p \times A_1 x^{p-1} + \dots + A_p$ன் மேல் செயல்பட நாம் அடைவது,

$$[F(D)\, Q_p(D) + R(D)]\, (A_0 x^p + A_1 x^p + \dots + A_p)$$
$$= A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p.$$

$R(D)\,(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_x) = 0$ என்பதை மனதில் கொள்ள (ஏனெனில் $R(D)$-ல் D-ன் படி $(p+1)$-க்கு குறைவாக இல்லாததால்) நாம் அடைவது $F(D)\,[f_p(D)\,(A_0x^p + A_1x^{p1} + \ldots A_p) \equiv A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A^p$.

அதாவது,

$$Q_p\,(D)\,(A_0x)^p + A)\,x^{p-1} + \ldots + A_p) \text{ என்பது,}$$

$$P\,(D)\,y = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p\text{-ன் தீர்வு ஆகும்.}$$

ஆகவே,

$$\frac{1}{F\,(D)}\,(A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots A_p) = Q_p(D)(A_0x^p + \ldots + A_p).$$

எடுத்துக்காட்டாக,

(9) $y'' + y = x^2 - x + 2$

$$(D^2 + 1)y = x^2 - x + 2$$

$$y = \frac{1}{D^2 + 1}\,(x^2 - x + 2)$$

1-ஐ $1 + D^2$ ஆல் வகுக்க $Q_2\,(D) = 1 - D^2$ ஆகவே,

$$y = (1 - D^2)\,(x^2 - x + 2)$$

$$= x^2 - x.$$

(10) $y'' + y = x \cos x$

$$(D^2 + 1)\,y = x \cos x$$

இங்கு $(D^2 + 1)y = xe^{ix}$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொள்வோம். பிறகு மெய்ப்பகுதியைக் கொள்வோம்.

$$y = \frac{1}{D^2 + 1}\,x^2\,e^{ix} = e^{ix}\,\frac{1}{D\,(D + 2i)}\,x$$

$$= e^{ix}\,\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2i} + \frac{D}{4}\right)x$$

$$= e^{ix}\,\frac{1}{D}\left(\frac{x}{2i} + \frac{1}{4}\right) = e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right)$$

$$= (\cos x + i \sin x)\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{4}{x}\right)$$

மெய்பகுதியைக் கொள்ள நாம் அடையும் தீர்வு

$$\frac{x^2}{4}\sin x + \frac{x}{4}\cos x.$$

குறிப்பு : மேற்சொன்ன எடுத்துக்காட்டு $\frac{1}{F(D)}$-யில் $a_n = 0$ இருந்தால் எவ்வாறு செயல்படவேண்டும் என்பதை விளக்குகிறது.

$F(D)$ என்பதை $D^s \phi(D)$ என்போம். இங்கு $\phi(D)$-ல் தனி உறுப்பு (absolute term) பூச்சியமல்ல. பல்லுறுப்புக் கோவை மீது முதலில் $\frac{1}{\phi(D)}$-ஐச் செயல் படுத்துவோம். அதற்குப்பிறகு செயலி $\frac{1}{D^s}$ செயல்படும்.

சமபடித்தானதல்லாத ஆயிலர் (Euler) சமன்பாடுகள்

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \quad \ldots 2{\cdot}86$$

அல்லது,

$$a_0 (ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \quad \ldots (2{\cdot}87)$$

இதன் தீர்வுகாண, இதற்கேற்ற சமபடித்தானச் சமன்பாட்டின் தீர்வு கண்டு (பக்கம் 137). பிறகு சமபடித்தான தல்லாத சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வோ அல்லது துணை அலகு மாற்றம் செய்தோ தீர்வு காணவேண்டும். இருப்பினும் சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வைக்கண்டு, ஆயிலர் சமன்பாட்டை $x = \pm e^t$ [சமன்பாடு (2·87)க்கு $ax + b = e_{\pm t}$]. என மாறி மாற்றம் செய்து நிலை எண் குணகங்கள் கொண்ட சமன்பாடு கண்டு சிறப்புத் தீர்வு காணுதல் எளிதாகும். சிறப்புத் தீர்வு காண முறைகள் நன்ருக விளக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 11.

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x \ln x \qquad (2{\cdot}88)$$

$y = x^k$ எனும் வடிவில் இதற்கேற்ற சமப்படித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு காண முயல்வோம்.

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \qquad (2{\cdot}89)$$

$k_{1,2} = 1$ ஆகவே சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வின் வடிவம் $y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x$. $x = e^t$ என ராசி மாற்றம் செய்ய (2·88)-ல் உள்ள சமன்பாடு,

$y''(t) - 2y'(t) + y = t^3 e^t$ என நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமன்பாடாகிறது. [(2·89)-ன் தன்மையுடை சமன்பாட்டிலிருந்து இதன் இடப் பக்கம் உடனே எழுதலாம்.] மாறிலி சமன்பாட்டின் தீர்வை செயலி முறையாய் எளிதில் காணலாம்.

$$y = \frac{1}{(D-1)^2} e^t t^3 = e^t \frac{1}{D^2} t^3 = \frac{e^t t^5}{20} y = x \frac{\ln^5 x}{20}.$$

ஆகவே (2·88)-ல் உள்ள முதல் சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வின் வடிவம்

$$y = \left(c_1 + c_2 \ln x + \frac{\ln^5 x}{20} \right) x.$$

7. தொடர் வழியாகச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்.
(Integration of Differential Equations by means of series.)

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad \dots (2·90)$$

எனும் n வரிசைச் சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதென்பது n அல்லது குறைந்த பட்சம் $(n-1)$ தனித்தீர்வுகளைக் காண்பதாகிறது. மிகவும் குறைவான இடங்களிலேயே தனித் தீர்வுகள் எளிதில் எடுக்க முடிகிறது. சிக்கலான இடங்களில், தனித் தீர்வை $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i(x)$ எனும் தொடர்க்கூடுதல் வடிவத்தில் காண முயலுகிறோம். குறிப்பாக இந்ததொடர் படித்தொடராகவோ, விஸ்தரித்த படித்தொடராகவோ (Generalised Power series) இருத்தல்வேண்டும்.

எந்தெந்த நியதிகள் இருந்தால் தொடர்க்கூடுதல் அல்லது விஸ்தரித்த தொடர்க்கூடுதல் தீர்வு உள்ளதென்பதை கற்பனை எண் சார்பலன் கொள்கை முறையால் நிறுவ முடியும். ஆனால் வாசகர்கள் இதற்கு அறிமுகமானவர்களான எண்ணுதலால், அடிக்கடி பயன்படும்.

இரண்டாம் வரிசை சமன்பாடுகளுக்கேற்றபடியுள்ள அடிப் படைத்தேற்றங்கள் நிருபணமில்லாமல் கொடுக்கப்படுகின்றன.

தேற்றம் 2·9 (தீர்வின் பகுப்பாய்வுத் தன்மை) $x = x_0$ எனும் புள்ளிக் கணிமையில் $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ என்பவை பகுப் பாய்வுச் சார்பலன்களானுல் $p_0(x_0) \neq 0$ என்ருல்,

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \quad \dots (2·91)$$

என்பதன் தீர்வுகளும் அதே புள்ளிக்கணிமையில் பகுப்பாய்வுத் தன்மையுடையன. ஆகவே (2 91)-ன் தீர்வுகளை

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

எனும் வடிவில் காண முற்படலாம்.

தேற்றம் 2 10. (விஸ்தரித்த படித்தொடரில் தீர்வைக் கூற முடியும் தன்மை).

(2·9)-ல் உள்ள சமன்பாடு மேற்கூறிய தேற்ற நியதிகட்கு உட்பட்டு இருக்கட்டும். ஆனல் $x = x_0$ என்பது $p_0(x) = 0$ என்பதன் அளவுக்குட்பட்ட s வரிசை மூலமாகவும். $p_1(x) = s - 0$ என்பதன் அளவுக்குட்பட்ட $(s-1)$ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வரிசை மூலமாகவும், ($s > 1$ எனும்போது). அத்துடன், $p_2(x) = 0$ என்பதன் $(s-2)$ வரிசைக்குக் குறையாத மூலமாகவும் இருந்தால் (2 91)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்கு சாரமுள்ள ஒரு தீர்வாகிலும்

$$y = a_0 (x - x_0)^k + a_1 (x - x_0)^{k+1} + \ldots + a_n (x - x_0)^{k+n} \quad \ldots (2·92)$$

எனும் வடிவில் உள்ளது. இங்கு k என்பது முழு எண்ணே அல்லது பின்னமோ, மிகைஎண்ணே அல்லது குறை எண்ணே ஆகவுள்ள மெய்யெண்ணாகும்.

இரண்டாவது தீர்வும், (2·92)-க்கு ஒருபடிச் சாராதிருப்பதுடன், பொதுவாக விஸ்தரித்தபடித் தொடர் வடிவில் இருக்கும். ஆனல் சில சமயங்களில், படித் தொடரும் $\ln(x - x_0)$ எனும் காரணியும் சேர்ந்த பெருக்கற்பலனாகவும் இருக்கும்.

ஆனாலும், குறிப்பிட்ட கணக்குகளில் இப்போது சொன்ன இரு தேற்றங்கள் தேவையில்லாமலே செய்யலாம். அதுவும், படித் தொடரின் ஒருங்கு அரங்கம் என்னவென்று விளக்கப்படாததால், திட்டமாகக் கொண்ட கணக்குகளில் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்திய படித் தொடரை அல்லது விஸ்தரித்த படித் தொடரைக் கொள்வதே சாதாரண வழக்கமாகும். அதாவது பிரதியிட்டால் (2·90)-ன் n வரிசை சமன்பாட்டை முற்றொருமையாக்கும் படித்தொடர். இதற்கு படித்தொடர் ஒருங்கும் என்றும், n முறை வகையிட முடியுமெனவும் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு முறையாகத் தீர்வை படித்தொடர் வடிவில் கண்ட பின்னர் பிறகு ஒருங்குமா என்பதையும் n முறை வகையிட முடியுமா என்பதை ஆராய வேண்டும். எந்த எண் அரங்கில் ஒருங்குகிறதோ, எங்கு n முறை வகையிட முடிகிறதோ, அங்கு சமன்பாட்டிற்கும் முறையாகப் பொருந்துவதல்லாமல், அதன் கூடுதலே நாம் கோரிய தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

$$y'' - xy = 0 \quad \ldots (2·93)$$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ எனும் தொடரில் இதன் தீர்வைக் காண முயல்வோம்.

தேற்றம் 2·9-லிருந்து அல்லது முறைப்படி உறுப்புவாரியாக தொடரை இருமுறை வகையீடு செய்து (2·93)-ன் சமன்பாட்டில் பிரதியிட நாம் அடைவது,

$$\sum_{n=2}^{n} a_n\, n\,(n-1)\, x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{n} a_n\, x^n = 0$$

இடப் பக்கம் வலப் பக்கமுள்ள இந்த முற்றொருமையின் x-இன் ஒத்தபடியின் குணகங்களை ஒப்பிட

$$a_2 = 0; \quad 3\cdot2\, a_3 - a_0 = 0. \text{ ஆகவே}$$

$$a_3 = \frac{a_0}{2\cdot3}\, 4\cdot3\, a_4 - a_1 = 0. \text{ ஆகவே } a_4 = \frac{a}{3\cdot4}$$

$$5\, a_5 - a_2 = 0 \quad \text{ஆகவே } a_5 = \frac{a_2}{4\cdot5} \cdots$$

$$n\,(n-1)\, a_n - a_{n-3} = 0 \quad \text{ஆகவே, } a_n = \frac{a_{n-3}}{(n-1)\, n} \cdots$$

ஆகவே,

$$a_{3n-1} = 0; \quad a_{3n} = \frac{a_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6 \ldots (3n-1)\, 3n}$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot4 6\cdot7 \ldots 3n\,(3n+1)}\, (n=1,\, 2,\, \ldots)$$

a_0-ம் a_1ம் நிச்சயிக்கப்படாத இச்சைக்கேற்பக் கொண்டவை. இவ்வாறு,

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2\cdot3\cdot5\cdot6 \ldots (3n-1)(3n)} + \cdots\right]$$

$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7} + \cdots \frac{x^{3n+1}}{3\cdot4\, 6\cdot7 \ldots 3n\,(3n+1)} + \cdots\right] \quad \ldots (2\cdot94)$$

இந்தப்படித்தொடரின் ஒருங்கு ஆரம் எண்ணிலி ஆகும். ஆகவே (2·94)-ல் உள்ள தொடரின் கூடுதல், x-இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0 \quad \ldots (2\cdot95)$$

இதை n வரிசை பெஸ்ஸல் (Bessel) சமன்பாடு என்பர். ஆனால் ஆயிலர் பெர்னலி (Bernoulli) இவர்கள் நூல்களிலேயே இது காணப்படுகிறது. கணித இயற்பியல் பிரச்சினைகள் பல

பெஸ்ஸல் சமன்பாட்டிற்கு ஒடுங்குகின்றன. ஆகவே இதை விரிவாக ஆராய்வோம்.

தேற்றம் 2·10-ன்படி, $y \equiv \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}$ எனும் விஸ்தரிக்கப்பட்ட தொடரின் கூடுதலாக சாரமுள்ள ஒரு தீர்வேனும் காண முடியும். இதனை உறுப்பு வாரியாக இருமுறை வகையிடு செய்து (2·95)-ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2} + \ldots$$

$$+ x \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p) x^{k+p-1} + (x^2-n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p} = 0$$

சமன்பாட்டின் வல இடப்பக்கம் உள்ள ஒத்த படியுள்ள x-ன் குணகங்களை, நாம் அடைவது,

$$a_0 [k^2 - n^2] = 0,$$
$$a_1 [(k+1)^2 - n^2] = 0,$$
$$[(k+2)^2 - n^2] a_2 + a_0 = 0,$$
$$[(k+3)^2 - n^2] a_3 + a_1 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(k+p)^2 - n^2] a_p + a_{p-2} = 0.$$

x-ன் மிகக்குறைந்த படியின் குணகம் a_0 பூச்சியமல்ல எனக் கருதுவதால் முதல் சமன்பாடு,

$$k^2 - n^2 = 0 \text{ என ஆகிறது.}$$

ஆகவே, $k = \pm n$

திட்டமாகக்கூற $k = n > 0$ என்போம். அப்போது இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து,

$a_1 [(n+2)^2 - n^2] = 0 \quad a_1 = 0$ ஆகவே, எல்லா $a_{2p+1} = 0$.

$$a_2 = \frac{-a_0}{(n+2)^2 - n^2} = -\frac{a_0}{2^2 (n+1)}$$

$$a^4 = \frac{-a_2}{(n+4)^2 - n^2} = -\frac{a_2}{2^2 (n+2)^2} = \frac{a_0}{2^4 (n+1)(n+2)\, 1\cdot 2}$$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\, p!\, (n+1)(n+2) \ldots (n+$$

$k = -n$ நாம் பெறுவது. இதேபோல,

$$a_{2p+1} = 0 \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! (-n+1)(-n+2) \ldots (-n+p)}$$

$k = n$ என்ருல் நாம் பெறும் தீர்வு

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! (-n+1)(-n+2) \ldots (-n+p)}$$

a_0 எனும் இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் நிலை எண்ணை

$a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ [Γ என்பது ஆயிலரின் காமா சார்பலன்]

எனக்கொண்டால் தீர்வை இன்னும் லகுவாக எழுதலாம்.

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx \quad p > 0 \quad \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

என்பதை ஞாபகப் படுத்திக்கொள்ளவும்.

அப்போது, $y = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!\,\Gamma(n+p+1)}$

இந்தத் தீர்வு சாதாரணமாக $J_n(x)$ என எழுதப்படும். இதனை n வரிசை முதல்வகை பெஸ்ஸல் சார்பலன் என்பர் (Bessel's function of the first kind of orders).

$k = -n_1$ என்பதற்கும் $a_0 = \dfrac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$ எனக் கொள்ளும்போதும் இதுபோல முதல்வகை $-n$ வரிசை பெஸ்ஸல் சார்பலன்,

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}}{P!\,\Gamma(-n+P+1)} \quad \ldots \quad (2.97)$$

என்பதை அடைகிருேம்.

(2·96). (2·97)-ல் உள்ள தொடர்கள் x-ன் எந்த மதிப்புக்கும் [2·97-ல் $x \neq 0$) ஒருங்கும். அத்துடன் 2' முறை உறுப்பு வாரி வகையீடு செய்ய இயலும். ஆகவே, $J_n(x)$ $J_{-n}(x)$ என்பவை (2·95)-ல் உள்ள பெஸ்ஸல் சமன்பாடுகளின் தீர்வு ஆகும்.

n முழு எண்ணல்ல எனின், தீர்வுகள் $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ ஒருபடிச் சாராதிருக்கும் என எளிதில் அறியலாம். ஏனெனில் அதன் விரிவுகள் x அடுக்குகளில், வேறு வேறான அடுக்குகளில் வருகின்றன. ஆகவே, $\alpha_1 J_{-n}(x) + \alpha_2 J_n(x)$ எனும் ஒருபடிச் சேர்க்கை பூச்சியத்திற்கு முற்றொருமையாகச் சமன்பட $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ என இருக்கவேண்டும்.

n என்பது ஏதாவது முழு எண்ணானல், $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ எனும் சார்பலன்களின் விரிவுகள் ஒரே அடுக்குடைய x-ல் தொடங்கும். ஏனெனில் $p = 0$ என்பதற்கும் p-ன் தறை முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும் சார்பலன் $\Gamma(p)$ எண்ணிலி ஆகிறது. எளிதில் கீழ்க்காணும் தொடர்பு $J_{-(n)}(x) = (-1)^n J_n(x)$ என்பதையும் சரிபார்க்க முடியும்.

ஆகவே n முழு எண்ணாகும்போது $J_{-n}(x)$க்குப் பதிலாக $J_n(x)$ உடன் ஒரு படிச்சார்பு இலாத இன்னொரு தீர்வு காண முயல வேண்டும். பல வகைகளில் ஒரு தீர்வைக் காணலாம். எடுத்துக் காட்டாக $J_n(x)$-ன் ஒரு தனித்தீர்வைக் கண்ட பின்னர் பக்கம் 122-ல் காட்டியிருப்பது போலப் பிரதியிட்டு (2 25)-ல் உள்ள சமன்பாட்டு வரிசையைக் குறைக்க முடியும். அல்லது நேரடியாக விஸ்தரிக்கப்பட்ட தொடர் வடிவிலும், அதனை $J_n(x)$ஆல் பெருக்கின வடிவிலும் தீர்வுகாண முடியும். இவ்வாறு ஏதேனும் முறையால் கண்ட [$J_n(x)$ உடன் ஒருபடிச்சாராத] தீர்வு பெஸ்ஸலின் இரண்டாவது வகைச் சார்பலன் எனப்படும். இதனை $y_n(x)$ எனக் குறிப்பர்.

இருந்தாலும் $y_n(x)$-ஐப் பெரும்பாலும் பின்வருமாறு விளக்கப்படும். n-ஐ முழு எண்ணல்ல என்போம்.

$$y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \text{ என}$$

$J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ன் சார்பலன்கள் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கொள்வோம், பிறகு n முழு எண்ணை அடையும்போது இதன் எல்லை என்ன என்பதைப் பார்ப்போம். இவ்வாறு n-ன் முழு எண் மதிப்புக்கும் வரையறுக்கப்பட்ட [$J_n(x)$ உடன் ஒருபடிச் சாராத] பெஸ்ஸல் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y_n(x)$ வருகிறது.

இவ்வாறு n முழு எண்ணல்லாதபோது பெஸ்ஸல் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வின் வடிவம்

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x).$$

n முழு எண் என்றல்,

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x).$$

இங்கு c_1, c_2 என்பவை இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட நிலை எண்களாகும்.

முதல், இரண்டாவது வகை பெஸ்ஸல் சமன்பாடுகள் விரிவாக ஆராயப்பட்டுள்ளன. குறிப்பாக பல மதிப்புக்களுக்கு பட்டியல் விரிவாகத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே ஒரு பிரச்சினையை பெஸ்ஸல் சமன்பாட்டு வடிவில் கொண்டுவந்தால் அதன் தீர்வு எவ்வாறு a காணச்சார்பலன்களுக்கு பிரச்சினைகளை ஒடுக்கினுல் காணமுடியுமோ அதுபோன்று காணப்படும் எனலாம்.

அடிக்கடி பயனுறு கணக்குகளில் கீழ்வரும் சமன்பாடு காணப்படுகிறது.

$$x^2 y'' + xy' + (m^2 x^2 - n^2)\, y = 0 \qquad \ldots \quad (2.98)$$

$x_1 = mx$ எனப் பிரதியிட இதனை பெஸ்ஸல் சமன்பாட்டிற்கு ஒடுக்கலாம். ஏன், இவ்வாறு ராசிமாற்றம் செய்ய,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1}\,\frac{dx_1}{dx} = \frac{dy}{dx_1}\, m,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx_1^{\,2}} \; m^2.$$

(2.98)-ன் சமன்பாடு,

$$x_1^{\,2}\frac{d^2y}{dx_1^{\,2}} + x_1\frac{dy}{dx_1} + (x_1^2 - n^2)\, y = 0.$$

என பெஸ்ஸல் சமன்பாடாக மாறுகிறது. இவ்வாறு (2·98)-ன் பொதுத் தீர்வு n முழு எண்ணல்லாதபோது,

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 J_{-n}(mx).$$

n முழு எண் என்ருல்

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2\, Y_n(mx).$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$x^2 y'' + xy' + (4x^2 - \tfrac{9}{25})\, y = 0.$$

இதன் பொதுத்தீர்வின் வடிவம்,

$$y = c_1 J_{\frac{3}{5}}(2x) + c_2 J_{-\frac{3}{5}}(2x).$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$$x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)\, y = 0.$$

பொதுத்தீர்வு,

$$y = c_1 J_2(x\sqrt{3}) + c_2\, Y_2(x\sqrt{3})$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தீர்வுக் காண்க :

$$x^2y'' + xy' + (4x^2 - \tfrac{1}{9})y = 0.$$

$x = 0$ எனும் இடத்தில் தீர்வு தொடர்ச்சியுடையதாகவும் $y(0{\cdot}3) = 2$ ஆகவும் வேண்டும். பொதுத்தீர்வு,

$$y = c_1 J_{\frac{1}{3}}\ (2x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}\ (2x)$$

சார்பலன் $J_{-\frac{1}{3}}\ (2x)$ என்பது $x = 0$ எனுமிடத்து தொடர்ச்சியறுபட்டதாகிறது. ஏனெனில் (2·97)-ல் உள்ள தொடர் x-இன் குறை எண் படிகளில் தொடங்குகிறது. ஆகவே y எனும் தீர்வு $x = 0$ தொடர்ச்சியுடையதாக $c_2 = o$ ஆகவேண்டும்.

$$y = c_1\ J_{\frac{1}{3}}\ (2x).$$

இரண்டாவது நியதிக்குட்ட

$$y(0{\cdot}3) = 2 \quad \text{ஆகவே}$$

$$c_1 = \frac{2}{J_{\frac{1}{3}}\ (0{\cdot}6)}$$

பெஸ்ஸல் பட்டியலில் $J_{\frac{1}{3}}(0{\cdot}6) = 0{\cdot}700$ எனக் காணப்படுகிறது இவ்வாறு $c_1 \approx 2{\cdot}857$

$$y \approx 2{\cdot}857\ J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

பயன்படு கணக்குகளில் திரும்பு சார்புத் தீர்வுகள் சிலவகைக் கெழுச் சமன்பாட்டுக்குத் தேவைப்படும். இந்த இடங்களில் தீர்வை ஃபாரியர் (Fourier) தொடராகிய

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi n}{l}\left(t + B_n \sin\frac{n\pi}{l}\right)$$

எனும் வடிவில் காண்பது நல்லது.

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x} \ \ldots \ x^{(n-1)}) \qquad \ldots \qquad 2{\cdot}99$$

எனும் சமன்பாட்டுக்கு T எனும் அலைவு காலத்துடன் கூடி $x_0(t)$ என்பது தீர்வானுல். (2·99)-ன் வலப் பக்கம் வேண்டிய தீர்வு வரையில் முதல் சார்பில் T எனும் அளவு காலத்துடன் கூடிய திரும்புச்சார்பு என்பதைக் கவனிக்கவும். ஏன், $x = x_0(t)$ என்பதை (2·99)ன் சமன்பாட்டில் பிரதியிட நாம் அடையும் முற்றொருமை

$$x_0^{(n)}(t) = F(t\ x_0'(t), x_0(t), \ \ldots \ x_0^{(n-1)}(t)$$

என்பதாம். இந்த முற்றொருமையில் t-க்குப் பதிலாக $t+T$ எனப் பிரதயிட — $x_0(t)$–எனும் சார்பலன், அதனுடைய வகைக்கெழு இவற்றுடைய அலைவு காலத்தால் — இடப்பக்கம் மாறாதிருக்கும். அத்துடன் இரண்டாவது உறுப்பாயிருந்து தொடங்கும் ராசியும் மாறாது.

ஆகவே,

$$F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots x_0^{(n-1)}(t)) \equiv$$
$$\equiv F(t+T, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots x_0^{(n-1)}(t).$$

அதாவது, $x = x_0(t)$ எனும் தீர்வு வரையில் F எனும் சார்பலன் வெளிப்படையாகத் தோன்றும் 't' எனும் ராசியில் T எனும் அலைவு காலம் உள்ளதாகும்,

ஆகையால், (2·99)-ன் சமன்பாட்டின் வலப் பக்கம் [ஏதேனும் $x_0(t$ க்கு] முதல் ராசியில் திரும்பு சார்பு அல்லவானால், அலைவு காலமுள்ள தீர்வும் இல்லை. F என்பது வெளிப்படையாக t ஐச் சார்ந்து நிற்காது இருந்தால், அதாவது 't' ஐச் சார்ந்து அது நிலையானால், F என்பது ('t' ஐச் சார்ந்து) ஏதேனும் அலைவு காலமுள்ள திரும்பு சார்பாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே ஏதேனும் அலைவு காலமுள்ள தீர்வு இல்லை எனச் சொல்ல முடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) \qquad (2\cdot100)$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வை அலைவுகாலமுள்ளதாகக் கூற வேண்டும் என்போம். திருப்பு சார்பலன் தீர்வாக இருக்க, f என்பதவும் திருப்பு சார்பு எனக் கொள்ளவேண்டும். $f(t)$-ஐ 2π எனும் அலைவுகாலமுள்ளது. எனக்கொள்வதில் தவறு இல்லை. ஏனெனில் $f(t)$-ன் அலைவுகாலம் T என்றால் $t_1 = \frac{2\pi}{T}t$ என தனிமாறியை மாற்றம் செய்ய 't_1' எனும் புதிய தனிமாறியில் 2π எனும் அலைவுகாலமுள்ள சார்பலனாக வலப்பக்கம் மாறுகிறது.

அத்துடன் $f(t)$ தொடர்ச்சியுடையதெனவும் ஃபோரியர் தொடரில் விரிவுள்ளதெனவும் கொள்வோம்.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad \ldots \quad (2.101)$$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \quad \ldots \quad (2.102)$$

எனும் அலைவுகாலமுள்ள தீர்வின் வடிவைக் காணவேண்டும்.

(2.102)ஐ முறையாக உறுப்புவாரியாக இருமுறை வகையீடு செய்து (2.100)ல் பிரதியிட நாம் அடைவது,

$$- \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [A_k \cos kt + B_k \sin kt]$$

$$+ a^2 \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

ஆகவே, a என்பது முழு எண்ணல்லாவிடில் (2.102)-ல் உள்ள குணகங்களைத் திட்டப்படுத்துவோம்.

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2 A_0}{2} &= \frac{a_0}{2} \qquad A_0 = \frac{a_0}{a^2} \\ (a^2 - k^2)\, Ak &= ak, \quad Ak = \frac{a_k}{a^2 - k^2} \\ (a^2 - k^2)\, B_k &= b_k, \quad B_k = \frac{b_k}{a^2 - k^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2.103)$$

ஆகவே. $\dfrac{a_0}{2a^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + k_k \sin kt}{a^2 - k^2}$ ... (2.104)

என்பது (2.100)ன் முறையான தீர்வுத் தொடராகும்.

(2·104)-ல் உள்ள தொடர் ஒருங்கும் என்பதும், உறுப்பு வாரியாக வகையீடு செய்யற்குரியதெனவும் எளிதில் புலனாகிறது. ஏனெனில் $f(t)$ என்பது தொடர்ச்சி யுடையதாகையால் (2·101)-ல் உள்ள தொடர் சீராக ஒருங்கக்கூடியது அல்லாமலும்,

$- \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (a_k \cos kt + b_k \sin kt)}{a^2 - k^2}$ ...(2·105)-ல் உள்ள தொடரில்

குணகங்கள் (2·104)-ன் இரண்டாவது வகையீட்டின் குணகங்களாகியவை. (2·101)-ல் உள்ள தொடரின் குணகங்களாகிய a_k, b_kக்குப் பதிலாக அவற்றுடன் $\frac{k^2}{a^2 - k^2}$ எனும் காரணியுடன் கூடியவை. இது 't'-ஐச்சார்ந்ததல்ல. $k \to \infty$ ஆகும் ஒரே நேராக (monotonic) 1 எனும் எல்லையை அணுகுகிறது. [இது செவ்விய நிருபணம் அல்ல] ஆகவே (2·105)-ன் தொடர் சீராக ஒருங்குகிறது. ஆகவே (2·104)-ன் தொடரை இரு முறை வகையிடலாம். ஆதலால் (2·104)-ல் உள்ள தொடர் (2·100)-ன் சமன்பாட்டிற்கு முறையாகப் பொருந்துவது அல்லாமல் அதன் கூடுதல் $x(t)$ என்பது உள்ளது. (2·100)-ன் அலைவுகாலமுள்ள தீர்வுமாகும்.

n எனும் முழு எண்ணிலிருந்து a என்பது சற்றேமாறுபட்டால், $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ என ஆனால் ஒத்திசைவு (Resonance) வருகிறது. ஏதாவது ஒரு குணகம்

$$A_n = \frac{a_n}{a^2 - n^2} \quad B_n = \frac{b_n}{a^2 - n^2} \text{-ல்}$$

a, n-ஐ அணுகும்போது இது வேகமாக உயர்கிறது. ஆனால் $a = n$ ஆவதுடன் a_n, அல்லது b_n பூச்சியமல்லாவிடில் அலைவு காலமுள்ள தீர்வு இல்லை. ஏனெனில் ஒத்திசை (Resonant) உறுப்புக்கள் $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ எனும் (2·100-ல் உள்ள வலப்பக்க உறுப்புக்களுக்கு ஏற்றதாக (பக்கம் 154-ல் காட்டியபடி) மேற்பொருந்தும் கொள்கைப்படி (Principle of super position, அலைவுகாலமில்லாத $t\ (A_n \cos nt - 1\ B_n \sin nt)$ எனும் உறுப்பு ஒன்று பொதுத் தீர்வில் உள்ளது. ஆனால் பொதுத் தீர்வில் ஏனைய கூடுதல்கள் அலைவுகாலமுள்ள சார்புகளாகும். ஆகவே $a = n$ எனும்போது வலப் பக்கத்தில் ஒத்திசை (Resonant) உறுப்புக்கள் $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ இல்லாதபோது மட்டும் திரும்பு சார்புத்தீர்வு (2·100)-ன் சமன்பாட்டிற்குள்ளது.

அதாவது,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = 0; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = 0$$

எனும்போதாகும். , ... (2·106)

பின்னர் கூறிய இடத்தில், அதாவது $a_n = n$, $b_n = 0$ என்றால், (2·100)-க்குத் திருப்புச் சார்புத் தீர்வு உள்ளது. $k \neq n$ எனும்போது (2·108)-ல் உள்ள தொடர்புகளினால் குணகங்கள்

காணப்படுகின்றன. ஆனால் $A_n B_n$ என்பவை இச்சைக்கேற்பவை. ஏனெனில் இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட A_n, B_nகளுக்கு $A_n \cos nt + B_n \sin nt$ என்பது அந்தச் சமன்பாட்டிற்கு ஏற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}$$

என்பதன் திரும்பு சார்புத் தீர்வைக் காண்க.

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

எனும் தொடர் வடிவில் தீர்வு காணவேண்டும். (2·103)-ல் உள்ள தொடர்பிலிருந்து A_k, B_k இவற்றைக் காண நாம் அடையும் தீர்வு,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4(2-k^2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\ddot{x} + 4x = \sin^2 t$ என்பதன் திரும்புச் சார்புத் தீர்வுகாணவும்.

(2·106)-ல் திரும்புச் சார்புத் தீர்வு உள்ளமைக்கேற்ற நியதிகள் பொருந்தாமையில்,

ஏனெனில், $$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \sin 2t \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos 2t \, dt \neq 0$$

திரும்புச் சார்புத் தீர்வு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}$$

எனும் சமன்பாட்டின் அலைவு காலமுள்ள தீர்வு காண்க.

ஒத்திசைவு (Resonance) உறுப்புக்கள் $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ வலப் பக்கத்தில் இல்லை. ஆகவே, அலைவு காலமுள்ள திரும்பு சார்புத் தீர்வு உள்ளது. அது,

$$x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(2-k^2)} + c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

c_1, c_2 நிலை எண்களாகும். இவ்வாறு இது (2·103)-ல் உள்ள சூத்திரத்தால் வருகிறது.

8. சிறியதுணை அலகு முறையும், பகுதி ஒருபடி அலைவுகளுக்கு அதன் பயன்பாடும்
(The small parameter method and its applications in theory of Qwasilinear Oscillations)

$\ddot{x} + a^2(x) = f(t)$ எனும் ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்புத்தீர்வு காணும் முறையை முன் பிரிவில் விளக்கினோம்.

பயனுறு கணக்குகள் பலவற்றில் இதேபோல ஆனால் வலப் பக்கத்தில் சிறு ஒருபடியல்லாத சார்புடன் கூடிய, சமன்பாட்டிற்குத் திரும்புசார்புத் தீர்வு காணவேண்டி வரும்.

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \qquad \dots \quad (2\cdot107)$$

இங்கு μ என்பது மிகச்சிறிய துணையலகு.

$\mu F(t,x,\dot{x}\,\mu)$ என்பதை விட்டால், அதாவது $\mu = 0$ என்றால், நாம் அடையும் ஒருபடிச் சமன்பாடு

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t)$$

இதனை (2·107)ஐ 'ஆக்கும் சமன்பாடு' (Generating equation) எனப்படும்.

சிற துணை அலகுடன் கூடிய ஒருபடித்தல்லாது அலைவுதரும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண மிகவும் பயனுறு முறைகள் பொன்காரே (Poincare), லியபுனேவ் (Lyapunov) என்பவர்களால் காணப்பட்டது. μ எனும் துணை அலகின் அடுக்குகளாகத் தொடராக விரித்துத் தீர்வு காணவேண்டும். பலவகைப் பிரச்சினைகளுக்கு வெகுவாக இம்முறைகள் பயன்படுகின்றன.

துணையலகைப் பகுமுறையாகத் தீர்வு சார்ந்து நிற்பதைப் பற்றிய தேற்றத்திலிருந்து இம்முறை தோற்றுகிறது இரண்டாவதும் அதற்கு மேற்பட்ட வரிசையுடைய சமன்பாடுகளை

இத்தேற்றம் தோற்றுவிக்கிறது. மிகச்சிறிய μவின் மதிப்புக்களுக்கு (2·107)-ன் தீர்வு $x(t,\mu)$ μவின் பகுமுறைச் சார்பு என சில நியதி கட்டுப்பட்டு இருக்குமென திட்டமாகக் கூறலாம். அந்த நியதிகள் $f(t)$ எனும் சார்பலன் தொடர்ச்சியுடையதாதல் வேண்டும் $F(t,x,\dot{x},\mu)$-ம் t-ஐச் சார்ந்து தொடர்ச்சியுடையதாக வேண்டும். மற்ற ராசிகளில் பகுமுறைச் சார்புடையதாக வேண்டும். இதில் x, $\dot{x}$-இன் அரங்கம், இந்த ராசிகள் இனிமேல் மாறவேண்டிய அரங்கமாகும். μ-ன் மதிப்புக்கள் மிகச்சிறிய அளவுள்ள மதிப்புக்களுமாகும்.

இந்த நியதிகள் உள்ளன எனக்கொண்டு $x(t,\mu)$ எனும் தீர்வை

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2x_2(t)+\ldots+\mu^n x_n(t)+\ldots$$

எனும் தொடரின் கூடுதலாகக் காண்போம்.

உறுப்பு வாரியாக இருமுறை இந்தத் தொடரை வகையிடு செய்ய

$$\dot{x}(t,\mu)=\dot{x}_0(t)+\mu\dot{x}_1(t)+\ldots+\mu^n\dot{x}_n(t)+\ldots$$

$$\ddot{x}(t,\mu)=\ddot{x}_0(t)+\mu\ddot{x}_1(t)+\ldots+\mu^n\ddot{x}_n(t)+\ldots$$

இதனை (2·107)-ல் பிரதியிட—அதில் $F(t,x\,\dot{x}\,\mu)$ என்பதை முதலில் $x-x_0$, $\dot{x}-\dot{x}_0$, μ-ன் அடுக்குகளாகத் தொடராக விரித்திருக்க வேண்டும்.

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu\left[F(t,x_0\,\dot{x}_0\,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}(\dot{x}-\dot{x}_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}\mu+\ldots\right] \quad \ldots(2\cdot108)$$

(2.108)-ல் இடப்பக்கம் வலப்பக்கமுள்ள μ-ன் ஒத்த அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிட,

$$\ddot{x}_0+a^2x_0=f(t),$$

$$\ddot{x}_1+a^2x_1=F(t,x_0,\dot{x}_0\,0),$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}+a^2x_2=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}} x_1+\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}} \dot{x}+\left(\dfrac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}} \end{array}\right\} \quad \ldots 2\cdot109$$

இந்த ஒருபடிச் சமன்பாடுகளில் முதல் சமன்பாடு ஆக்கும் சமன்பாடாகிறது, அதன் தீர்வு கண்டு $x_0\ (t)$-ன் மதிப்பை இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பிரதியிட மீண்டும் ஒருபடிச் சமன்பாடு வருகிறது. இதிலிருந்து $x_1\ (t)$-ஐக் காணவேண்டும். இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்பட வேண்டும்.

$x_n\ (t)$ என்பதைக் காணவும் ஒருபடிச் சமன்பாடு வருகிறது. ஏனெனில் இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் $\dot{x}_j\ x_j$-ன் அடுக்குகள் n-ஐ விடக் குறைவு. $\dot{x}_n\ x_n$ உள்ள வலப்பக்க உறுப்புக்களில் μ, F உள்ள குணகங்கள் இருப்பதால், அல்லாமலும் $x_k\ \dot{x}_k$ என்பதில் மிகப்பெரிய அடுக்குகள் வரும்போது $(n+1)$-க்குக் குறையாது அடுக்குடைய μ-வைக் குணகங்களாகப் பெறும்.

இந்தப் பிரிவில் திரும்பு சார்பு தீர்வுகாணும் கணக்குகளை மட்டும் பார்ப்போம். அகவே,

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu F(t,\dot{x},x,\mu).$$

எனும் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தின் மேல்பக்கங்கள் 172-173-ல் உள்ள குறிப்பின்படி இன்னொரு கட்டும் விதிக்க வேண்டிவருகிறது. வெளிப்படையாகவுள்ள ராசி 't'-ஐச் சார்ந்து வலப்பக்கம் திரும்பு சார்பாக இருக்க வேண்டுமென்பதாம். பொது விதிக்குப் புறப்பாகாமல், வலப்பக்கம் 't'-ஐச் சார்ந்து வெளிப்படையாக அமைந்தால் மிகக் குறிய அலைவு காலம் 2π எனக் கொள்ளலாம். அல்லது, மிகச்சிறிய μ-வின் மதிப்புக்களுக்கு 2π-ன் மடங்குகள் எனலாம். (பக்கம் 173 பார்க்கவும்)

(2·108)-க்கு திரும்பு சார்புத் தீர்வை,

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots+\mu^n x_n(t)+\ldots \quad (2\cdot110)$$

எனும் வடிவில் காண (2·109)-ன் சமன்பாட்டின் திரும்புச் சார்புத் தீர்வுகளை நிச்சயிக்க வேண்டும். ஏன், தீர்வு $x(t,\mu)$ என்பது μ-ன் மிக நுண்ணிய மதிப்புக்களுக்கு 2π (அல்லது $2m\pi$, m முழு எண்) எனும் நிலையான அலைவுகாலமிருந்தால் அப்போது,

$$x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots+\mu^n x_n(t)\ldots$$
$$=x_0(t+2\pi)+\mu x_1(t+2\pi)+\mu_n x^n(t+2\pi)+\ldots \quad (2\cdot111)$$

(2·111)-ல் இடப்பக்கமுள்ள. μ-ன் ஒத்த அடுக்குகளின் குணகங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும். அதாவது,

$$x_n(t) \equiv x_n(t + 2\pi)$$

இது $x_n(t)$ $(n = 0, 1, 2 \ \dots)$ எனும் சார்பலன்கள் திரும்பு சார்பலன்களென்பதைக் காட்டுகிறது. (2·110)–ல் வல இடப் பக்கமுள்ள ஒத்த μ-ன் அடுக்குகளின் குணகங்கள் சமமாவதைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக (2·110)-ஐ n முறை μ-ஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்து, $\mu = 0$ எனக் கொள்ள நாம் அடைவது,

$$x_n(2\pi + t) = x_n(t) \quad (n = 0, 1, 2 \ \dots)$$

இவ்வாறு (2·109)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்பு தீர்வைக் காணவேண்டும். ஆகவே, கீழ்வரும் பிரச்சினைகளை வெவ்வேருக ஆராய்தல் நலம். ஒத்திசைவிலாவகை (non-resonance case) – a முழு எண்ணல்லவானுல் (2·109)-ல் முதல் சமன்பாட்டிற்குத் தனித்தன்மையுடைய தீர்வு உள்ளது. இதனை முன் பிரிவின் (பக்கம் 178 பார்க்கவும்) சொன்னபடிக் காணலாம், பிறகு இதேபோல $x_1(t), x_2(t) \ \dots$ இவற்றையும் காணலாம்.

இந்த முறையைப் பயன்படுத்தும்போது (2·110)-ல் பொது உறுப்பைக் கண்டோம். தொடரின் ஒருங்கலையும், அதனை உறுப்புவாரியாக இருமுறை வகையீடு செய்வது சரி எனவும் நிறுவினுல், (2·110)-ல் உள்ள தொடரின் கூடுதல் நாம் கோரிய 2π அலைவுகாலமுள்ள திரும்புசார்புத் தீர்வு எனவாகும். ஆனுல், (2·110)-ல் உள்ள தொடரின் பொது உறுப்பைக் காண்பது சாதாரணமாக மிகவும் சிக்கலான பிரச்சினையாகும். ஆகவே, தொடரின் முதல் சில உறுப்புக்களைக் காண்பதுடன் நாம் நிற்க வேண்டும். தொடர் ஒருங்கும் என நிச்சயமுண்டானுல், அதன் கூடுதல் திரும்பு சார்பு எனவும் நிச்சயமானுல், திரும்பு சார்புத் தீர்வுக்கு இது வேண்டிய அளவுக்குத் தோராயமான தீர்வு ஆகும்.

இது சம்பந்தமாக மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது திரும்பு சார்புத் தீர்வின் உள்ளமையை நிருபிக்கும் பொன்காரேயின் (Poincare) தேற்றங்களாகும். குறிப்பாக, இந்தத் தேற்றங்கள். எந்த நியதிகள் இருந்தால் (2·107)-ன் சமன்பாட்டுக்கு $\mu \to 0$ ஆகும். ஆக்கும் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்புத்தீர்வுடன் தோராயமாகத் தனித்தன்மை வாய்ந்த திரும்பு சார்புத்தீர்வு உள்ளது என்பதைக் கூறும்.

பொன்காரே தேற்றம் சொல்லும் நியதிகள் காணப்பட்டால், ஆகவே $\mu \to 0$ ஆகும்போது ஆக்கும் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்புத் தீர்வுடன் தோராயமான (2·107)-ன் சமன்பாட்டிற்குத் திரும்பு சார்புத்தீர்வு உள்ளது. எனவே (2·107)-ன் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு ஆன (2·110)-ன் தனித்தன்மை வாய்ந்த தொடரின் திரும்பு குணகங்களின் கூடுதல் இருக்க வேண்டும். அது நாம் வேண்டும் திரும்பு சார்புத் தீர்வுடன் பொருந்த வேண்டும். இவ்வாறெனில் (2·110)-ன் பொது உறுப்பைத் தொடரின் ஒருங்கலை ஆராய நாம் காணவேண்டியதில்லை. (2·110)-ன் முதல் ஒரு சில உறுப்புக்களைக் கண்டபின்னர், அவற்றின் கூடுதல், குறிப்பிட்ட μவின் சிறுமதிப்புக்கு வேண்டிய திரும்பு சார்புத் தீர்வுக்குத் தோராய மதிப்பெனச் சொல்ல முடியும்.

பகுப்பாய்வுத் தேற்றங்களின் விவரங்களின் அடிப்படையில் அமையப்பட்ட பொன்காரே தேற்றங்கள் சிக்கலானவை. ஆகவே இந்தப் பிரிவின் முடிவில் அவருடைய மிக எளிதான தேற்றங்களை மட்டும் கூறுவோம். இருந்தாலும் (2·107)-ல் உள்ள ஒருங்கு இயைவு (non-resonance) அல்லாத சமன்பாடுகளுக்கும் μவின் போதிய அளவு சிறுமதிப்புக்களுக்குத் தனித்தன்மை வாய்ந்த திரும்பு சார்புத் தீர்வு உள்ளது என உறுதி கூறமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\ddot{x} + 2x = \sin t + \mu x^2$ என்பதன் திரும்பு சார்புத் தீர்வைத் தோராயமாகக் காணவும். (இங்கு μ என்பது மிகச் சிறிய அலகெண்).

[(2·110)ன் சமன்பாட்டின் 2 உறுப்புக்களைக் காணவும்]

$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots$ எனும் வடிவில் தீர்வைக் காணவேண்டும்.

ஆக்கும் சமன்பாடு $\ddot{x}_0 + 2x_0 = \sin t$, $x_0(t) = \sin t$ இதன் திரும்பு சார்புத் தீர்வைக் காண்போம்.

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \sin^2 t \text{ன் தீர்வு}$$

அல்லது $\ddot{x}_1 + 2x_1 = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$-இன் திரும்பு சார்புத் தீர்வின் வடிவம்,

$$x_1 = \tfrac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}$$

ஆகவே திரும்பு சார்புத் தீர்வு:

$$x(t, \mu) = \sin t + \tfrac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu.$$

2. ஒருங்கு இயைவு வரும் இடம் (Resonance case)

சிறு துணை அலகு முறையையும் இங்கு பயன் படுத்தலாம். அதாவது (2.107)-ல் உள்ள சமன்பாட்டில் a. n எனும் முழு எண்ணாக இருந்து அல்லது $\mu \to a$ ஆகும். nக்கு அணுகும்போது,

(2.107)ன் சமன்பாட்டில் n எனும் முழு எண்ணிலிருந்து a சற்றே மாறுபட்டால், அல்லது இன்னும் திட்டமாகக் கூற $a^2 - n^2$ எனும் வேறுபாடு μ-ன் சிறுமை வரிசையைவிடக் குறையாமல் இருந்தால் (Order not lower than μ)

$$a^2 - n^2 = a_1 \mu, \qquad \dots \quad (2\cdot112)$$

இங்கு $\mu \to 0$ ஆகும்போது a_1 எல்லைக்குட்பட்டது. அப்போது

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

எனும் சமன்பாட்டை

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + (n^2 - a^2)\ x + \mu\ F(t,\ x, \dot{x}, \mu)$$

என எழுதலாம். ஆகவே (2·112) எனும் சமன்பாட்டால்

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu\ F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

இங்கு F_1 எனும் சார்பலன் கொள்கையால் F உட்படும் நியதிகட்கே உட்பட்டது.

ஆகவே, இனிமே ஒருங்கு இயைவு இடங்களில் a ஐ முழு எண்ணாகவே கருதலாம்.

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu\ F_1 (t. \dot{x}, x, \mu)$$

சிறு துணை அலகு முறையைப் பயன்படுத்தி

$$x(t, \mu) = x_0 (t) + \mu\ x_1 (t) + \dots + \mu^k x_k (t) \dots$$

எனும் தொடர் வடிவில் தீர்வைக் காண விழைகிறோம். $a^2 = n^2$ என உள்ள (2 109)-ன் சமன்பாட்டை, x_k (t) எனும் சார்பலன்கள் காண நாடுகிறோம். ஆனால் இந்த கொடுக்கப்பட்ட இடத்தில் ஆக்கும் சமன்பாடு

$$\ddot{x} + n^2 x_0 = f(t) \qquad (2\cdot113)$$

என்பதற்குத் திரும்புசார்புத் தீர்வு இருக்க வலப்பக்கத்தில் ஒருங்கு இயைவு உறுப்பு இருத்தல் கூடாது. அதாவது (பக்கம் 175 பாக்கவும்.)

அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt &= 0 \\ \int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\cdot106)$$

எனும் நியதிகள் இருக்கவேண்டும்.

இந்த நியதிகள் இருந்தால் (2·113)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் யாவும் 2π அலைவுகாலமுள்ள தீர்வுகளாகும். (பக்கம் 175 பார்க்கவும்.)

$$x_0(t) = c_{10}\cos nt + c_{20}\sin nt + \varphi_0(t)$$

$x_1(t)$ எனும் சார்பலனை

$$\ddot{x} + n^2 x_1 = F(t,\ x_0\ \dot{x}_0\ 0), \quad \ldots \quad (2\cdot114)$$

எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து நிச்சயிக்கிறோம். இந்தச் சமன்பாட்டிற்குத் திரும்புசார்பு தீர்வு இருக்க வலப்பக்கத்தில் ஒருங்கியையவு உறுப்புக்கள் இருக்கலாகாது. அதாவது, கீழ்வரும் நியதிகள் வேண்டும்.

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(t,\ x_0\ \dot{x}_0, 0)\cos nt\,dt &= 0 \\ \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \ddot{x}_0, 0)\sin nt\,dt &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\cdot115)$$

(2·115) எனும் சமன்பாடு c_{10}, c_{20} உடையது. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து இந்தத் தொகுதியிலிருந்து இவை நிச்சயிக்கப் படுகிறது.

c_{10}, c_{20} என்பவை (2·115)-ல் உள்ள தொகுதிக்குட்பட்டனவாகுக. அப்போது (2·114)-ன் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் எல்லாவற்றிற்கும் அலைவுகாலம் 2π ஆகும்.

$$x_1(t) \doteq c_{11}\cos nt + c_{21}\sin nt + \varphi_1(t) \quad \ldots \quad (2\cdot116)$$

இங்கு மீண்டும் c_{11}, c_{21} என்பவை (2·109)-ன் கீழ் வரும் சமன்பாட்டில் ஒருங்கு இயல் உறுப்புக்கள் இல்லாமைக்குரிய நியதிகளால் நிச்சயிக்கப்படுகின்றன.

$$\ddot{x} + n^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1$$

இன்ன இதுபோன்று.

ஆகவே,

$$x_0 = c_{10} \cos nt + c_{20} \sin nt + \varphi_0(t),$$

எனும் ஆக்கும் சமன்பாட்டின் எல்லாத் தீர்வுகளுக்குமல்ல, ஆனால் (2·125)-ன் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் $c_{10}\, c_{20}$-ன் ஒரு சில மதிப்புக்களுக்குமட்டுமே μ-வின் சிறிய மதிப்புக்கேற்ற (2·107)-ன் திருப்பு சார்புத் தீர்வுகள் உள்ளன.

(2·110-ன் பொது உறப்புகாணுமல்) ஒருங்கு இயைவு இடங்களிலும் கூட காட்டிய முறையைப் பயன்படுத்தி திரும்பு சார்புத் தீர்வு காண்டதற்கு திருப்புசார்புத் தீர்வு உள்ளமைத் தேற்றங்களை நிறுவவேண்டும். (3),(4) அயிட்டங்களில் சொன்ன இடங்களுக்கும் இப்போது கூறியது பொருந்தும்.

3. nth வகை ஒருங்கு இயைவு (Resonance of nth kind)

$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ ... (2·107) எனும் சமன்பாடு தரும் தொகுதிகளில் சிலபோது மிகப்பெரிய அலைவு காணப்படும். சரியான அலைவு $\frac{1}{n}$ லிருந்து சற்றே மாறுபடும்போது இது ஏற்படும். இங்கு n முழு எண். இந்த நிகழ்ச்சி, n வகை ஒருங்கியைவு (Resonance of nth kind) எனப்படும்.

கணிதக் கண்ணோட்டத்திலிருந்து $\frac{1}{n}$ -லிருந்து சற்றே வேறுபடும் a-க்கு, (1 அல்லது முழு எண் மதிப்புடையது n) (2·107)-ன் சமன்பாட்டின் தீர்வு $2\pi n$ எனும் அலைவுகாலமிருக்கலாம். ஆனால் 2π எனும் அலைவுகாலமுள்ள தீர்வு இல்லாமல் இருக்கலாம்.

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \quad \ldots (2 \cdot 117)$$

ஆகுக.

[$1/n$-லிருந்து சற்றே வேறுபட்டால், இன்னும் திட்டமாகக் கூற $a^2 - \frac{1}{n^2} = \mu a_1$ இங்கு $\mu_1 \rightarrow 0$ ஆகும்போது a எல்லையுடையது.] அப்போது $\left(a^2 - \frac{1}{n^2}\right)x$ எனும் உறுப்பை வலப் பக்கத்திற்கு மாற்றி $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$ உடன் அதனைச் சேர்த்து (2·117) எனும் வடிவில் சமன்பாடு அடைகிறோம்.

$2\pi n$-ன் அலைவுகாலமுள்ள திரும்பு சார்புத் தீர்வை (2.117)-ன் சமன்பாட்டிற்கு,

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t), + \ldots + \mu^n x_n(t) \quad \ldots \quad (2·110)$$

எனும் தொடர்வடிவில் நாடுகிறோம்.

(2·110)-ஐ 2·117-ல் பிரதியிட்டு, μ-வின் ஒத்த குணகங்களை ஒப்பிட $a = \frac{1}{n}$ என உள்ள (2·109)-ன் சமன்பாடுகளை அடைகிறோம். $x_0(t)$ என்பதை நிச்சயிக்க,

$$\ddot{x}_0 + \frac{1}{n^2} x_0 = f(t) \quad \ldots \quad (2.118)$$

எனும் 'ஆக்கும் சமன்பாட்டை'ப் பெறுகிறோம். இதில்,

$$\int_0^{2\pi n} f(t) \cos \frac{t}{n} dt = 0, \quad \int_0^{2n\pi} f(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0$$

எனும் நியதிகள் இருக்க வலப்பக்கத்தில் ஒருங்கியைவு உறுப்புகள் இராததால், சமன்பாட்டிற்கு $2\pi n$ எனும அலைவுகாலம் மட்டுமுள்ள திரும்பு சார்புத்தீர்வு உள்ளன. மேற்கூறிய நியதிகள் இருந்தால் (2·118)-ன் எல்லாத் தீர்வுகளும் $c_{10}\ c_{20}$ நிலைஎண்களாகவுள்ள $2\pi n$ அலைவுகாலமுள்ள $x_0 = c_{10} \cos \frac{t}{n} + c_{20} \sin \frac{t}{n} + \varphi_0(t)$ எனும் தீர்வு வடிவிலாகும்.

x_1-ஐத் தரும் சமன்பாடு,

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{n^2} x_1 = F(t, x_0\ \dot{x}_0\ \mu) \quad \ldots \quad (2·119)$$

$2\pi n$ அலைவுகால மட்டுமுள்ள திரும்பு சார்புத் தீர்வாக உடையது. இதற்கு வலப்பக்கத்தில் ஒருங்கியைவு உறுப்புக்கள் இருக்கக் கூடாது.

அதாவது,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2n\pi} F(t,x_0,\dot{x}_0,\mu)\cos\frac{t}{n}\,dt = 0\\ \int_0^{2n\pi} F(t_1,x_0,\dot{x}_0,\mu)\sin\frac{t}{n}\,dt = 0\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot120)$$

எனும் நியதிகள் இருக்க வேண்டும். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து c_{10}, c_{20} என்பவை இந்த நியதிகளிலிருந்து நிச்சயிக்கப்படுகின்றன.

(2·120)-ல் உள்ள நியதிகள் இருந்தால் (2·119)-ன் எல்லா தீர்வுகளின் அலைவுகாலமும் $2\pi n$ ஆகும். அதாவது,

$$x_1 = c_{11}\cos\frac{t}{n} + c_{21}\sin\frac{t}{n} + \varphi_1(t).$$

c_{11}, c_{21} எனும் நிலை எண்களை நிச்சயிக்க (2·109)-ன் வலப்பக்கத்தில் ஒருங்கு இயைபு உறுப்புகள் அல்லாமைக்குரிய நியதிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{n^2}x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}$$

என இதுபோன்று.

4. சாராத சமன்பாடுகள் (Autonomous case)

வலப்பக்கம் t-ஐ வெளிப்படையாகச் சாராத சமன்பாடுகளை ஆராய்வோம். அத்தகைய சமன்பாடுகளின் வடிவம்.

$$\ddot{x} + a^2x = \mu F(x,\dot{x},\mu) \qquad \ldots \quad (2\cdot121)$$

இங்கு F எனும் சார்பலன் முன்னர் கூறிய நியதிகட்குட்பட்டது. முதற்கண் நினைக்கும்போது (2·121)-ன் தீர்வு காண்பது (2·107)-ன் தீர்வு காண்பதைவிட எளிதெனத் தோற்றும். அதில் வலப்பக்கம் t-ஐ வெளிப்படையாகச் சார்ந்து நிற்கிறது. ஆனால், சமன்பாட்டில் வலப்பக்கம் t வெளிப்படையாக இல்லாதது பிரச்சினையை மேலும் சிக்கலாக்குகிறது.

வலப்பக்கம் t-ஐ வெளிப்படையாகச் சார்ந்து நின்றால், முன்னர் காட்டியது போன்று தீர்வுக்கு என்னென்ன அலைவு காலங்கள் சாத்தியமாகும் என அறியலாம். ஏனெனில் தீர்வுகளின் அலைவு காலங்கள் t-யுடன் வெளிப்படையாகச் சார்ந்து நிற்கும் தீர்வுகளுடன் வலப்பக்கத்தின் அலைவுகாலங்களாகிய 2π அல்லது அதன் மடங்குகளாக மட்டுமே இருக்க முடியும்.

இப்போது வலப் பக்கத்தில் t வெளிப்படையான ராசியாக இல்லாவிடில், அது—வலப் பக்கம் — இச்சைக்கேற்ற அலைவுள்ள திரும்பு சார்பு எனக் கருதலாம். ஆகவே இச்சைக்கேற்ற அலைவு காலமுள்ள திரும்பு சார்புத் தீர்வு பெற வாய்ப்புள்ளது. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து தீர்வின் அலைவு காலம் μ-ன் சார்பாகும். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, $x(t,\mu)$ எனும் தீர்வுச் சார்பு μ-வின் சார்பாகையால் அதனை

$$x(t,\mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (2\cdot110)$$

எனும் தொடரில் கொள்வது சரியல்ல. ஏனெனில் $x_n(t)$ எனும் ஒவ்வொரு சார்பலனும் தனித்தனியாகத் திரும்பு சார்பலனாக இருக்கத் தேவையில்லை. ஆகவே $x_n(t)$ முன்னர் கூறிய முறைகளால் காணமுடியாது. ஆகவே (2·121) எனும் சமன்பாட்டை புதிய தனிமாறிக்கு மாற்றம் செய்ய வேண்டும். பிறகு (2·110)-ல் உள்ள தொடர்வடிவில் தீர்வு காண வேண்டும்.

முதலில் சுருக்குவதற்கு எளிதாக இருக்க $t_1 = at$ என மாறி மாற்றம் செய்து

$$\frac{d^2x}{dt_1^{\,2}} + x = \mu F_1(x,\dot{x},\mu) \quad \dots \quad (2\cdot122)$$

எனும் சமன்பாட்டை அடைவோம்.

$x_0(t_1) = c_1 \cos(t_1 - t_0)$ எனும் ஆக்கும் சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு தீர்வும் 2π எனும் அலைவு காலமுள்ளது. $\mu \neq 0$ எனும் போது (2·122)-ன் திரும்பு சார்புத் தீர்வுகள். அவை இருந்தால் அதன் அலைவுகாலம் $2\pi + \alpha(\mu)$ ஆகும். $\alpha(\mu)$ என்பது μவின் போதிய அளவு சிறுமதிப்புக்களுக்கு பகுப்பாய்வுச் சார்பாக இருக்கும்,

$\alpha(\mu)$வை μன் அடுக்குகளின் தொடராக விரித்தால்,

$$2\pi + \alpha(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots) \quad (2.123)$$

இங்கு h_j என்பவை நிலை எண்கள். இவற்றை நாம் இன்னும் அறியவில்லை. •

திரும்பு சார்புத் தீர்வின் அலைவு காலம் $2\pi + \alpha(\mu)$ என இல்லாமல் இருக்கும்படி 2π ஆக இருக்க மாறி மாற்றம் செய்யவும்.

$$t_1 = t_2 (1 + h_1 \mu + h_2 \mu^2 + \ldots + h_n \mu^n + \ldots) \ldots \quad (2\cdot124)$$

என பிரதியிட இது நிறைவேறும். புது ராசி t_2, t_1 எனும் ராசி $0 - 2\pi + \alpha(\mu)$ என மாறும்போது 0விலிருந்து 2πக்கு மாறும். இந்த மாற்றத்தில்,

$$\ddot{x}_{t_2 t_2} + (1 + h_1 \mu + \ldots h^n \mu^n + \ldots)^2 x$$
$$= \mu (1 + h_1 \mu + \ldots h_0 \mu^n + \ldots)^2 F_1 (1, + h_1 \mu + \ldots + h_n \mu^n + \ldots)^{-1} x_{t_2}, \mu) \quad \ldots \quad (2.125)$$

என (2.122) மாறுகிறது.

இதன் திரும்பு சார்புத் தீர்வை

$$x(t_2 \mu) = x_0(t_2) + \mu x_1(t_2) + \ldots \mu^n x_n(t_2) + \ldots \quad \ldots \quad (2\cdot126)$$

எனும் வடிவில் நாடுகிறோம். இங்கு $x_n(t_2)$ என்பவை 2π அலைவு காலமுள்ள t எனும் ராசியில் சார்பலன்களாதும் (2·126)ஐ (2.125)ல் பிரதியிட்டு சமன்பாட்டின் இட வலப் பக்கத்தில் உள்ள μ-ன் ஒத்த அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிடக் கிடைப்பது,

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \text{ ஆகவே } x_0 = c \cos(t_2 - t_0)$$
$$\ddot{x} + x_1 = -2h_1 x_1 + F_1(x_0 \dot{x}_0 0)$$

அல்லது $\ddot{x} + x_1 = 2 h_1 \cos(t_2 - t_0) + F_1 c \cos(t_2 - t_0) - c \sin(t_2 - t_0) 0, \quad \ldots \quad (2.127)$

... ...

(2·127)-ன் சமன்பாடு திரும்புசார்புத் தீர்வுகளையடைய வலப் பக்கத்தில் ஒருங்கு இயைவு உறுப்புக்கள் இல்லாமலிருப்பது தேவையானதும் போதுமானதுமான [(2·106) பார்க்கவும்] நியதியாகும். அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F_1(c\cos(t_2 - t_0), -c\sin(t_2 - t_0), 0) \sin(t_2 - t_0)\, dt_2 = 0 \\ &2 h_1 c + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(c\cos(t_2 - t_0), -c\sin(t_2 - t_0), 0) \times \cos(t_2 - t_0)\, dt_2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (2\cdot128)$$

முதல் சமன்பாடு c-ன் மதிப்புகளைத்தர உதவுகிறது. இரண்டாவது h-ன் மதிப்புக்களை ; இவ்வாறு இவற்றைக்கண்ட பின்னர் $x_0 = c\cos(t_2 - t_0)$ எனும் ஆக்கும் சமன்பாடுகளின் μ மிக சிறியதாயிருக்கும் இடத்துக்கணிமையில் உள்ள தீர்வுகளைக் காண்கிறோம். பிறகு வேண்டும் தீர்வின் அலைவுகாலத்தைத் தோராயமாக நிச்சயிக்கிறோம்.

c, h_1 இவற்றை அறிந்த பின்னர் $x_1(t_2)$ என்பதையும் வேண்டுமானால் அதே முறையில் $x_2(t_2)$, $(x_3(t_2)$ என்பவற்றின் மதிப்பையும் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\ddot{x} + x = \mu x(9 - x^{n}) \qquad \ldots \quad (2 \cdot 129)$$

(2·129)-ன் ஆக்கும் சமன்பாட்டிற்கு $\mu \to 0$ எனும் போதுள்ள திரும்புச் சார்புத் தீர்வுகளைக் காணவும்.

ஆக்கும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் வடிவம் $x = c\cos(t_2 - t_0)$ c-ன் மதிப்பை நிச்சயிக்க (2·128)-ன் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்

$$\int_0^{2\pi} c\,(9 - c^2\cos^2(t - t_0)\sin^2(t - t_0)\,dt = 0.$$

அல்லது, $\pi c\left(9 - \dfrac{c^2}{4}\right) = 0$ ஆகவே $c_1 = 0$ $c_{2,3} = \pm 6$.

$c_1 = 0$ என்பதற்கு ஆக்கும் சமன்பாட்டிற்கு $x \equiv 0$ எனும் சாரமற்ற தீர்வு வருகிறது. இது μ-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் (2·129)-ன் தீர்வுமாகும். $c_{2,3} = \pm 6$, என்பதற்கு $x = \cos(t - t_0)$.

இப்போது $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu)$ $\qquad \ldots \quad (2 \cdot 130)$

எனும் சமன்பாட்டிற்கு $\mu \to 0$ ஆகும்போது உள்ள ஆக்கும் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்பை அணுகும் திரும்புசார்புத் தீர்வு உள்ளமையையும், அதன் தனித் தன்மையையும் கூறும் பொன்காரே (Pontcares) மிக எளிய தேற்றங்களை நிறுவுவோம், இங்கு μ-ன் போதுமான அளவுள்ள சிறிய மதிப்புக்களுக்கு f எனும் சார்பலன் அதனை பகுப்பாய்வு முறையில் சார்ந்த நிற்பதற்குரிய நியதிகளைப் பெற்றுள்ளது. இத்துடன் f எனும் சார் பலன் t ஐ வெளிப்படையாகச் சார்ந்து நிற்கிறதெனவும், t-ஐச் சார்ந்து 2π அலைவு காலமுள்ளது எனவும் கொள்வோம். அத்துடன் ஆக்கும் சமன்பாடு $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, 0)$ என்பதற்குத் தனித்தன்மை வாய்ந்த 2π அலைவுகாலமுள்ள தீர்வு உள்ளது எனவும் கொள்வோம்.

பிரச்சினை என்னவெனில் μ-வின் சிறிய மதிப்புகளுக்கு $\mu \to 0$ என ஆகும்போது ஆக்கும் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகிய $\varphi_0(t)$ஐ அணுகும் (2·180)-ன் சமன்பாட்டிற்கு $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ எனும் தனித் தன்மைவாய்ந்த தீர்வு இருப்பதற்குள்ள நியதிகள் யாவை என்பதைச் சுட்டிக்காட்டுவதாகும்.

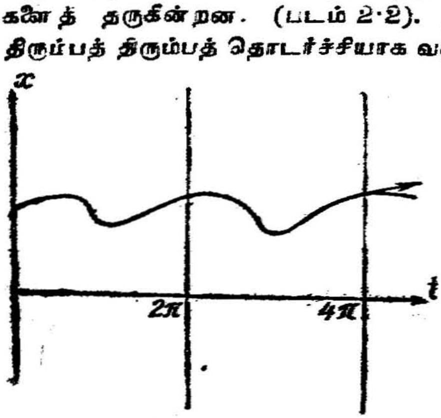
$x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ எனும் தீர்வு 2π எனும் அலைவுகாலமுள்ளதானால், கீழ்வரும் நியதிகட்குட்பட்டதாகும்.

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - x(0, \mu, \beta_0, \beta_1) = 0 \\ \dot{x}(2\pi, \mu, \beta_0, \beta_1) - \dot{x}(0, \mu, \beta_0, \beta_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\cdot131)$$

இந்தச் சமன்பாடுகளின் இடப் பக்கங்களை முறையே $\varphi_0(\mu, \beta_0, \beta_1)$ எனவும் $\phi_1(\mu, \beta_0 \beta_1)$ எனவும் குறிக்க (2·131)-ன் சமன்பாடுகள் அடையும் வடிவம்

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(\mu, \beta_0, \beta_1) = 0 \\ \phi_1(\mu, \beta_0, \beta_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2\cdot132)$$

மேற்கூறிய நியதிகள் அலைவுகால நியதிகள் எனப்படும். (2·130)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$ என்பது அலைவு காலமுள்ள திரும்பு சார்பாக இருக்க மேற்கூறிய நியதிகள் தேவையானதும் போதுமானதுமாகும். (2·130)-ன் வலப் பக்கம் t-ஐச் சார்ந்து அலைவுகாலமுள்ளதாகையால், இந்த வலப் பக்கம் $(t, x, \dot{x}1)$, $(t + 2\pi)x, \dot{x}, \ldots$ எனும் இனங்களில் $0 < t < \pi$ $2\pi < t < 4\pi$ ... எனும் இடைவெளிகளில் ஒரே மதிப்பை அடைகிறது. இவ்வாறு $t = 0$, $t = 2\pi$ ஒரே துவக்க மதிப்புக்கள் x_0, $\dot{x}_0$-ஐ நாம் நிச்சயிக்க அவை $0 < t < 2\pi$, $2\pi < t < 4\pi$ எனும் இடைவெளிகளில் முற்றொருமையாக உள்ள தீர்வுவரை கனைத் தருகின்றன. (படம் 2·2). இன்னும் திட்டமாகக் கூற திரும்பத் திரும்பத் தொடர்ச்சியாக வரும் ஒரே வரைகள்.



படம். 2.2

உட்படு சார்பைப் பற்றிய ஒரு தேற்றத்கால், $\mu = 0$, எனும் இடங்களில் ஜேகோபியன்

$$\frac{D(\phi_0, \phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0$$

என்றால் μ-வின் சிறிய மதிப்புகளுக்கு (2·132)-ன் நியதிகட்குட்பட்ட $\beta_0(\mu)$, $\beta_1(\mu)$ எனும் தனித்தன்மைவாய்ந்த கார்பலன்கள் உள்ளன என உறுதி கூறலாம். அல்லாமலும் அது $\mu \to 0$ ஆகும்போது அதுவும் பூச்சி

யத்தை அணுகுகிறது. அதாவது μ-வின் ஒவ்வொரு போது மான அளவு சிறிய மதிப்புக்களுக்கு, குறிப்பிட்ட நியதிகள் இருக்க $\mu - 10$ ஆகும்போது ஆக்கும் சமன்பாட்டின் தீர்வை அணுகும் தனித்தன்மை வாய்ந்து திருப்பு சார்புத் தீர்வு (2.130)-ன் சமன் பாட்டிற்கு உள்ளதெனவும் உறுதியாகச் சொல்லலாம்.* பொன்காரேத் தேற்றத்தின் சத்து இந்த உறுதியேயாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + F(t, x_1 \dot{x}, \mu) \qquad \ldots \quad (2.107)$$

எனும் சமன்பாட்டில் மேறிகூறிய நியதிக்குட்பட்டு f-ம் F-ம் உள்ளன (பக்கம் 177 பார்க்கவும்) என்றால் ஒருங்கு இயைவு இல்லாத இடங்களில் திரும்பு சார்பு உள்ளதெனவும் தனித் தன்மை வாய்ந்ததெனவும நிறுவுக.

$$x(t, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}t(\mu) + \ldots \quad (2.133)$$

எனும் வடிவில் கடைசி மூன்று ராசிகளின் சிறு மதிப்புக்களுக்கு பகுச்சார்பலனுகவுள்ள தீர்வைக் காணவேண்டும். (2.107)-ல் (2.133 ஐப் பிரதியிட்டு μ_1, β_0, β_1-ன் ஒத்தகுணகங்களை ஒப்பிட கீழ்வரும் சமன்பாடுகளை நாம் பெறுகிறோம். அவற்றிலிருந்து x_{11}, x_{12}ஐ நிச்சயிக்கிறோம்.

$$\left.\begin{array}{lll} \ddot{x}_{11} + a^2 x_{11} = 0 & x_{11}(0) = 1 & \dot{x}_{11}(0) = 0 \\ \ddot{x}_{12} + a^2 x_{12} = 0 & x_{12}(0) = 0 & \dot{x}_{12}(0) = 1 \end{array}\right\} \ldots \quad (2.134)$$

துவக்க மதிப்புக்கள் $x(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t_0) + \beta_0$
$\dot{x}(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = \dot{x}_0(t_0) + \beta_1$

என்பதிலிருந்து பெறுகிறோம்.)

ஆகவே, $x_{11} = \cos at,\ x_{12} = \frac{1}{a}\sin at$

(2.132)-ன் திரும்பு நியதிகளின் வடிவம்

$$(\cos 2a\pi - 1)\beta_0 + \frac{1}{a}\sin 2a\pi\,\beta_1 + \ldots = 0$$

$$-a\sin 2a\pi\,\beta_0 + (\cos 2a\pi - 1)\beta_1 + \ldots = 0$$

இங்கு எழுதப் படாத உறுப்புக்கள் $\frac{D(\phi_0, \phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)}$ எனும் அணி கோவையை $\mu = \beta_0 = \beta_1 = 0$ எனும் மதிப்புகளுக்கு பாதிப்ப தில்லை.

---

* I. Malkin, [3] என்பவரின் நூலினை. மீண்டும் திரும்பு தீர்வுகள் உள்ளமைத் தேற்றங்களைப் பற்றி விரிவாக அறியப் பார்க்கவும்.

$$\text{அணிகோவை} \left| \frac{D(\phi_0, \phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \right|_{\mu=\beta_0=\beta_1=0} = \cos(2a\pi - 1)^2 + 2\sin^2 2a\pi$$

இது பூச்சியமல்ல. ஏனெனில் a என்பது முழு எண் அல்ல

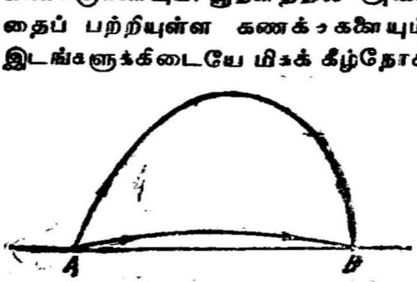
9. எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினைகள்: அடிப்படை

(Boundary - Value problems. Essentials)

முன்னுரையில் கூறியதுபோல அடிப்படையான துவக்க மதிப்புப் பிரச்சினைகளுடன், அடிக்கடி எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினைகளையும் தீர்க்க வேண்டிவரும். இந்தப் பிரச்சினைகளால், கோரிய சார்பலன்களின் மதிப்பு, ஒரு இடத்தில் மட்டுமல்ல, ஆனால் எந்த இடைவெளியில் தீர்வுகாண வேண்டுமோ அதன் இரு எல்லைகளிலும் மதிப்புகாண வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக கொடுக்கப்பட்ட $F(t, r, \dot{r})$ எனும் விசையால் இயங்கப் பெறும் துகளின் இயக்கப் பிரச்சினையின் தீர்வுகாணும்போது அடிக்கடி $t = t_0$ எனும் நேரத்தில் நிலைவெக்டர் $\mathbf{r}_0$ அதன் நிலையைத் தருகிறது என்றால் $t = t_1$ எறை நேரத்தில் $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ எனும் நிலையை அடையவுள்ள இயக்க விதியைக் காண வேண்டி வரும்

$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0; \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ எனும் எல்லை மதிப்புக்களையுடைய $m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ எனும் இயக்க வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை விடுவிக்கும் பிரச்சினையாக இது முடிகிறது.

பொதுவாகச் சொன்னால், இந்த பிரச்சினைக்குத் தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வு இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். குண்டு வீச்சுக் கணக்குகளையும், பூதளத்தில் அவை எங்கு விழுகின்றன என்பதைப் பற்றியுள்ள கணக்குகளையும் பற்றிக் கூறும்போது இரு இடங்களுக்கிடையே மிகக் கீழ்நோக்கிவரும் பாதை, ஏறக்குறைய சமமாக விழும் பாதை என இருப்பதையும் (படம் 2·3) அல்லது ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு இடத்தை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பாதைகளால் உலகத்தைச் சுற்றியும் அடையக் கூடும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.



படம் 2.3

இது போன்றுள்ள எல்லைப் பிரச்சினை ஒளிச்சிறழ்ச்சி ஏற்படுத்தும் பொருள் வழி ஒளிக்கற்றை செல்லும்போதும் ஏற்படும். குறிப்பிட்ட புள்ளி B அடைய, A-யிலிருந்து என்ன திசையில் ஒளிக்கதிர் புறப்பட வேண்டும் என்பது ஒரு பிரச்சினை.

இந்தப் பிரச்சினைக்கு எப்போதும் தீர்வு இருக்கவேண்டும் எனும் அவசியமில்லை என்பது மிகத் தெளிவு. அவ்வாறு இருப்பினும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்டோ அல்லது கணக்கிலாததுவோ ஆனபாதைகள் (எடுத்துக்காட்டாக A-யிலிருந்து புறப்படும் கதிர்கள் B-க்குக் குவிதல்).

எல்லைப்பிரச்சினையுடைய சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு காண முடிந்தால், பிரச்சினையின் தீர்வு காண. எல்லை நியதிகளிலிருந்து இச்சைக்கேற்ப உள்ள நிலை எண்களின் மதிப்புக்களைக் காண வேண்டும். எப்போதும் மெய்யெண் மதிப்புடைய தீர்வு இருக்கும் எனக் கூற இயலாது. அவ்வாறு இருந்தால் அது தனித்தன்மை வாய்ந்ததாக இருக்கவேண்டுமென்பதுவுமில்லை. சாத்தியக் கூறுகளை விளக்கக் கீழ்வரும் எல்லைப் பிரச்சினைகளை ஆராய்வோம்.

$$y'' + y = 0 \qquad \ldots \quad (2\cdot135)$$

என்பதில் $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ எனின் தீர்வு காண்க.

(2·135)-ன் பொதுத்தீர்வின் வடிவம்

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$c_1 = 0$ எனின் முதல் நியதி பொருந்தும்,

$$y = c_2 \sin x$$

$x_1 \neq n\pi$, (இங்கு n முழு எண்)—என்றால் இரண்டாவது நியதியிலிருந்து,

$$y_1 = c_2 \sin x_1, \quad c_2 = \frac{y_1}{\sin x_1}.$$

இந்த இடத்தில் எல்லைப் பிரச்சினைக்குத் தனித் தன்மையுள்ள தீர்வு உள்ளது.

$$y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x.$$

ஆனால், $x_1 = n\pi$, $y_1 = 0$ என்றால், $y = c_2 \sin x$ எனும் எல்லா வரைத் தொகுதிகளும் எல்லைப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு ஆகும்.

$x_1 = n\pi$, $y_1 \neq 0$ என்றால் எல்லைப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு இல்லை. ஏனெனில் $y = c_2 \sin x$ எனும் வரைத் தொகுதியில் ஒருவரை கூட $x_1 = n\pi$, $y_1 \neq 0$ எனும்படியுள்ள (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லாது, இரண்டாம் வரிசை ஒருபடிச் சமன்பாடுள்ள எல்லைப் பிரச்சினைகளை விரிவாகக் கவனிப்போம்.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \phi(x), \quad \ldots \quad (2.136)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \quad \ldots \quad (2.137)$$

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$$ என ஒருபடித் தொடர்புள்ள ராசி மாற்றம் செய்ய (2·137)ல் உள்ள எல்லை நியதிகள் $z(x_0) = z(x) = 0$ எனும் பூச்சியம் தரும் நியதிகளாகின்றன. (2.136)–ன் ஒருபடித்தன்மை பாதிக்கப்படுவதில்லை.

$e^{\int p_1(x)\,dx}$ என்பதால்(2.136)-ன் ஒருபடிச் சமன்பாட்டை பெருக்க (2.136)-ன் சமன்பாடானது.

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x) \quad \ldots \quad (2.138)$$

எனும் சமன்பாடாக மாறுகிறது. இங்கு $p(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}$ பொதுத் தன்மைக்குப் பாதகமில்லாமல், ஆகவே (2.138)-ன் சமன்பாட்டை,

$y(x_0) = y(x_1) = 0$ எனும் எல்லை நியதிகளுடன் கவனிப்பதால் (2.136), (2.137)-ன் சமன்பாட்டையும் எல்லை நியதிகளுடன் தீர்ப்பதாகும். (2.138), (2.139)-ல் உள்ள எல்லைப் பிரச்சினைகளை முதலில் ஆராய்வோம். இங்கு $x=s$ எனும் இடத்தில் நிலைத்துள்ள ஓர் அலகு உந்தமுள்ள சார்பலன் $f(x)$ ஆகும். இன்னும் திட்டமாகக் கூற,

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f_\varepsilon(x, s) \quad \ldots \quad (2\cdot140)$$

எல்லை நியதிகள் $y(x_0) = y(x_1) = 0$ இங்கு

$$\int_{s+\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_t(x_\varepsilon s)\,dx = 1,$$ அல்லாமலும் $x = s,\ s - \varepsilon < x < s+\varepsilon$ எனும் $x = s$ எனும் புள்ளியின் t அண்மை இடைவெளி நீங்கலாக $[x_0, x_1]$ எனும் இடைவெளியில் $f_\varepsilon(x, s) = 0$.

இந்த எல்லைப் பிரச்சினையின் தொடர்ச்சியுடைத் தீர்வை $G_\varepsilon(x, s)$ எனக் குறிக்கவும். $\epsilon \to 0$ ஆகும்போதுள்ள எல்லையைக் காணவும்.

$$\lim_{t \to 0} G_\varepsilon(x, s) = G(x, s) \quad \ldots \quad (2\cdot141)$$

இந்த எல்லை உள்ளமையை நிறுவுவது கடினமில்லை. $f_\varepsilon(x, s)$ எனும் சார்பலனைச் சார்ந்து இந்த எல்லை இருப்பதில்லை) ஆனல், இந்த நிருபணம் நமக்குத் தேவையில்லை. ஏனெனில், இதுவரை நமது ஆய்ந்த முடிவுக்கு வருவது கண்டு தொடர்தல் முறை (heuristic) யாகும். பக்கம் 195-ல் $G(x, s)$ எனும் சார்பலனின் திட்டமான வரையறை கொடுக்கப்படுகிறது,

$G(x. s)$ எனும் சார்பலன் எல்லைப் பிரச்சினையைச் சார்ந்த பாதிக்கும் சார்பலன் (influence function) அல்லது கிரீன் சார் பலன் (Green's function) எனப்படும். பக்கம் 149-ல் நாம் கண்டதுபோல, (2·138), (2·139)-ல் உள்ள எல்லாப் பிரச்சினை அதன் தொடர்ச்சியுடைய 2 138-ன் வலப்பக்கத்துடன் சேர்ந்து எல்லைப் பிரச்சினைகளுடைய தீர்வுகள் யாவும் சேர்ந்தது எனக் கொள்ளலாம். இந்தப் பிரச்சினைக்கு ஒத்த சார்பலன்கள் $f(s_i)$ $\triangle s$ எனும் உந்தத்துடன் ஒரு புள்ளியில் நிலைக்கப்பெற்றதாகும். s_i என்பது $[x_0, x_1]$ எனும் இடைவெளியை சமக் கூறுகளாக்கி) அவற்றின் புள்ளகளாகும். இடைவெளி $\triangle s = \dfrac{x_1 - x_0}{m}$ இன்னும் திட்டமாகக்கூற (2·138), (2·139)-ன் தோராயமான தீர்வு,

$\sum_{i=1}^{m} G(x, s_i) f(s_i) \triangle s$ எனும் நுண்தொகைக்குச் சமம். $m \to \infty$ ஆகும்போது இதன் எல்லை

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s) ds \qquad \dots \qquad (2\cdot142)$$

இதுவே கையில் உள்ள (2·138), (2·139)-ன் எல்லைப் பிரச்சினையின் தீர்வு ஆகும், $G(x, s)$ எனும் பாதிக்கும் சார்பலன் என்பதும், (2·142)-ன் தீர்வினதும் இயற்பியல் விளக்கம் தெளிவாக, (2·140)-ல் உள்ள சமன்பாட்டில் $y(x)$ என்பதை (x_0, x_1) எனும் காலவெளியில் தொடர்ந்து செயல்படும் $f(x)$ எனும் விசையின் கீழ் ஏற்படும் இடமாற்றம் $y(x)$ எனக், [எடுத்துக் காட்டாக, சமநிலையிலிருந்து சீராக $f(x)$ எனும் அடர்த்தியோடு பரவியுள்ள சுமையின் கீழ் சமநிலையிலிருந்து மாறுபடும் நூலின் இயக்கம்] கொள்ளலாம். ஆகவே $x = s$ எனும் புள்ளியில் மட்டும் ஒருங்குச்செயல்படும் அலகு விசையின் கீழ்வரும் இடமாற்றத்தை

$G(x, s)$ கூறுகிறது. (2·142)-ன் தீர்வு ஒருங்கிச் செயல்படும் விசைகளுக்கேற்ற மாறுதலின் கூடுதலாகும்.

(2·141)-ல் உள்ள விளக்கத்திலிருந்து கிரீன் சார்பலன் கீழ்வரும் பண்புகளையுடையது.

1. $G(x, s)$ எனும் சார்பலன் நிலையான s-க்கு x-ல் தொடர்ச்சியுடையது. அல்லாமலும் $x_0 < x < x_1$, $x_0 < s < x_1$.

2. $x = s$ எனும் புள்ளி நீங்கலாக $[x_0, x_1]$ எனும் இடைவெளி முழுவதிலும் (ஏனெனில் s நிலையாகவுள்ள சார்பலனில் வலப்பக்கம் பூச்சியம்).

$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0$ எனவுள்ள ஒத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும். $G(x, s)$ எனும் சார்பலன்.

3. $G(x_0, s) = G(x_1\ s) = 0$ எனும் எல்லை நியதிகட்குட்பட்டது $G(x, s)$ எனும் சார்பலன்.

4. $x = s$ எனும் இடத்து $G'_x(x, s)$ எனும் வகைக்கெழுச் சார்பலன் முதல்வகைத் தொடர்ச்சி அறுதல் உடையதாக இருக்க வேண்டும். அத்துடன் மதிப்பு $\frac{1}{P(s)}$ திடீர் மாறுதல் ஆக வேண்டும். ஏன், நிலைபெறும் புள்ளி அதாவது $x = s$ எனும் இடத்து தொடர்ச்சி அறுதலை எதிர்பார்க்க வேண்டியதே.

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,G'_\varepsilon(x, s)) + q(x)\,G_\varepsilon(x, s) \equiv f_\varepsilon(x, s)$$

எனும் முற்றொருமையை dx ஆல் பெருக்கி $s - \varepsilon$ விருந்து $s + \varepsilon$ வரை தொகையீடு செய்யக் கிடைப்பது,

$$p(x)\,G'_\varepsilon(x, s)\Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} + \int_{s-t}^{s+t} q(x)\,G_\varepsilon(x, s)\,dx = 1$$

$\epsilon \to 0$ எனும்போது எல்லையைக் காண நாம் அடைவது,

$$[G'(s+0, s) - G'(s-0)\,s] = \frac{1}{p(s)}.$$

கிரீன் சார்பலன்களைச் சார்ந்து இந்த ஆய்வுகள் கண்டு தெளிதல் முறையைப் பின்பற்றியவை. செவ்விய ஆய்வு முறையில் இனி ஆராய்வோம்.

வரையறை (2·138), (2·139)-ன் சமன்பாடுகளின் கிரீன் சார்பலன் $G(x, s)$ என்பது (1), (2), (3), (4) எனும் மேற்கூறிய நியதிகட்குட்பட்ட சார்பலன் ஆகும்.

(2·138)-ன் சமன்பாட்டில் நேரடியாகப் பிரதியிட்டால்

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s)\, ds \qquad \ldots \qquad (2\cdot142)$$

என்பது இந்தச் சமன்பாட்டின் [(3)-வது நியதியினால் எல்லா நியதிகளும் பொருந்துகின்றன] தீர்வு எனச் சரிபார்க்கப் படுகிறது.

ஏன் $y'(x) = \int_{x_0}^{x_1} G'x(x,s) f(s) ds) = \int_{x_0}^{x^1} G'x(x, s) f(s)\, ds)$

$$+ \int_{x_0}^{x^1} G'(x,s) f(s)\, ds;$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s) f(s)\, ds + G'_x(x, x-0) f(x).$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds - G'_x(x, x+0) f(x) =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,s) f(s)\, ds + [G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x)] f(x).$$

(2·142)ஐ 2 138-ல் பிரதியிட நாம் அடைவது

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(x)G''_{xx}(x,s) + P'(x)G'_x(x,s) + q(x)G(x,s)]\, dx +$$

$$+ p(x)\,[G'_x(x+0,x) - G'(x-0)]\, f(x) \equiv f(x).$$

ஏனெனில் (2)-வதும் (4) நியதிகளினால்.

இப்போது கிரீன் சார்பலன் அமைக்கவுள்ள வழியைக் காண்போம். இதனால் இது உள்ளமைக்குப் போதுமான நியதியையும் காண்போம்.

$$\frac{d}{dx}(P(x)y') + q(x)\,y = 0 \qquad \ldots \qquad (2{\cdot}143)\text{-ன்}$$

தீர்வை $\bar{y}(x_0) = 0,\ y'(x_0) = y'_0 \neq 0$ எனும் நியதிகளுடன் காண்போம்.

இந்தத் தீர்வு பொதுவாகக் கூறுமிடத்து இரண்டாவது எல்லை நியதி $y(x_1) = 0$ என்பதற்குப் பொருந்தும் எனக் கூற முடியாது. $y_1(x_0) = y_1(x_1) = 0$ என்பது விதிவிலக்கானது. அதை நாம் இங்கு எடுக்கவில்லை. c_1 ஏதேனும் ஒரு நிலை எண்ணானால் தீர்வுகள் $c_1\,y_1\,(x)$ என்பது $y\,(x_0) = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு ஒத்தது என எளிதில் புலனாகிறது. இதேபோல $y_2\,(x_1) = 0$ எனும் எல்லை நியதிக்கு ஒத்த சாரமுள்ள தீர்வு $y_2\,(x)$ஐக் காண்போம். இதே நியதிக்கு ஒத்ததாக $c_2\,y_2\,(x)$ எனும் எல்லாத் தீர்வுகளும் — c_2 ஏதேனும் நிலை எண் இருக்கும்.

$$G\,(x, s) = \begin{cases} c_1\,y_1\,(x) & x_0 < x < s, \\ c_2\,y_2\,(x) & s < x < x_1 \end{cases}$$

எனக் கிரீன்சார்பலனைக் காண முயல்வோம்.

நியதிகள் (1), (4)-க்கு ஒத்த c_1, c_2 எனும் நிலை எண்களைத் திட்டப்படுத்துவோம். அதாவது s நிலையாக இருக்க x-ல் தொடர்ச்சியுடையதாக $G\,(x, s)$ இருக்க வேண்டும், குறிப்பாக $x = s$ எனும் இடத்துத் தொடர்ச்சியுடையதாக வேண்டும்.

அதாவது

$$c_1\,y_1\,(s) = c_2\,y_2\,(s), \qquad \ldots \qquad (2.144)$$

அத்துடன் $G'_x\,(x,s)$ $x = s$ எனுமிடத்து திடீர் மாறுதல் $\dfrac{1}{p\,(s)}$ உடையதாக வேண்டும்.

$$c_2\,y_2'\,(s) - c_1\,y_1'\,(s) = \frac{1}{p\,(s)} \qquad \ldots \qquad (2{,}145)$$

கொள்கையால் $y_1\,(x_1) \neq 0$, இதனால் $y_1\,(x)$ம் $y_2\,(x)$ம் ஒருபடிச் சார்புடையனவல்ல. ஏனெனில் $y_1\,(x)$வுடன் ஒருபடிச் சார்புடையத் தீர்வுகள் யாவும் $c_1\,y_1\,(x)$ வடிவிலாகும். ஆகவே, $c_1 \neq 0$ என்றால் அவை x_1 எனுமிடத்துப் பூச்சியமாகாது. ஆனால் இங்கு $y_2\,(x_1) = 0$. ஆகவே $(2{\cdot}144)$ $(2{\cdot}145)$ எனும்

தொகுதியின் அணிகோவை $w(y_1(x), y_2(x)) = w(x)$, $x = s$ எனுமிடத்து; பூச்சியமல்ல. c_1, c_2 எனும் நிலை எண்கள் (2.144) (2.145), எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குட்பட்டவை—திட்டபடுத்தப்படுகின்றன.

$$c_1 = \frac{y_2(s)\, y_1(x)}{w(s)\, p(s)}, \quad c_2 = \frac{y_1(s)\, y_2(x)}{w(s)\, p(s)},$$

ஆகவே

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(s)\ y_1(x)}{W(s)\ P(s)} & x_0 < x < s, \text{ எனும் இடத்து} \\[2ex] \dfrac{y_1(s)\ y_2(x)}{W(s)\ P(s)} & s < x < x_1 \text{ எனுமிடத்து} \end{cases} \quad \ldots(2\cdot146)$$

எடுத்துக்காட்டு :

$y''(x) + y(x) = f(x)$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ எனும் எல்லைப் பிரச்சினைக்கு ஒத்த கிரீன் சார்பலனைக் காணவும்.

இதற்கு ஒத்த, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ எனும் நியதிகளுடன் கூடிய, சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் முறையே $y_1 = c_1 \sin x$ $y_2 = c_2 \cos x$,

ஆகவே ... (2·146)-ல் உள்ளபடி

$$G(x, s) \begin{cases} -\cos \sin x; \ 0 < x < s, \\[1ex] -\sin \cos x; \ s < x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$y(x_0) = y(x_1) = 0$ எனும் எல்லை நியதிக்குட்பட்ட (2·143)-ல் உள்ள சமபடித்தான சமன்பாட்டிற்குச் சாரமுள்ள தீர்வு $y(x)$ இல்லை என (பக்கம் 198)க் கருதினோம். இந்த நிபந்தனை (2·138), (2·139)-ன் தீர்வின் உள்ளமையையும் தனித்தன்மையையும் தருவதுடன் கிரீன் சார்பலனின் தனித்தன்மையையும் உறுதிப்படுத்துகிறது.

ஏன், (2·138) (2·139)-ன் எல்லைப் பிரச்சினைக்கு $G_1(x, s)$, $G_2(x,s)$ என இரண்டு சார்பலன்கள் உள்ளன எனக் கருதினால் —

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} G_1(x, s) f(s) ds, \quad y_2(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_2(x,s) f(s)\, ds$$

என இரு தீர்வுகள் வரும். இதன் வேறுபாடு,

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x,s)\, ds - G_2\,(x, s)]\, f(s)\, ds$$ கொள்கைக்கு முரணாக

ஒத்த பூச்சிய எல்லை நியதிக்குட்பட்ட சமபடித்தான சமன்பாட்டின் சாரமுள்ள தீர்வுமாகும்.

இரண்டாம் அத்தியாயத்தில்

பயிற்சி கணக்குகள்

1. $y'' - 6y' + 10y = 100;\ x = 0,\ y = 10,\ y' = 5.$
2. $\ddot{x} + x = \sin t - \cos 2t.$
3. $y'\, y''' - 3\,(y'')^2 = 0.$
4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}\,.$
5. $x^2\, y'' - 4x\, y' + 6y = 2.$
6. $y'' + y = \cosh x.$
7. $y'' + \dfrac{2}{(1 - y)}\,(y')^2 = 0.$
8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\,\dfrac{dx}{dt} + 4x = e^t + e^{2t} + 1.$
9. $(1 + x^2)\, y'' + (y')^2 + 1 = 0.$
10. $x^3\, \dfrac{d^2x}{dt^2} + 1 = 0.$
11. $y^{IV} - 16y = x^2 - e^x.$
12. $(y'')^2 + (y'')^2 = 1.$
13. $\dfrac{d^6x}{dt^6} - \dfrac{d^4x}{dt^4} = 1.$
14. $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 2\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = t^2 - 3.$
15. $y'' + 4xy = 0$, அடுக்குத் தொடர் வடிவத் தீர்வுகாண்.
16. $x^2y'' + xy' + (9x^2 - \frac{1}{25})\, y = 0$; பெஸ்ஸல் சமன்பாட்டிற்கு மாற்றித் தீர்வுகாண்.
17. $y'' + (y')^2 = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

18. $y'' = 3\sqrt{y}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

19. $y'' + y = 1 - \dfrac{1}{\sin x}.$

20. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr} = 0.$

21. மிகமிக உயரத்திலிருந்து பூமியின்மேல் விழும் ஒரு துகளின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக. புவி ஈர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படுகிறதெனவும், பூமியின் ஆரம் 6400 கி.மீ. எனவும் கொள்க.

22. ஒரு துகள் துவக்கத்தில் சமநிலையிலிருந்து விழுகிறது. காற்றின் தடைவிசை வேகத்தின் வர்க்கத்துடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளது என்றால் இயக்க விதியைக் காண்க. அத்துடன் $t \to \infty$ ஆகும்போது எல்லை வேகம் 75மீ/செகண்டு எனவும் காண்க.

23. 6 மீ. நீளமுள்ள சங்கிலி மேசையிலிருந்து நழுவுகிறது. துவக்கத்தில் 1 மீ. சங்கிலி தொங்குகிறது. முழுச் சங்கிலியும் மேசையைவிட்டு நீங்க ஆகும் காலம் என்ன? (உராய்வு இல்லை எனக் கொள்ளவும்)

24. ஒரு வழவழப்பான ஆணிமீது ஒரு சங்கிலி போடப்படுகிறது. இயக்கம் துவங்கும்போது ஒரு பக்கம் நீளம் 8மீ, மற்றொரு பக்கம் 10மீ. முழுச் சங்கிலியும் நழுவி விழ ஆகும் காலம் என்ன? (உராய்வு இல்லை எனக் கொள்க.)

25. கிடைப்பாதையில் வண்டித் தொடர் நகருகிறது. தொடரின் எடை P. என்ஜினின் விசை F. இயக்கத்தால் ஏற்படும் தடை விசை $w = a + bv$ இங்கு a, b என்பவை நிலை எண்கள் 'v' என்பது வேகம். s என்பது சென்ற தூரம். $s = 0$ ஆகும்போது $t = 0, v = 0$ என்றால் இயக்கச் சமன்பாடு காண்க.

26. p கி.கிராம் எனும் எடையை ஒரு சுருள் கம்பியின் நுனியில் தொங்கவிட a செ.மீ. நீள்கிறது. அதனை இன்னும் a செ.மீ. இழுத்து துவக்க வேகம் இன்றி விட்டால் சுருள் கம்பியின் இயக்க விதியைக் காண்க. (தடை விசை இல்லை எனக் கொள்ளவும்.)

27. சமமான இரு சுமைகளை ஒரு சுருள் கம்பியின் நுனியில் உள்ளன. ஒன்று திடீரென விழுந்தால் கம்பியின் இயக்கவிதியைக் காண்க. ஒரு சுமைமட்டும் இருந்தால் கம்பி a செமீ. நீளம் எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

28. m திணிவுள்ள ஒரு துகள், O-எனும் புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்துடன் நேர்விகிதத்துடன் உள்ள விசையால் தள்ளப்படுகிறது. இயக்கத்திற்குத் தடை விசை வேகத்துடன் நேர்விகிதத்தில் உள்ளது. இயக்க விதியைக் காண்க.

29. $\ddot{x} + 2x = f(t)$ எனும் சமன்பாட்டில் $f(t) = \pi^2 t - t^3$; $-\pi < t < \pi$ எனும்போது; அன்றியும் திரும்பத் திரும்பத் தொடர்கிறது என்றால் 2π அலைவுகாலமுள்ள திரும்புச் சார்பலன் தீர்வு காண்க.

30. $yy'' + (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$

31. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$

32. $\ddot{x} + 9x = t \sin 3t$

33. $y'' + 2y' + y = \sinh x$

34. $y''' - y = e^x$

35. $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$

36. $(x^2 - 1)\, y'' - 6y = 1$ இதன் ஒத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டிற்கு பல்லுறுப்புக் கோவையில் சிறப்புத் தீர்வு ஒன்று உள்ளது

37. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $x^2 + y^2$-ஐ மட்டும் சார்ந்து நிற்கும் $u = u\,(x^2 + y^2)$ எனும் தீர்வு காணவும்.

38. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $x^2+y^2+z^2$-ன் சார்பலனை $u = u(x^2 + y^2 + z^2)$ எனும் தீர்வு காணவும்.

39. ஒரு திணிவுள்ள துகள்கள் ஒரு திரவத்தில் மெல்ல மூழ்குகிறது. திரவத்தின் தடைவிசை மூழ்கும் வேகத்துடன் நேர்விகிதத்தில் இருந்தால் இயக்கவிதியைக் காணவும்.

40. $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ எனும் இயக்க சமன்பாட்டின் தீர்வு காணவும். வலப்பக்கம் x-ஐ மட்டும் சார்ந்து நிற்கிறது அல்லது $\dot{x}$-ஐ மட்டும் எனக் கொள்க. அதாவது,

(a) $m\ddot{x} = f(x)$,

(b) $m\ddot{x} = f(\dot{x})$.

41. $y^{IV} - 3y^{V} + 3y^{IV} - y''' = x.$

42. $x^{IV} + 2x'' + x = \cos t.$

43. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 2\cos \ln (1+x).$

44. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^4}$

எனும் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்புத் தீர்வு காணவும்.

45. $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = f(t),$

என்பதில் a_1, a_2 நிலை எண்களாகும். $f(t)$ என்பது 2π எனும் அலைவுகாலமுள்ள, தொடர்ச்சியுள்ள சார்பலனும் $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ எனும்போது ஃபோரியர் தொடரில் விரிவுள்ளதுமாகும் என்றால் அதன் திரும்பு சார்புத் தீர்வு காணவும்.

46. $\ddot{x} + 3x = \cos t + \mu x^2$ சிறுதுணை அலகு தோராயமான திரும்பு சார்புத் தீர்வு காண்க.

47. $x^2 y'' - xy' + y = 0$ $y_1 = x$ என்பது ஒரு தீர்வு ஆனால் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

48. $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$ எனும் அடிப்படைத் தொகுதிச் சார்புத் தீர்வுடைய சமபடித்தான வகைகெழுச் சமன்பாடு காணவும்.

49. $x^{IV} + x = t^3.$

50. $x = (y'')^3 + y'' + 1.$

51. $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 2^t + te^{-5t}.$

52. $xy y'' - x(y')^2 - yy' = 0.$

53. $y^{VI} - y = e^{2x}.$

54. $y^{VI} + 2y^{IV} + y'' = x + e^x.$

55. $6y'' y^{IV} - 5(y''')^2 = 0.$

56. $x y'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$

57. $y'' + y = \sin 3x \cos x.$

58. $y'' = 2y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1.$

59 $yy'' - (y')^2 = y'.$

3. வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள்

(System of differential equations)

1. அடிப்படைக் கொள்கை

m திணிவுள்ள துகளின்மேல் $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ எனும் விசை செயல்பட வரும் இயக்கச் சமன்பாட்டை

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$ என்பதை

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X(t, x, y, z, \dot{x}. \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y(t, x, y, z\ \dot{x}, \dot{y}\ \dot{z}),$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z(t, x, y, x, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

எனும் திசையின் ராசிகளில் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளால் குறிக்கலாம். அல்லது

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{z} = w$$

$$m\dot{u} = X(t, x, y, z, \quad u, v, w),$$

$$m\dot{v} = Y(t, x, y, z, \quad u, v, w),$$

$m\dot{w} = Z(t. x, y, z, \quad u, v, w)$ எனும் ஆறு முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளால் குறிக்லாம். இங்கு காணவேண்டிய சார்பலன் துகளின் கார்டீசியக் கூறுகளை மட்டுமன்றி, அதன் திசை வேகம் $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ -ன் கூறுகள் $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ என்பவற்றையும் கொள்கிறோம்.

அப்போது துவக்கநிலையைச் சாதாரணமாக $x(t_0) = x_0$ $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$ எனவும் துவக்கத் திசைவேகக் கூறுகளை $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, $w(t_0) = w_0$ எனவும் குறிப்பது வழக்கம்.

இந்தத் துவக்க மதிப்புக்களுடன் கூடிய பிரச்சினை ஏற்கனவே அத்தியாயம் 1, பிரிவு 6-ல் (பக்கம் 54) காணப்படுகிறது. அங்கு $xi(t_0) = x_{i_0} (i = 1, 2, \ldots n) \ldots (3 \cdot 2)$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களுடன் கூடிய

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t,x,x_2 \quad \ldots \quad x_n), \\ \frac{dx^2}{dt} = f_2(t,x,x_2 \quad \ldots \quad x_n), \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t,x,x_2 \quad \ldots \quad x_n) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3 \cdot 1)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குத் தீர்வு உள்ளமை அதன் தனித்தன்மை பற்றிய தேற்றம் கூறப்பட்டுள்ளது.

(3·2)-ல் உள்ள துவக்க மதிப்புக்களுடன் கூடிய (3·1)-ன் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு உள்ளமையையும் தனித்தன்மையையும் இருக்க வேண்டிய நியதிகள் :

(1) துவக்க மதிப்புக்களுக்கு அணிமையில் f_i சார்பலன்களின் தொடர்ச்சி.

(2) இரண்டாவது ராசியிலிருந்து எல்லா ராசிகளையும் சார்ந்து f_i எனும் சார்பலன்கள் லீப்ஸிச் நியதிகளுக்கு அதே அணிமையில் கட்டுப்பட வேண்டும் என்பதை இங்கு நினைவு கொள்வோம். இரண்டாவது நியதிக்குப் பதிலாக அத்தனை செவ்வியதல்லாத நியதியை, அதாவது எல்லையுடைப் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (i, j = 1, 2 \quad \ldots \quad n)$ உள்ளமையைக் கொள்வோம்.

சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ எனும் n பரிமாணதிசைச் சார்பலனாகும். இதனை $X(t)$ எனக் கூறுவோம். இந்தக் குறியிட்டால் (3·1)-ல் உள்ள தொகுதியை

$$\frac{dX}{dt} = \bar{F}(t, X) \text{ எனலாம்.}$$

இங்கு F என்பது $(f_1, f_2, \ldots f_n)$ எனப் பிரிவுகள் உள்ள வெக்டர் சார்பலனாகும். துவக்க மதிப்புக்கள் $X(t_0) = X_0$. இங்கு X_0 என்பது n பரிமாண $(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ எனும் பிரிவுகளையுடைய வெக்டராகும். தொகுதியின் தீர்வு $(x_1) = x_1(t) \quad x_2 = x_2(t) \ldots x_n = x_n(t)$ அல்லது சுருக்கமாக $X = X(t)$ என்பது $(t, x_1, x_2 \ldots x_n)$

எனும் கூறுகளைக்கொண்ட யூக்ளிச் வெளியில் தீர்வு வரை எனப்படும் வரையைக் குறிக்கிறது. 'உள்ளமை தனித் தன்மை' தேற்ற நியதிகள் பொருந்த இந்த வெளியில் ஒவ்வொரு புள்ளி வழியும் ஒரே தீர்வுவரை செல்லும். இவ்வாறு செல்லும் வரைகள் கூட்டம் n துணை அங்குக் குடும்பமாகிறது. இவற்றின் துணை யலகுகளாக, உதாரணமாக, $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களைக் கொள்ளலாம்.

$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots x_n = x_n(t)$, அல்லது சுருக்கமாகக் கூற $X = X(t)$ என்பதற்கு வேறொரு விளக்கமும் உள்ளது. (3·1)-ன் வலப்பக்கம் 't' ஐச் சார்ந்து வெளிப்படையாக இல்லாமலிருந்தால் இது மிகவும் சௌகரியமாக இருக்கும்.

$(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனக் கூறுகளுள்ள யூக்ளிதாவெளியில் தீர்வுகள் $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t) \quad x_n = x_n(t)$ என்பது 't' எனும் துணை யலகைச் சார்ந்த இந்த விளக்கத்தில் 't' கால அலகைக் குறிக்கும் இயக்கப் பாதை (tragectary)யைக் குறிக்கும் $\frac{dX}{dt}$ எனும் வகைக் கெழு அதன் திசை வேகத்தைத் தரும் $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \ldots \frac{dx_n}{dt}$ என்பவை குறிப்பிட்ட நேரத்தில்—இடத்தில்—திசை வேகத்தின் பிரிவு களைத் தரும், இயல்பியல், பொறியியல் தொடர்புள்ள பிரச்சினை களில் இயற்கையாகவே நேரிடும் இடங்களில் இந்த விளக்கம் மிகவும் சவுகரியமானது. அங்கு,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad 3.1$$

எனும் தொகுதி 'இயக்கம் சார்ந்தவை' (Dynamical) எனக் கூறப் படும் (x_1, x_2, x_n) எனும் வெளி ஃபேஸ் வெளி (phase space) எனப் படும் வரை $\bar{X} = X(t)$ என்பது ஃபீப்ஸ்வரை எனப்படும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட 't' நேரத்தில், (3.1)ல் உள்ள இயக்கத் தொகுதி (dynamical system) (x_1, x_2, x_n) எனும் வெளியில் ஒரு திசை வேகக் களத்தைத் திட்டமாக்குகிறது. **F** எனும் வெக்டர் சார்பலன் 't'-ன் வெளிப்படைச் சார்பல்ன். ஆனால் திசை வேகக் கலம் காலத்தின் சார்பலனாகும் ஃபேஸ் வரைகள் வெட்டிக்கொள் ளவும் செய்யலாம். ஆனால் **F** எனும் வெக்டர் சார்பலன், அல்லது எல்லா f_i சார்பலன்களும், 't'யின் வெளிப்படைச் சார்பலன் அல்லவானால், அதாவது 't'-யுடன் மாறவில்லையானால் இயக்கம் சீரானது ஆகும்.

பிந்திய இடத்தில், உள்ளமை தனித்தன்மை நியதிகள் இருந்தால் $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் புள்ளிவழித் தோற்ற வெளியில் ஒரே ஒரு இயங்கு பாதை செல்லும். இந்த இடத்தில் மாறுபட்ட எண்ணின் இயக்கங்கள் $X = X(t+c)$, $X = y(t)$ எனும் இயங்கு பாதை வழி ஏற்படுகின்றன. (c என்பது இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் நிலை எண்). $t_1 = t+c$ என ராசி மாற்றம் செய்ய இயக்கத் தொகுதியின் வடிவம் $\frac{dX}{dt_1} = F(X)$ என்பது மாறுவதில்லை என்பதை எளிதில் அறியலாம். ஆகவே $X = X(t_1)$ என்பதுவும் தீர்வு ஆகும். அல்லது பழைய ராசியில் இது $x = X(t+c)$ ஆகும்.

நாம் எடுத்துக் கொண்ட இடத்தில் X_0 எனும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிவழி இரண்டு இயக்கப் பாதைகள் தோற்ற வெளியில் இருந்தால்

$$X = X_1(t) \quad X = X_2(t) \quad X_1(\bar{t}_0) = X_2(\bar{t}_0) = X_0$$

X_0 எனும் புள்ளியை $t = t_0$ எனும் நேரத்தில் இரண்டு பாதைகளிலும் அடைகிறதெனக் கொள்ள. அதாவது $X = X_1(t - t_0 + \bar{t}_0)$ $X = {}_2(t - t_0 + \bar{t}_0)$ எனத் தீர்வுகளைக் கொள்ள உள்ளமை தனித்தன்மை தேற்றத்திற்கு முரணுவதைக் காண்கிறோம். ஏனெனில் $X_1(t - t_0 + \bar{t}_0)$. $X_2(t - t_0 + \bar{t}_0)$ எனும் இரண்டு தீர்வுகளும் $X(t_0) = X_0$ எனும் ஒரே துவக்க மதிப்புக்குட்பட்டதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = -x \qquad \ldots \quad (3\cdot3)$$

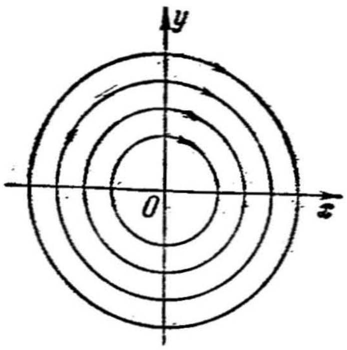
எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதி

$$x = c_1 \cos(t - c_2)$$

$$y = -c_1 \sin(t - t_2)$$ எனும் தீர்வுத் தொகுதியையுடையது. (இதனை பிரதியிட்டு எளிதில் சரிபார்க்கலாம்).

't' என்பதைத் துணையலகாகக் கொள்ளத் (x, y) தோற்றத் தளத்தில் பொதுமையம் மூலப்புள்ளியைப் உடைய வட்டங்கள் வருகின்றன. (3·3)-ன் வலப் பக்கம் t-ஐச் சாரவில்லை. 'உள்ளமை' தனித்தன்மைத் தேற்ற நியதிகட்குட்பட்டதும் ஆகும். ஆகவே இயக்கப்பாதைகள் வெட்டிக் கொள்வதில்லை. c_1-ஐ திட்டப்படுத்த திட்டமான இயக்கப் பாதையை நாம்

அடைகிறோம். c_2-வின் பலமதிப்புக்களுக்கு இந்த இயக்கப்பாதையில் மாறுபட்ட இயக்கங்கள் நேரிடுகின்றன. இயக்கப் பாதையின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = c_1^2$ என்பது c_2-ஐச் சாரவில்லை ஆகவே, c_1 எனும் மதிப்புக்குள்ள இயக்கங்கள் யாவும் இந்த வட்டத்தில் நேரிடுகின்றன. $c_1 = 0$ என்றால் இயக்கப் பாதை புள்ளி ஆகிறது. அது (3·3) தொகுதியில் சமநிலைப்புள்ளி எனப்படும்.



படம் 3·1.

2. ஓர் உயர் வரிசைச் சமன்பாட்டிற்கு மாற்றி தொகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறை

தொகுதி வகைக்கெழுச்சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணும் ஒருமுறை கீழ்க்காண்பது போலாகும். (3·1)-லிருக்கும் சமன்பாடுகளிலிருந்தும் அவற்றை வகையிட்டுவரும் சமன்பாடுகளிலிருந்தும் ஒரு சார்பலனைத் தவிர மற்ற சார்பலன்களை நீக்க வேண்டும். இந்த ஒருசார்பலனைக் காண, உயர் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை ஆக்குகிறோம்

இதன் தீர்வு கண்டு காணவேண்டிய சார்பலன்களில் ஒன்றை திட்டப்படுத்தப்படுகிறது. தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்தும் அவற்றை வகையிட்டுவரும் சமன்பாடுகளிலிருந்தும் (இயன்ற வரை நுண் தொகை காணுமல்) ஏனைய சமன்பாடுகளைக் காண்கிறோம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இதனை விளக்கும்.

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = x$$

இவற்றுள் ஒன்றை வகையீடு செய்ய—முதல் சமன்பாடெனக் கொள்வோம்.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \ ; \ \frac{dy}{dt} \text{ ஐ நீக்க}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0, \ \therefore x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

முதல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த நாம் அடைவது

$$y = \frac{dx}{dt} = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$$ நுண்தொகை காணாமலேயே

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து y-ஐக் காண்போம்.

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து y-ஐ நிச்சயிப்பதானால் அதாவது $\frac{dy}{dt} = x = c_1 e^{t} + c_2 e^{t}$, $y = c_1 e^{-t} - c_2\ e^{-t} + c_3$.

ஒவ்வாத தீர்வுகளைப் புகுத்த நேரிடும். ஏனெனில் நேராகப் பிரதியிட்டுச் சரிபார்த்தால் $x = c_1 e^{t} + c_2 e_1^{-t}$, $y = c_1 e^{t} \quad c_2 e^{-t} \cdot c_3$ என்பது பொருந்தும் தீர்வாக $c_3 = 0$ எனும் மதிப்புக்கு மட்டும் இருக்கும். எல்லா c_3-ன் மதிப்புக்களுக்கல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y. \qquad \dots (3.4_1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y. \qquad \dots (3\ 4_2)$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டை வகையிடு செய்ய

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \qquad \dots (3.5)$$

(3.4_2), (3.5)-லிருந்து x-ஐயும் $\frac{dx}{dt}$-ஐயும் காண

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt} + y\right) \qquad \dots (3.6)$$

$$\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\right).$$

இதனை $3{\cdot}4_1$-ல் பிரதியிட

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய இந்தச் சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு காண

$y = e^{t}(c_1 + c_2 t)$, இதனை (3.6)-ல் பிரதியிட

$x = \tfrac{1}{2} e^{t}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x.$$

முதல் சமன்பாட்டை வகையிட நாம் அடைவது $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^4x}{dt^4}$.

இரண்டாவதில் பிரதியிட நாம் அடைவது $\frac{d^4x}{dt^4} = x$. இந்த சமபடித்தானச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண நாம் அடைவது

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

இதனை முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t.$$

அடுத்தபடியாக இன்னும் திட்டமாக ஒன்றைத் தவிர மற்ற அறியாச் சார்பலன்களை ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதியிலிருந்து நீக்கும் முறையைக் கூறுவோம்.

முதலில்

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t_1, x_1, \quad \ldots \quad x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_2, \quad \ldots \quad x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \quad \ldots \quad x_n). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8\cdot1)$$

எனும் சமன்பாட்டில் $x_1(t)$ எனும் மேற்கூறிய அறியாத சார்பலன்களில் ஒன்று ஒரு nth வரிசை வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு எனக் காண்போம். இங்கு எல்லா ராசிகளிலும் சார்பலன்களின் வகைக்கெழுக்கள் $(n\text{-}1)th$ வரிசை உட்பட தொடர்ச்சியுடையதெனக் கொள்வோம். ஏதேனும் ஒரு தீர்வு $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ என்பதை (8·1)-ல் பிரதியிட எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் முற்றொருமையாக்குகிறோம். குறிப்பாக, தொகுதியின் முதல் சமன்பாடு

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \quad \ldots \quad x_n) \text{ என்பது}$$

மூற்றொருமையாகும். இதனை 't' ஐச் சார்ந்து வகையிட

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

அல்லது,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} f_i \qquad \dots \quad (3.7_1^a)$$

இதன் வலப் பக்கத்தை $F_2(t_1, x_1, \dots x_n)$ எனக் குறிக்க நாம் அடைவது

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t_1, x_1, x_2, \dots x_n). \qquad \dots \quad (3.7_2^b)$$

மீண்டும் இதனை வகையீடு செய்ய

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

அல்லது

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{i x_i} f_i. \qquad \dots \quad (3.7_3^a)$$

இந்த முற்றொருமையின் வலப் பக்கத்தை $F_3\ (t, x_1, \dots x_n)$ எனக் குறிக்க நாம் அடைவது

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, \dots x_n). \qquad \dots \quad (3.7_3^b)$$

இந்த முற்றொருமையை மீண்டும் வகையிடுவோம். இவ்வாறு $(n-2)$ முறை இதனைத் தொடர முடிவில் நாம் அடையும் முற்றொருமை

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots x_n). \qquad \dots \quad (3.7_{n-1}^b)$$

இதனை மீண்டும் வகையீடு செய்ய, (3.1)ல் உள்ள முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்த

$\dfrac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots x_n)$ என வருகிறது.

இவ்வாறு நாம் $(n-1)$ முற்றொருமைகளை

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \ldots \quad (3.7_1) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \ldots \quad (3\cdot7_2) \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} &= F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \ldots (3.7_{n-1}) \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

இன்னும் ஒரு முற்றொருமை

$$\frac{d^n x_1}{dt} = F_n(t, x_1, \ldots x_n). \qquad \ldots \quad (3\cdot8)$$

ராசிகள் மாறும் இடைவெளியில் அணிகோவை,

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \ldots F_{n-1})}{D(x_2, x_3, x_4, \ldots x_n)} \neq 0$$

எனக் கொள்வோம். அப்போது, $x_2, x_3 \ldots x_n$ என்பவற்றை $t, x_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$ என்பவற்றில் மாற்றி, அவற்றைக் காண்போம். இவ்வாறு (3·7)-ன் தொகுதிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைத்த $x_2, x_3 \ldots x_n$ என்பவற்றை (3·8)-ல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட n வரிசை வகைக் கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \qquad \ldots \quad (3\cdot8_1)$$

வருகிறது.

இப்போது $(3\cdot8_1)$-ல் உள்ள n வரிசைச் சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு $x_1(t)$-ஐக் கொண்டு, தொகுதியின் $x_2(t)$ $x_3(t), \ldots x_n(t)$ என்பவற்றைக் காண்போம். அப்போது,

$$x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t) \qquad \ldots \quad (3\cdot9)$$

என்பன (3·1)-ன் தொகுதியின் தீர்வு ஆகும்,

(3 9)-ல் உள்ள சார்பலன்களை (3·7)-ல் பிரதியிட்டு எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் முற்றொருமைகளாக்குகிறோம். குறிப்பாகவரும் முற்றொருமை,

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (3\cdot7_1)$$

இந்த முற்றொருமையை t-ஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்ய நாம் அடைவது,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{}{\partial x_i} \frac{d^i x}{dt} \qquad \dots \qquad (3\cdot10)$$

எனும் முற்றொருமையாகும். இந்த முற்றொருமையில் $\frac{dx_i}{dt}$ ஐக்குப் பதிலாக f_i சார்பலன்கள் இடமுடியவில்லை.

ஏனெனில் (3·8)-லிருந்து கிடைத்த சார்பலன்கள் $x_1, x_2, \dots x_n$ என்பவையும் (3·7)-ல் உள்ள தொகுதியும் (3·1)-ன் தொகுதிக்குப் பொருந்தும் என இன்னும் நிறுவவில்லை. அல்லாமலும் இவ்வாறு உறுதியாகச் சாற்றுவதுதான் நமது குறிக்கோளுமாகும்.

3·10-ல் உள்ள முற்றொருமையிலிருந்து 3·7$_2$-ன் விரிவான முற்றொருமை 3·7$_2^a$-ஐ உறுப்பு வாரியாகக் கழிக்க,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\frac{dx_i}{\partial t} - f_i\right) \equiv 0.$$

அல்லது (3·7$_1$) லிருந்து

$$\sum_{t=2}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) \equiv 0.$$

இதேபோல 3·7$_2$ன் முற்றொருமையை வகையீடு செய்து 3·7$_3^a$ ஐக் கழிக்கவும். இதேபோல 3·7$_3$ஐ வகையீடு செய்து 3·7$_4^a$ ஐக் கழிக்கவும், அப்போது நாம் அடைவது

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) = 0,\\
&\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) = 0,\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \dots \qquad (3\cdot11)$$

இவை $(n-1)$ சமன்பாடுகள் காணவேண்டியவை $(n-1)$ எண்ணிக்கையுள்ள $\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)$ $(i=1, 2, \ldots n)$ இவை பூச்சியமல்லாத அணிகோவை சார்பலன்,

$$\frac{D(f_1, F_1 \quad F_{n-1})}{D(x_2\ x_3 \quad \ldots \quad x_n)} \neq 0$$

(3·11)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் எடுத்துக் கொண்ட இடைவெளியில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சாரமற்ற தீர்வு

$$\frac{dx_i}{dt}-f_i \equiv 0 \quad (i=2, 3 \ldots n)$$

என்பவற்றை உடையது. $(3\cdot7_1)$-ல் உள்ளதையும் கொள்ள,

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i\,(t, x_1, x_2, \ldots x_n \quad (i=1, 2, \ldots n).$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு $x_1, x_2, \ldots x_n$, எனும் n சார்பலன்கள் எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 1 : இவ்வாறு ஒன்றை ஏனைய சார்பலன்களை நீக்கும்போது,

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots F_{n-1})}{D(x_2, x_3 \ldots x_n)} \neq 0 \qquad (3\cdot12)$$

எனக் கொள்கிறோம்.

இந்த நியதி பொருந்தாவிடிலும் இதே முறையைப் பயன் படுத்தலாம். ஆனால் x_i எனும் சார்பலனுக்குப் பதிலாக $x_2, x_3 \ldots x_n$ எனும் சார்பலன்களில் ஒன்றைக் கொள்ளவும். அது (3·1)-ன் தீர்வாக இருக்கவேண்டும். இப்போது, x_i–க்குப் பதிலாக வேறெந்த ஒரு சார்பலன் $x_2 . x_3, \ldots x_n$ எடுத்துக் கொண்டாலும் (3·12)-ல் உள்ள நியதி பொருந்தாவிட்டால் பலவகை விதிவிலக்குகள் வரும். இவற்றைக் கீழ்வருவனவற்றால் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=f_2(t\ \ x_2),$$

$$\frac{dx_3}{dt}=f_3(t\cdot x_3).$$

தொகுதி இங்கு தனித்தனி ஒன்றையொன்று சாராத சமன் பாடுகளாகி விட்டன. ஒவ்வொன்றையும் தனித்தனியாகத் தீர்வு காண வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2, x_3), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \neq 0$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(t \ x_2, x_3),$$

கடைசி இரண்டு சமன்பாடுகளும் முன்னர் கூறியதுபோல ஒரே இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடாகக் கூறமுடியும். ஆனல் முதல் சமன்பாட்டின் ராசி மற்றிரண்டிலும் காணப்படாததால் தனியாக அதன் தீர்வுகாண வேண்டும்.

குறிப்பு 2 : சமபடித்தான ஒருபடித் தொகுதி எனக் கூறப்படும்.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \ (i = 1, 2 \ldots n)$$

தொகுதியில் மேற்கூறிய முறைப்படி ஒன்றைத் தவிர மற்றச் சார்பலன்களை நீக்கினல் வரும் n வரிசைச் சமன்பாடு.

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right) \qquad \ldots (8 \cdot 8_1)$$

என்பதுவும் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். எல்லாக் குணகங்கள் a_{ij} நிலை எண்களானல், $(8 \cdot 8_1)$ என்பது நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) x_j + f_i(t) \ (i = 1, 2 \ . \ n).$$

இதற்கும் மேற்கூறியது பொருந்தும் அதாவது (8.8_1)ன் சமன்பாடு சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடாகும்.

3. தீர்வுடைத் தொகைச் சமன்பாடு காணல்
(Finding the integrable combinations)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n)\ (i = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (3 \cdot 1)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குத் 'தீர்வுடைத் தொகைச் சமன்பாடு' எனப்படுவதைக் கொண்டு காணலாம். 'தீர்வுடைத் தொகைச் சமன்பாடு' என்பது (3.1)-ன் விளைவாகும். ஆனால் எளிதில் தீர்வுகாணக்கூடியதாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$d\phi(t, x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$ எனும் சமன்பாடு அல்லது தக்க ராசிமாற்றத்தால் ஒரே காணவேண்டிய சார்பலனின் தீர்வு காணக் கூடிய சமன்பாடு ஆவது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

இரண்டையும் கூட்ட

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y = dt\ r \text{ அல்லது}$$

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = dt.$$

ஆகவே $\ln|x+y| = t + \ln c_1\ x + y = c_1 e^t$

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டாவதை உறுப்புவாரியாக ஒன்றைக் கழிக்க இரண்டாவது தீர்வுடைத் தொகைச்சமன்பாடு வருகிறது.

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y) \text{ அல்லது } \frac{d(x-y)}{(x-y)} = -dt$$

$$\ln|x-y| = -t + \ln c_2, \quad x - y = c_2 c^{-t}$$

இவ்வாறு இரு சமன்பாடுகள் வருகின்றன.

$$x + y = c_1 e^t, \quad x - y = c_2 e^{-t}$$

ஆகவே முதல் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகள் காணப்படுகின்றன.

$$x = \tfrac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}), \quad y = \tfrac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t})$$

அல்லது $x = \bar{c}_1 e^t + \bar{c}_2 e^{-t}, \quad y = \bar{c}_1 e^t - \bar{c}_2 e^{-t}$

ஒரு தீர்வுடைத்தொகுதிச் சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரு சமன்பாடு $\phi_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1$ என்பது வருகிறது.

இது காண வேண்டிய சார்பலன்களை தனி மாறியில் கூறுகிறது. இத்தகைய சமன்பாடு (3·1)-ன் தொகுதியின் முதல் தொகை எனப்படும்.

இவ்வாறு (3·1)-ன் தொகுதியின் முதல் தொகை

$$\phi(t, x_1, \ldots x_n) = c. \qquad \ldots \quad (3\cdot 13)$$

என்பது ஏதேனும் ஒரு c-ன் மதிப்புக்கு, $x_i(t)\ (i = 1, \ldots n)$ என்பதற்குப் பதிலாக (3·1)-ன் தீர்வைப் பிரதியிட முற்றொருமை யாவதாகும்.

(3·13)-ன் இடப் பக்கமாகிய $\phi(t, x_1 \ldots x_n)$ என்பதையும் 'முதல் தொகை' எனக்கூறுவர். அப்போது முதல் தொகை ஒரு நிலை எண்ணுக்கு முற்றொருமையாகச் சமம் எனக் கூற இயலாது. ஆனால் தொகுதி (1)-ன் தீர்வு வரைகளில் நிலையானது எனக் கூறலாம்.

இதன் வரை கணித விளக்கம் : $(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் கூறுகளையுடைய $(n+1)$ பரிமாண வெளியில் $\phi(t, x_1, x_2, \ldots x^n) = c$ எனும் முதல் தொகை, cயின் ஒரு நிலையான மதிப்புக்கு n பரிமாண தலம் எனக் கூறலாம். இதன் ஒரு பண்பு என்னவெனில் தலத்துடன் தீர்வு வரைக்கு ஒரு புள்ளி பொதுவானல் தீர்வுவரை முற்றிலும் தலத்தில் அமையும், c மாற இதே தன்மையுடைய வெட்டத்தலக் குடும்பம் வரும். அதாவது (3·1)-ன் ஏதேனும் ஒரு $(n-1)$ துணை அலகு கொண்ட புள்ளிகளையுடைய தீர்வு வரைகள் வரும்.

k தீர்வுடைத் தொகுதிகள் வந்தால், நாம் அடைவது k முதல் தொகை

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(t, x_1, x_2, \ \ldots \ x_n) &= c_1\\ \phi_2(t, x_1, x_2, \ \ldots \ x_n) &= c_2\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ \phi_k(t, x_1, x_2, \ \ldots \ x_n) &= c_k\end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (3\cdot 14)$$

இந்த எல்லாத் தொகைகளும் ஒன்றையொன்று சாராதிருந்தால், அதாவது

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_k)}{D(x_{j1}, x_{j2} \cdots x_{jk})} \neq 0, \text{ ஆனால்}$$

(இங்கு $x_{j1}, x_{j2} \ldots x_{jn}$ என்பவை $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பதன் k சார்பலன்களாகும்). (3·14) k சார்பலன்களுக்கேற்ற சார்பலன்களில் கூற முடியும். (3·1)-ல் பிரதியிட இன்னும் குறைவான காணவேண்டிய ராசிகளின் சமன்பாடுகளாக பிரச்சினை மாறுகிறது. $k = n$ என்றால். எல்லாத் தொகைகளும் சாராத் தொகைகளானால், (3·14)–ன் சமன்பாடுகளில் எல்லாக் காணவேண்டிய சார்பலன்களும் புலனாகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \qquad \frac{dy}{dt} = z - x, \qquad \frac{dz}{dt} = x - y.$$

இந்தச்சமன்பாடுகளை உறுப்புவாரி கூட்ட

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \frac{d}{dt}(x + y + z) = 0.$$

இதிலிருந்து நாம் அடைவது $x + y + z = c_1$.

இவ்வாறு கண்ட முதல் தொகையிலிருந்து ஒரு ராசியை ஏனைய ராசிகளில் கூற முடிகிறது. ஆகவே இரண்டு ராசிகளில் இரண்டு சமன்பாடுகளாகப் பிரச்சினையை ஒடுக்க முடிகிறது. ஆயினும் இந்த இடத்தில் இன்னும் ஒரு முதல் தொகை காண முடிகிறது. முதல் சமன்பாட்டை x ஆலும் இரண்டாவதை y ஆலும் மூன்றாவதை z ஆலும் பெருக்கிக் கூட்ட

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

அல்லது 2 ஆல் பெருக்க

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

ஆகவே, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$.

இவ்வாறு கண்ட இரண்டு முதல் தொகைகளால் இரண்டு காண ராசிகளை மற்ற ராசிகளில் கூறி, ஒன்று காண வேண்டிய ஒரு சமன்பாடாக பிரச்சினை மாறுகிறது,

எடுத்துக்காட்டு 3:

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \quad B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp$$

$C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)\,pq.$ இங்கு A, B, C என்பவை நிலை எண்கள். (விறை பொருள் இயக்க வியலில் இத்தகைய சமன் பாட்டுத்தொகுதி வருகிறது.)

முதல் சமன்பாட்டை pஆலும் இரண்டாவதை qஆலும் மூன்றுவதை r ஆலும் பெருக்க நாம் அடைவது,

$$Ap\,\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\,\frac{dr}{dt} = 0.$$

ஆகவே முதல் தொகை

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = c_1$$

முதல் சமன்பாட்டை Ap ஆலும் இரண்டாவதை Bq ஆலும் மூன்றுவதை Crஆலும் பெருக்கிக் கூட்ட

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\,\frac{dq}{dt} + C^2r\,\frac{dr}{dt} = 0.$$

தொகை காண நாம் அடையும் முதல் தொகை

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = c_2$$

$A = B = C$ எனும்பொது சமன்பாடுகளை நேரடியாகத் தீர்வு காணலாம், இதனை நீக்க நாம் கண்ட முதல் தொகை ஒன்றை யொன்று சாராதவை. ஆகவே, இந்த முதல் தொகைகளின் உதவியால் இரண்டு ராசிகளை நீக்க முடியும். மூன்றுவது சார்பலனைக் காண, ராசிகள் பிரிந்துவரும் சமன்பாடு வருகிறது.

தீர்வுடைத் தொகுதியைக் காணும்போது (3.1)ல் உள்ள சமன்பாடுகளைச் சமச்சீர் வடிவம் (symmetry) எனப்படும் வடிவத்தில் அதாவது,

$$\frac{dx_1}{\phi_1(t, x_1, \ldots x_n)} + \frac{dx_2}{\phi_2\,(t, x_1, \ldots x_n)} \cdots = \frac{dx_n}{\phi_n\,(t, x_1, \ldots x_n)}$$

$$= \frac{dt}{\phi_0(t, x_1, \ldots x_n)} \qquad \ldots \quad (3.15)$$

எனும்படி எழுதல் நலம்.

ஆகவே,

$$f_i(t_1, x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\phi_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\phi_0(t, x_1, x_2, \ldots x_n)},\ (i = 1, 2 \ \ldots n)$$

ராசிகள் சமச்சீர் வடிவச் சமன்பாடுகள் கூறப்படுவதால் சில சமயம் தீர்வு காண்பது எளிதாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xy}. \quad \ldots \quad (8\cdot16)$$

$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$ எல் பதன் தீர்வுகாண

$\frac{y}{z} = c_1$ தொகுதி, பகுதி இவற்றை முதல் சமன்பாட்டை

x-ஆலும் இரண்டாவதை y-ஆலும் மூன்றுவதை z ஆலும் பெருக்கி, விகித சமத்தேற்றத்தால் வருவது

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy}$$

இதிலிருந்து $l_n(x^2 + y^2 + z^2) = l_n\,|y| + l_n c_2$

அல்லது $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$

இவ்வாறு சாராத முதல்தொகைகள்

$$\frac{y}{z} = c_1, \qquad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$$

இவை தீர்வு வரைகளைத் தருகின்றன.

4. ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் (Systems of linear differential equations)

எல்லா ராசிகளிலும் அவற்றின் வகைக்கெழுக்களிலும் ஒருபடியாக ஒரு சமன் பாட்டுத் தொகுதி அமைந்தால் அந்தத் தொகுதி ஒருபடிச் சமன் பாட்டுத் தொகுதி எனப்படும்.

n சமன்பாடுகளைக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி சாதாரணமாகக் குறியீட்டில்,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (8\cdot17)$$

எனக் காணப்படும்.

வெக்டர் வடிவத்தில் இது,

$$\frac{dX}{dt} = AX + F. \quad \ldots \quad (8\cdot18)$$

இங்கு X என்பது n பரிமான வெக்டராகும். அதன் பிரிவுகள் $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$, F, என்பது $f_1(t), f_2(t), \ldots f_n(t)$ என n பிரிவுகள் கொண்ட n பரிமான வெக்டராகும் இவற்றை ஒரு நிரல் அணியால் குறிக்கலாம்.

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad F = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Vmatrix}.$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix}.$$

அணிப் பெருக்கல் விதிப்படி முதல் குணகத்தின் நிரையால் இரண்டாவதன் நிரலைப் பெருக்க வேண்டும். இவ்வாறு,

$$AX = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, x_j \end{Vmatrix}, (Ax+F) = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1i}\, x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j + f_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, x_j + f_n \end{Vmatrix}.$$

இரண்டு அணிகள் சமம் என்றால் அவற்றின் எல்லா உறுப்புக் களும் சமம் ஆகும். அப்போது ஒரு அணிச் சமன்பாடு,

அதாவது,

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j + f_2 \\ \cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, x_j + f_n \end{Vmatrix}$$

என்பது (3·17)-ல் உள்ள தொகுதிக்குச் சமமாகும்.

$a < t < b$ என்ற இடைவெளியில் (3·17)-ல் உள்ள சார்பலன்கள் $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ என்பன தொடர்ச்சியுடையதானல் $a < t_0 < b$ எனும் இடைவெளியில் $(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ எனும் புள்ளிக் கணிமையில் உள்ளமை தனித்தன்மை தேற்ற நியதிகள் பொருந்துகின்றன. (பக்கம் 206-207 பார்க்கவும்) ஆகவே ஒவ்வொரு இத்தகைய புள்ளி வழியாகவும் (3·17)-ன் தொகுதிச் சமன்பாட்டின் ஒரே தீர்வு வரை செய்கிறது.

ஏன், நாம் கொண்ட கணக்கில் (3·17)-ல் வலப் பக்க உறுப்புக்கள் தொடர்ச்சியுடையன; x_i-ஐச் சார்ந்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் எல்லையுடையன; ஏனெனில் $a < t < b$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய குணகங்கள் $a_{ij}(t)$க்கு அவற்றின் வகைக்கெழுக்கள் சமம்.

L எனும் ஒருபடிச் செயலியை

$L[X] = \dfrac{dx}{dt} - AX$ என வரையறுக்கிறோம். அப்போது

(3·18)-ல் உள்ள சமன்பாட்டை இன்னும் திட்டமாக,

$L[X] = F$ ... எனலாம். ... (3·19)

எல்லா $f_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ என்றால் அதாவது அணி $F \equiv 0$ என்றால் (3·17)-ன் சமன்பாடுகள் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு என்போம். அதாவது $L[X] = 0$ ... (3·20)

L எனும் செயலி இரண்டு பண்புகளையுடையது.

(1) $L[cX] = c\,L[X]$.

c என்பது நிலை எண்.

(2) $L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2]$

ஏன், $\dfrac{d[cX]}{dt} - A(cX) \equiv c\left[\dfrac{dX}{dt} - AX\right]$,

$$\frac{d(X_1 + X_2)}{dt} - A(X_1 + X_2) \equiv \left(\frac{dX_1}{dt} - AX_1\right) + \left(\frac{dX_2}{dt} - AX_2\right).$$

இந்த இருபண்புகளின் விளைவு

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} C_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[X_i]$$

இங்கு c_i-க்கள் இச்சைக்கேற்பவுள்ள நிலை எண்கள்.

தேற்றம் 3·1 :

X என்பது $L[X] = 0$ என்பதன் தீர்வானல் cX (c நிலை எண்) என்பதுவும் அதே தொகுதியின் தீர்வு ஆகும்.

நிரூபணம் :

$L[X] \equiv 0$ கொள்கை.

$L[cX] \equiv 0$ என நிறுவ

L எனும் செயலியின் முதல் பண்பைக் கொள்ள, நாம் அடைவது

$L[cX] \equiv c\,L[X] = 0.$

தேற்றம் 3·2 :

சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் X_1, X_2 இவற்றின் கூடுதல் $X_1 + X_2$-ம் அதே தொகுதியின் தீர்வு ஆகும்.

$$\left.\begin{aligned} L[X_1] \equiv 0 \\ L[X_2] \equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ கொள்கை}$$

நிறுவ : $L[X_1 + X_2] \equiv 0.$

L எனும் செயலியின் இரண்டாவது பண்பைப்பயன்படுத்த நாம் அடைவது,

$$L[X_1 + X_2] \equiv L[X_1] + L[X_2] \equiv 0.$$

(3·1), (3·2) தேற்றங்களின் கிளைத் தேற்றம்

$L[X] = 0$ எனும் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $X_1, X_2 \ldots X_n$ என்றால் அவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கை $\sum_{i=1}^{m} c_i X_i$ என்பதுவும் (இங்கு c_i நிலை எண்கள்) அதே தொகுதியின் தீர்வு ஆகும்.

தேற்றம் 3·3 : (3·20)-ல் உள்ள சமபடித்தான $a_{ij}(t)$ எனும் மெய்யெண் குணகங்களுடன் கூடிய சமன்பாட்டின் தீர்வு கலப்பெண் தீர்வு $X = U + iV$ என்றால்,

$$U = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{Vmatrix}, \quad V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{Vmatrix}$$

எனும் முறையே மெய், கற்பனைப் பகுதிகள் தனித் தனியே தீர்வுகளாகும்.

நிரூபணம் : கொள்கை $L[U + iV] = 0$.

நிறுவ : $L[U] = 0, \quad L[V] \equiv 0$.

L-ன் முதல் இரண்டாவது பண்புகளைப் பயன்படுத்த,

$$L[U + iV] \equiv L[U] + iL[V] \equiv 0.$$

ஆகவே, $L[U] \equiv 0, \quad L[V] \equiv 0$.

$$X_i = \begin{Vmatrix} x_{1i}\ (t) \\ x_{2i}\ (t) \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{ni}\ (t) \end{Vmatrix} \text{ எனப்படும் வெக்டர்கள்}$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ $a < t < b$ எனும் இடைவெளியில் ஒருபடிச் சார்ந்து இருக்க

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \alpha_n X_n = 0$ எனும்படி (3.21) $a < t < b$ என்ற இடைவெளியில் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ எனும் நிலை எண் குணகங்கள் இருக்க வேண்டும். இவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு $\alpha_i \neq 0$ ஆகவும் வேண்டும். ஆனால் (3.21) உள்ள முற்றொருமை $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0$ என்றால் மட்டுமே பொருந்தினால் அப்போது $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்பவை ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் என இருக்க வேண்டும்.

(3.21)-ல் உள்ள ஒரு வெக்டர் சமன்பாடு கீழ்வரும் n சமன்பாடுகளுக்குச் சமமாகும்.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j x_{1i}(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 x_{2i}(t) \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ni}(t) \equiv 0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3{\cdot}21_1)$$

X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்ந்தவை ஆகி, (3.21_1) சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தும் சாரபுள்ள α_i தொகுதியிருந்தால் அதாவது, எல்லா αக்களும் பூச்சியமாக இல்லாமலிருந்தால் (3.21_1)-ன் அணிகோவை

$$W = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{Vmatrix}$$

$a < t < b$ எனும் இடைவெளியில் உள்ள எல்லா t-ன் மதிப்புகளுக்கும் பூச்சியமாக வேண்டும். தொகுதியின் இந்த அணிகோவை $X_1, X_2, \ldots X_n$ எனும் வெக்டர்களின் ரான்ஸ்கியன் அணிகோவை எனப்படும்.

தேற்றம் 3·4 :

$a < t < b$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையதாக இருக்கும் $a_{ij}(t)$ எனும் குணகங்களுடன் கூடிய $X_1, X_2, \ldots X_n$ எனும் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் ரான்ஸ்கியன் அணிகோவை, W பூச்சியமானல் $a < t < b$ என்ற இடைவெளியில் $t = t_0$ ஒரு புள்ளியிலேனும், $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ எனும் தீர்வுகள் ஒருபடிச் சார்ந்தவையாகும். ஆகவே அந்த இடைவெளியில் $W \equiv 0$.

நிரூபணம் :

$a_{ij}(t), (i)j = (1, 2, \ldots n)$ என்பவை தொடர்ச்சியுடைய தானால், (8·20)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் 'உள்ளமை தனித் தன்மை, தேற்றத்தின், நியதிக்குட்பட்டதாகும். ஆகவே துவக்க மதிப்பு $X(t_0) \equiv 0$ [அல்லது இன்னும் விரிவாக, $X_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0 \ldots x_n(t_0) = 0$], என்பது தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வை நிச்சயிக்கிறது. ஆகவே எளிதில் புலனாகும் சாரமற்ற தீர்வு $X(t) \equiv 0$ [அல்லது விரிவாக, $x(t) \equiv 0$, $X_2(t) \equiv 0 \ldots x_n(t) = 0$] என்பதே (8·20)-ன் தீர்வாகும். அணிகோவை $W(t_0) = 0$. ஆகவே

$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \ldots c Xn(t_0) \equiv 0$ எனும்படி சாரமுள்ள தொகுதி $c_1, c_2, \ldots c_n$ உள்ளது. ஏனெனில் ஒரு வெக்டர் சமன்பாடு, (c_i-ஐச் சார்ந்து) பூச்சியமாகும் அணி கோவையை கீழ்வரும் n சமன்பாடுகளுக்குச் சமமாகும்.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_j x_{2i}(t_0) = 0,$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{n} c_t x_{ni}(t_0) = 0.$$

(8·20)-ன் தீர்வு $X(i) = \sum_{i=1}^{n} c_1 X_i(t)$ என்பது சாரமுள்ள $c_1, c_2, \ldots c_n$ எனும் தொகுதிக்கு ஒத்தது. இது $X(t_0) = 0$ எனும் துவக்க நியதிக்குட்பட்டது. ஆகவே, (8·20)-ன் சாரமற்ற தீர்வு $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t) = 0$ என்பதுடன் பொருந்துகிறது. அதாவது, Xi என்பவை ஒருபடிச் சார்புடையவை.

குறிப்பு : இந்தத் தேற்றம், தொடர்ச்சியுடைய குணகங்களை யுடைய (8·20)-ன் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகள்

அல்லாத ஏதேனும் வெக்டர் தொகுதி $X_1, X_2, \ldots X_n$-க்குப் பொருந்தாது என்பதை எளிதான எடுத்துக்காட்டுக்களே நிரூபிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

$$X_1 = \begin{Vmatrix} t \\ t \end{Vmatrix}, \quad X_2 = \begin{Vmatrix} t^2 \\ t^2 \end{Vmatrix}$$

என்பவை ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள்.

ஏனெனில், $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \equiv 0.$

அல்லது, $\begin{cases} \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \equiv 0. \\ \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \equiv 0. \end{cases}$

$\therefore \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (பக்கம் 113 உதாரணம் 1 பார்க்கவும்.)

அத்துடன் ரான்ஸ்கியன் $\begin{Vmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{Vmatrix}$ என்பது முற்றொருமை பாகம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, X_1, X_2 என்பவை a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ எனும் தொடர்ச்சியுடைய ஒரே (3·20)-ல் உள்ள சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குத் தீர்வாக முடியாது.

தேற்றம் 3.5. $a < t < b$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய $a_{ij}(t)$ என்ற குணகங்களைக் கொண்ட (3.20)-ன் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் n ஒருபடிச்சாராத தீர்வுகள் $X_1, X_2 \ldots X_n$, இவற்றின் $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ எனும் ஒருபடிச் சேர்க்கை (3.20)-ன் அதே இடைவெளியில் பொதுத்தீர்வு ஆகும்.

$a < t < b$ என்ற இடைவெளியில் $a_{ij}(t)$ எனும் குணகங்கள் தொடர்ச்சியுடையனவானால் சமன்பாட்டுத் தொகுதி உள்ளமை தனித்தன்மை தேற்றத்தின் நியதிக்குட்பட்டதாகும். ஆகவே தேற்றத்தை நிருபிக்க $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ என்ற தீர்வில் குணகங்கள் c_i-க் களைத் தக்கவாறுகொள்ள கீழ்வரும் துவக்கநியதி பொருந்துவதாகும் எனக் காட்டினால் போதுமானது.

அதாவது $a < t < b$ என்ற இடைவெளியில்

$$X_0 = \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdots \\ x_{40} \end{matrix} \right\|;$$

அதாவது $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t_0) = X_0$ எனும் வெக்டர் சமன்பாடு

அல்லது விரிவாக இதற்குச் சமமான

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) = X_{10},$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_{2i}(t_0) = x_{20},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0) = x_{40},$$

இந்தத் தொகுதியிலிருந்து x_{i_0} எனும் எந்த மதிப்புக்கும் c_i-க்களின் மதிப்பு காணமுடியும். ஏனெனில் இத்தொகுதியின் அணிக் கோவை ரான்ஸ்கியன் அணிகோவையாகும். (X_1, X_2, ... X_n எனும் ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகளுக்கு) ஆகவே $a < t < b$ எனும் இடைவெளியில் பூச்சியமாகாது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \right\} \qquad \cdots \qquad (8\cdot22)$$

$x_1 = \cos t, \qquad y_1 = -\sin t$

$x_2 = \sin t$ $y_2 = \cos t$ என்பவை தீர்வுகள் என எளிதில் காணலாம். இந்தத் தீர்வுகள் ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகள். ஏனெனில் ரான்ஸ்கியன் அணிகோவை,

$$\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1.$$

பூச்சியமல்ல. ஆகவே பொதுத்தீர்வின் வடிவம்

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$
$$y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

(இங்கு c_1, c_2 என்பவை ஏதேனும் நிலை எண்கள்.)

தேற்றம் 3·6 :

$$L[X] = F. \quad \ldots \quad (3\cdot19)$$

எனும் சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $\bar{X}$ ஆகவும், இதற்கேற்ற சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு $L[X] = 0$-ன் தீர்வு X_1 ஆகவும் ஆனால் $X_1 + \bar{X}$ என்பது சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடு $L[X] = F$-ன் தீர்வு ஆகும்.

நிருபணம் :

$L[X] = F$; $L[X_1] = 0$; ஆனதால்,

$L[X_1 + \bar{X}] = F$ என நிருபிக்க.

L_1-ன் செயலியின் 2-வதின் தன்மையை பயன்படுத்த,

$L[X_1 + \bar{X}] = L[X_1] + L[\bar{X}] = F$ என ஆகும்.

தேற்றம் 3·7 :

$a \leqslant t < b$ என்ற இடைவெளியின் தொடர்ச்சியுடைய $a_{ij}(t)$ எனும் குணகங்களையுடைய சமபடித்தானதல்லாததும், $f_i(t)$ எனும் வலப்பக்கங்களைக் கொண்டதுவுமான (3·19)-ன் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் பொதுத்தீர்வு, இந்த சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கேற்ற சமபடித்தான சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகளும் சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் சிறப்புத் தீர்வுகளும் சேர்ந்ததாகும்.

நிருபணம் :

'தனித்தன்மை உள்ளமை'த்தேற்றத்தின் நியதிகள் பொருந்துவதால் (பக்கம் 222 பார்க்கவும்). தேற்றத்தை நிறுவ தக்க நிலை எண் குணகங்கள் c_i-களைக் கொள்ள தீர்வு $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i + \bar{X}$ இச்சை கேற்பக் கொள்ளும் நியதி

$$X(t_0) = X^0 = \begin{Vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{n0} \end{Vmatrix}$$

பொருந்தும் என நிறுவினால் போதும். அதாவது, அணிச் சமன்பாடு

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t_0) + \bar{X}(t_0) = X_0$$

அல்லது இதற்குச் சமமான சமன்பாடு

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_{1i}(t_0) + \bar{x}_1(t^0) &= x_{10} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_{2i}(t_0) + \bar{x}_2(t_0) &= x_{20}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_{ni}(t_0) + \bar{x}_n(t_0) &= x_{n0}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3\cdot23)$$

வலப்பக்கம் என்னவாயினும் $c_1, c_2, \ldots c_n$ எனும் தீர்வு உள்ளதெனி நிறுவ வேண்டும். ஆனால் இந்த வடிவத்தில் நமது கூற்று எளிதில் புலனாகிறது. ஏனெனில் (3·23)-ன் அணிக்கோவை $X_1, X_2, \ldots X_n$ எனும் ஒத்த சமபடித்தான சமன்பாட்டின் ஒருபடிச் சாரா தீர்வு களுக்கு $t = t_0$, எனும் புள்ளியில் ரான்ஸ்கியன் ஆகும். இது தேற்றம் 3.4ஆல் பூச்சியமல்ல. ஆகவே, (3·23)-ன் தீர்வு எந்த வலப்பக்கத்துக்கும் $c_1, c_2, \ldots c_n$ ஆகும்.

தேற்றம் 3·8:

(ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தும் கொள்கை.)

$$L[X] = \sum_{i=1}^{m} F_i\,; \quad F_i = \left\| \begin{matrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ f_{ni}(t) \end{matrix} \right\|$$

எனும் ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு,

$$L[X_i] = F_i \; (i = 1, 2, \ldots n)$$

எனும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் X_i என்பவற்றின் கூடுதல்

$\sum_{i=1}^{m} X_i$ ஆகும்.

நிருபணம் :

கொள்கை $L[X_i] \equiv F_i \ (i = 1, 2, \ldots n)$.

$$\text{நிறுவ, } L\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} F_i$$

எனும் செயலின் இரண்டாவது பண்பைப் பயன்படுத்த நாம் அடைவது.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} L[X_i] \equiv \sum_{i=1}^{m} F_i .$$

குறிப்பு :

$\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ எனும் தொடர் ஒருங்கு தொடராகவும் உறுப்புவாரி வகையீடு செயற்குரியதுமானல் 3·8 தேற்றம் $m \to \infty$ ஆகும் போதும் பொருந்தும்.

தேற்றம் 3·9 :

$L[X] = U + iV$ எனும் ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியில்

$$U = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix}, \quad V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Vmatrix},$$

$\alpha_{ij}(t), u_i(t) \ (i, j = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை மெய்ச் சார்பலன்கள் இந்தத் தொகுதியின் தீர்வு,

$$X = \overline{U} + i\overline{V}, \quad \overline{U} = \begin{Vmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{u_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{u_n} \end{Vmatrix} \quad \overline{V} = \begin{Vmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{v}_n \end{Vmatrix}.$$

என்ருல் $\overline{U}$ எனும் மெய்ப் பகுதியும் $\overline{V}$ எனும் கற்பனைப் பகுதியும் $L[x] = U$, $L[x] = V$ எனும் சமன்பாடுகளுக்கு முறையே தீர்வு ஆகும்.

நிருபணம் :

$L[\overline{V} + i\overline{V}] \equiv U + iV$ கொள்கை

நிறுவ : $L[\overline{V}] \equiv U \; L[\overline{V}] \equiv V$

L எனும் செயலியின் இரண்டு தன்மைகளைப் பயன்படுத்த

$L[\overline{U} + i\overline{V}] \equiv L[\overline{V}] = i L[\overline{V}] \equiv U + i\overline{V}.$

ஆகவே, $L[\overline{U}] \equiv U \; L[\overline{V}] \equiv V.$

ஒத்த சமபடித்தான ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு காணப்பட்டால் $L(X) = F$ எனும் சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வைத் தேர்ந்தெடுக்க முடியாது. ஆகவே (ச·7) தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது.

அப்போது துணையலகு மாறும் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\frac{dx}{dt} - AX = 0.$$

எனும் சமப்படித்தான சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \text{ ஆகுக.}$$

c_i என்பவை ஏதேனும் நிலை எண்கள். ஆகவே அதே சமபடித்தான சமன்பாட்டுக்குத் தொகுதிக்கு $X_i \; (i = 1, 2, \dots n)$ என்பவை ஒருபடிச் சாராச் சிறப்புத் தீர்வுகளாகும்.

$$\frac{dx}{dt} - AX = F.$$

எனும் சமபடித்தானதல்லாத தொகுதியின் தீர்வை

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) X_i.$$

எனும் வடிவில் காணவேண்டும். $c_i(t)$ என்பவை அறியப் படாத புதிய சார்பலன்கள். சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) X_i + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \frac{dx_i}{dt} = A \sum_{i=1}^{n} c_i(t) X_i + F,$$

அல்லது, $\frac{dX_i}{dt} \equiv AX_i$ ஆனதால்

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(t) X_i = F.$$

இந்த வெக்டர் சமன்பாட்டுக்குச் சமமான n சமன்பாடுகள்.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x_{1i} = f_1(t), \\ &\sum_{i=1}^{n} c'_i(t) x_{2i} = f_2(t), \\ &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\sum_{i=1}^{n} c'_i(t) x_{ni} = f_n(t), \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8{\cdot}24)$$

எல்லா $c_i'(t)$-க்களும் n அறியப்படாத $c'_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ராசிகளையுடைய n சமன்பாடுகளிலிருந்து காண முடியும். இந்தத் தொகுதியின் அணிகோவை W, $X_1, X_2, \ldots X_n$ எனும் ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகளின் ரான்ஸ்கியனுடன் பொருந்துகிறது. ஆகவே பூச்சியமல்ல.

$$c'_i(t) = \phi_i(t_i) \; (i = 1, 2, \ldots n)$$

இதன் தொகைக்கான அறியப்படாத சார்பலன்கள் $c_i(t)$-க்களைக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{dx}{dt} = y. \; \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}.$$

இதற்கொத்த சமபடித்தான சமன்பாடு

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

இதன் பொதுத்தீர்வு

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

(பக்கம் 193, எடுத்துக்காட்டு 2ஐப் பார்க்கவும்)

நிலை எண்களை மாறச் செய்ய

$$x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t.$$

$$y = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t.$$

$c'_1(t), c'_2(t)$ என்பன (3·24)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து காணலாம். அவை இங்கு

$$c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t = 0$$

$$-c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}.$$

ஆகவே $c_1(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}$ $c'_2(t) = 1.$

ஆகையால்

$$c_1(t) = \ln|\cos t| + \bar{c}_1$$

$$c_2(t) = t + \bar{c}_2$$

முடிவில் நாம் அடைவது

$$x = \bar{c}_1 \cos t + \bar{c}_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t.$$

$$y = -\bar{c}_1 \sin t + \bar{c}_2 \cos t - \sin t \ln|\cos t| + t \cos t.$$

5. நிலைஎண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி

(differential equations with constant coefficients)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \; (i = 1, 2, \ldots n)$$

எனும் ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி நிலைஎண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி எனப்படும். வெக்டர் வடிவில் இது,

$$\frac{dX}{dt} = AX + F.$$

இங்கு a_{ij} எனும் எல்லாக் குணகங்களும் நிலை எண்கள். அதாவது A எனும் அணி நிலையானது.

சமபடித்தான அல்லது சமபடித்தானதல்லாத நிலைஎண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி அநேகமாக வரிசை அதிகமாகவுள்ள ஒரே ஒரு சமன்பாடாக

மாற்றித் தீர்வு காணப்படும். 212-ம் பக்கத்தில் கண்டதுபோல் கூடிய வரிசையுள்ள சமன்பாடு நிலைஎண் குணகங்களுடன் உள்ள ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருக்கும்.

இருந்தாலும் நேரடியாக நிலைஎண் குணகங்களுடன் கூடிய சமபடித்தான சமன்பாட்டிற்கு அடிப்படைத் தீர்வுத் தொகுதி காணமுடியும்.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \quad a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \quad a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots \quad a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (3\cdot25)$$

(இங்கு எல்லா a_{ij}-க்களும் நிலை எண்கள்)

இந்தத் தொகுதியின் தீர்வை

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt},\ x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \dots \quad x_n = \alpha_n e^{kt}$$

(α_j ($j = 1, 2, \dots n$) என்பவை நிலை எண்கள்) என்ற வடிவில் காண முயல்வோம். (3·26)-ல் பிரதியிட்டு e^{kt}ஐ இருபக்கமும் நீக்கி, உறுப்புக்களை ஒரே பக்கத்திற்கு மாற்றி நாம் அடைவது

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 \dots + (a_{nn}-k)\alpha_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (3\cdot26)$$

n ராசிகளில் உள்ள இந்த n சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து α_j என்பதற்குச் சாரமுள்ள தீர்வு இருக்க வேண்டுமானால் (3 25)-ன் அணிகோவை பூச்சியமாவது தேவையும் போதுமானதுமான நியதியாகும்.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-k) & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-k) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (3\cdot27)$$

இந்த n படிச்சமன்பாட்டிலிருந்து (3.26)-ன் சமன்பாடுகள் α_j $(j = 1, 2, \ldots n)$-னும் சாரமுள்ள தீர்வுகள் இருக்கும்படியாக k-ன் மதிப்புக்களைக் காண்கிறோம். (3-27)-ன் சமன்பாடு பண்புகாட்டும் சமன்பாடு (Characteristic equation) எனப்படும். பண்புகாட்டும் சமன்பாட்டின் k-ன் எல்லா மூலங்களும் வெவ்வேறாக இருந்தால் அவற்றை (3·26)-ல் அடுத்தடுத்துப் பிரதியிட, $\alpha_j^{(i)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots n)$-ன் சாரமுள்ள மதிப்புக்களைக் காண்கிறோம். இதன் விளைவாக (3·25)-ன் சமன்பாடுகளின் n தீர்வுகளை,

$$x_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{k_i t}, \quad x_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{k_i t} \quad \ldots \quad x_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{k_i t}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n). \qquad \ldots (3 \cdot 28)$$

இங்கு மேல் குறியிட்ட எண்கள் தீர்வின் எண்ணிக்கையையும், கீழ்க் குறியீடு காணவேண்டிய ராசியின் எண்ணிக்கையையும், குறிக்கின்றன.

வெக்டர் குறியீட்டில் இதே முடிவை இன்னும் கச்சிதமாக,

$$\frac{dX}{dt} = AX. \qquad \ldots (3 \cdot 25_1)$$

எனக் கூறலாம்.

தீர்வைக் கீழ்க்காணும் வடிவில் காணலாம்.

$$X = \bar{A} e^{kt}. \quad \text{இங்கு } \bar{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Vmatrix}$$

அல்லது $(A - kE)\, \bar{A} = 0.$ $\qquad \ldots (3 \cdot 29)$

E என்பது அலகு அணியாகும். $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$

ஆகவே, (3·29)-ன் சமன்பாடுகளின் தீர்வு சாரமுள்ள

$$\text{அணி } \bar{A}.\ \bar{A} \neq \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}$$

ஆக இருக்க, $(A-kE)$ எனும் அணி இயல்மாறியாக (singular அதாவது அணிகோவை $|A-kE|=0$ ஆக வேண்டும். இந்தப் பண்பு காட்டும் சமன்பாடு $|A-kE|=0$-ன் ஒவ்வொரு மூலமும் k_i-க்கும் (3·29)-லிருந்து பூச்சியமல்லாத $\bar{A}^{(i)}$ அணியைக் காண்கிறோம். ஒவ்வொரு மூலம் k_i-ம் வெவ்வேறானால் n தீர்வுகள் $X_1 = \bar{A}^{(i)} e^{(k_1 t)}$ $X_2 = \bar{A}\, e^{k_2 t}$ ... $X_n = \bar{A}^{(n)} e^{k_n t}$

$$\text{இங்கு } \bar{A}^{i} = \begin{Vmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n^{(i)} \end{Vmatrix}$$

இந்தத் தீர்வுகள்யாவும் ஒருபடிச் சாராத தீர்வுகள் என எளிதில் காணலாம்.

ஒருபடிச் சார்பு இருந்தால்,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \bar{A}^{(i)} e^{k_i t} = 0. \text{ அல்லது}$$

இன்னும் விரித்துரைக்க,

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_1^{(i)} e^{k_i(t)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_2^{(i)} e^{k_i(t)} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_n^{(i)} e^{k_i(t)} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3\cdot30)$$

$e^{k_i t}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ எனும் சார்பலன் ஒருபடிச் சாராதவை ஆனதால் (பக்கம் 112பார்க்கவும்.) (3.30) லிருந்து வருவது

$$\left.\begin{aligned} \beta_i \alpha_1^{(i)} &= 0, \\ \beta_i \alpha_2^{(i)} &= 0, \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \\ \beta_i \alpha_n^{(i)} &= 0. \end{aligned}\right\} (i = 1, 2 \dots n) \quad \dots \quad (3.31)$$

ஆனால் ஒவ்வொரு i-க்கும் ஏதேனும் ஒரு $\alpha_1^{(i)}$ $\alpha_2^{(i)}$ .. $\alpha_n^{(i)}$ யாவது $(i = 1, 2, \dots n)$ பூச்சியமல்லாது இருக்கும் என்பதால் (3.31)லிருந்து $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ என்பது வருகிறது.

ஆகவே தீர்வுகள் $\bar{A}^{(i)} e^{k_i t}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ ஒருபடிச் சாராத் தீர்வுகள் ஆகும். (3.25)ல் உள்ள தொகுதியின் பொதுத் தீர்வின் வடிவம்

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{A}^{(i)} e^{k_i t},$$

அல்லது $$x_j = \sum_{i=1}^{\alpha} c_i \alpha_j^{(i)} e^{k_i t} \; (j = 1, 2, \dots n).$$

இங்கு c_i என்பவை நிலை எண்கள் $k = k_i$ என்பதற்கு $\alpha_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \dots n)$ எனும் மதிப்புக்கள் திட்டவட்டம் எனும்படிக் கூறமுடியாதபடி நிச்சயிக்கப்படுகின்றன. ஏனெனில் தொகுதியின் அணிகோவை பூச்சியமாகும். ஆகவே ஒரு சமன்பாடாவது ஏனைய சமன்பாடுகளின் விளைவு ஆகும், சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வை ஒரு நிலைக்காரணியால் பெருக்க வருவதும் தீர்வாகையால் $\alpha_j^{(i)}$-ன் மதிப்பு திட்டவட்டமாகக் கூற இயலாதாகிறது. தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் $k_j = p = qi$ எனும் சிக்கல் எண் மூலத்திற்கேற்ப,

$$X_j = \bar{A}^{(j)} e^{k_j t}. \qquad \dots \quad (3.32)$$

எனும் தீர்வு உள்ளது. a_{ij} எனும் குணகங்கள் யாவும் மெய் யெண்ணானால் தீர்வை இரண்டு மெய்த் தீர்வுகளால் கூறமுடியும். அவை (3.32)-ல் உள்ள தீர்வின் முறையே மெய்ப்பகுதியும் கற்பனைப் பகுதியுமாகும். (பக்கம் 206 பார்க்கவும்). $k_{j+1} = p - qi$ எனும் இணைச்சிக்கல் எண்மூலம் இதனுடன் சாராத வேறு மெய்த் தீர்வைத் தராது.

தன்மை காட்டும் சமன்பாடு k_s எனும் r முறை பொருந்தும் மூலத்தையுடையதானல், (3 25)-ன் தீர்வு

$$X(t) = (\bar{A}_0^{(s)} + A_1^{(s)} t + \dots A^{(s)}_{v-1} t^{v-1})\, a^{k_s t} \quad \dots (3.33)$$

எனும் வடிவம் ஆகும் எனக் கூற முடியும். ஏனெனில் (3.25)-ன் சமன்பாட்டுத் தொகுதி (212) எனும் பக்கங்களில் சொன்னபடி) n அல்லது அதற்குக் குறைவான வரிசையுள்ள ஒரே ஒரு சமபடித்தானஒருபடிச் சமன்பாடாக மாற்ற முடியும்.

$$(3.33)\text{-ல் } \bar{A}i^{(s)} = \left\| \begin{matrix} \alpha_1 i^{(s)} \\ \alpha_2 i^{(s)} \\ \alpha_n i^{(s)} \end{matrix} \right\|$$

இங்கு $\alpha_{ji}^{(s)}$ நிலை எண்களாகும்.

(3·25)-ல் உள்ள n சமன்பாட்டுத் தொகுதியானது n வரிசைக்குக் குறைந்த சமன்பாடாக மாற்றப்பட்டாலும் (பக்கம் 213,214-ல் குறிப்புப் பார்க்கவும்.) தன்மைகாட்டும் சமன்பாடு (3·27)-ன் சமன் பாட்டில் மூலங்களுடன் பொருந்தும் மூலங்களை உடையது. [ஏனெனில், இவ்வாறு மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், (3·27)-ன் மூலங்கள் ks ஆனல் e_{kst} எனும் வடிவில் இருக்க வேண்டும்].

ஆனல், மாற்றப்பட்ட சமன்பாட்டின் வரிசைக்குக் குறை வானல், மூலங்களின் பொருந்தும் எண்ணிக்கை, (3·27)-ன் மூலங்கள் பொருந்தும் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாக இருக் கலாம். ஆகவே (3·33)-ன் தீர்வில் முதல் காரணியின் அடுக்கு $(v-1)$ விடக்குறையலாம். அதாவது (3·33)-ல் வடிவில் தீர்வைக் காண முற்பட்டால் மிக உயர்ந்த அடுக்குடைய உறுப்பு உள்பட சில உறுப்புக்களின் குணகங்கள் $A_i^{(s)}$ பூச்சியமாகலாம்.

ஆகவே தன்மைகாட்டும் சமன்பாட்டின் பொருந்து மூலங் களுக்கேற்ப (3·25)-ன் சமன்பாட்டின் தீர்வை (3·3) வடிவில் காண வேண்டும். (3·3)ஐ (3·251)-ல் பிரதியிட முற்றொருமை யாகும் வண்ணம் $A^{i(s)}$-ன் விளக்கம் காண வேண்டும். $A_{r-1}^{(s)}$ உட்பட சில குணகங்கள், பூச்சியமாகலாம்.

குறிப்பு : (3·27)-ன் தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் பொருந்து மூலங்களுக்கேற்ற (3·25)-ன் தீர்வுகளின் வடிவை இன்னும் திட்டமாகக் கூறும் வகை ஒன்று உள்ளது. இயல்புடை

ஒருபடி மாற்றத்தினல் (non-singular linear transformation) (8·25)-ன் சமன்பாட்டை $\| A-kE \|$ எனும் அணி ஜோர்டானின் திட்ட வடிவமும் இருக்குமாறு மாற்றி, தொகை காணக் கூடிய சமன்பாடுகளின் தொகை கண்டு தீர்வு காணவும். அப்போது v முறை பொருந்தும் k_s எனும் மூலத்திற்கேற்ற தீர்வின் வடிவம்,

$$X_s(t) = (\bar{A}_0^{(s)} + \bar{A}_1^{(s)} t + \ldots + \bar{A}^s{}_{\beta-1} t^{\beta-1}) e^{k_s t} .$$

இங்கு β என்பது k_s எனும் மூலத்திற்கேற்ற $\| A-kE \|$ எனும் அணியின் சாதாரண காரணியின் மிக உயர்ந்த அடுக்காகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y,$$

தன்மை காட்டும் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \text{ (அல்லது) } k^2 - 4k - 5 = 0.$$

இதன் மூலகங்கள் $k_1 = 5, k_2 = -1$ ஆகவே, தீர்வின் வடிவம்

$$x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{5t} \quad y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{5t}$$

$$x_2 = \alpha_1^{(2)} e^{-t} \quad y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{-t} \qquad \ldots \quad (8\cdot34)$$

(8·34)-ஐ முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட நாம் அடைவது,

$$-4\alpha^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0.$$

ஆகவே, $\alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$ ஏதேனும் ஒரு எண்

ஆகவே, $x_1 = c_1 e^{5t} \quad y_1 = 2c_1 e^{5t} \quad c_1 = \alpha_1^{(1)}$

$\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$ எனும் குணகங்களைக் காண,

$2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0$ எனும் சமன்பாடு வருகிறது.

ஆகவே, $\alpha_1^{(2)} = -\alpha_1^{(2)}$ குணகம் $\alpha_1^{(2)}$ ஏதேனும் ஒரு எண்.

ஆகவே, $x_2 = c_2 e^{-t} \quad y_2 = -c_2 e^{-t} \quad c_2 = \alpha_1^{(2)}$

பொதுத் தீர்வு $x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$

$$y = 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dx}{dt} = x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y$$

இதன் தன்மை காட்டும் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2- & 1-k \end{vmatrix} = 0 \text{ அல்லது } k^2 + 9 = 0.$$

இதன் மூலங்கள் $k_{1,2} = \pm 3i$ $x_1 = \alpha_1 e^{3it}$ $y_1 = \alpha_2 e^{3it}$ $(1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0$; $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1-3i$ எனும் மதிப்புக்கள் இதற்குப் பொருந்தும்.

ஆகையால், $x_1 = 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i\sin 3t)$

$$y_1 = (1-3i)e^{3it} = (1-3i)\cos 3t + i\sin 3.$$

இவற்றின் மெய்ப்பகுதி, கற்பனைப்பகுதிகளும் தீர்வுகளாகும். அவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கை ஏதேனும் குணகங்களுடன் சேர்ந்து பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

$$x = 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t$$

$$y = 5c_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + c_2(\sin 3t - 3\cos 3t),$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3\cdot35)$$

இதன் தன்மை காட்டும் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \text{ அல்லது } k^2 - 4k + 4 = 0$$

இதன் பொருந்து மூலங்கள் $k_{1,2} = 2$.

ஆகவே, காணவேண்டிய தீர்வின் வடிவம்,

$$x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t},$$

$$y = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t} \quad \ldots \quad (3.36)$$

இதனை (3.35)-ல் பிரதியிட நாம் அடைவது

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t.$$

$$\therefore \quad \beta_2 = -\beta_1$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1.$$

α_1, β_1 ஏதேனும் எண்கள் இந்த நிலை எண்களை c_1, c_2 எனக் குறிக்க பொதுத் தீர்வின் வடிவம்

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{2t},$$
$$y = -(c_1 + c_2 + c_2 t)\, e^{2t}.$$

6. n வரிசை சமன்பாடுகட்கும், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கும் தோராய தீர்வுகாணும்முறை

(Approximate methods of integrating systems of Differential Equations and equations of order)

(பிரிவு முதல் அத்தியாயத்தில் கண்ட) முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தோராயத் தீர்வுகாணும் முறைகள் யாவும், முக்கிய மாற்றம் ஏதேனும் இன்றி முதல் வரிசைச் சமன் பாட்டுத் தொகுதிக்கும், சாதாரண முறைப்படி முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு மாற்றப்படும் (பக்கம் 91-ஐப் பார்க்கவும்) இரண்டாவது அல்லது மேல் வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தும்.

1. அடுத்தடுத்து தோராய மதிப்புக் காண் முறை :

56-ம் பக்கத்தில் கூறியபடி அடுத்தடுத்துத் தோராய மதிப்பு காண் முறையை,

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2 \ldots y_n)\ (i = 1, 2, \ldots n). \qquad \ldots (8{\cdot}37)$$

எனும் $y_i(x_0) = y_{i_0}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ துவக்க மதிப்புக்களுடன் கூடிய சமன்பாட்டுத்தொகைக்குப் பயன்படுத்த f_i எனும் சார் பலன்கள் எல்லா ராசிகளிலும் தொடர்ச்சியுடையனவாகவும், இரண்டாவதிலிருந்து எல்லா ராசிகளிலும் லீப்சிச் நியதிகட்குட் பட்டதாகவும் இருக்கவேண்டும். துவக்க நியதிகள் பொருந்தும் வரை $y_{i_0}(x)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ எனும் பூச்சிய அண்மைத் தோராயம் இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளலாம். மேற்கொண்டுள்ள தோராயம் காண,

$$y_{i,\,k+1}(x) = y_{i_0} + \int_{x_1}^{x} f_i(x, y_{1k}, y_{2k}, \ldots y_{nk}),\ dx\ (i = 1, 2 \ldots n),$$

எனும் சூத்திரம் பயன்படும்.

முதல் வரிசை சமன்பாட்டிற்குச் சொன்னது போல நடை முறைக்கணக்கீடுகளில் இங்கும் இந்த முறை மிகக்குறைவாகவே

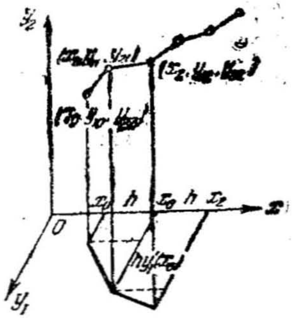
பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஏனெனில் கணக்கீடு முறை சிக்கலானது என்பது மட்டுமல்ல, தூய மதிப்புக்கு வெகு மெள்ளவே ஒருங்கு கிறது.

2. ஆயிலரின் முறை : (Euler's method).

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் $y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களால் திட்டப் படுத்தப்பட்ட தீர்வு வரைக்குப் பதிலாக அதன் துண்டுகளின் ஒரு நுனியில் உள்ள தொடு கோடுகளாலான பல கோணம் பயன் படுத்தப்படுகிறது. (படம் 3-2-ல் அத்தகைய ஆயிலர் பலகோணம் xy, தளத்தில் அதன் வீழலும் காட்டப் பட்டுள்ளது.]



படம் 3-2.

$x_0 < x < b$ எனும் தீர்வு காண் இடைவெளி h நீளமுள்ள துண்டுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. கணக்கீடு செய்வதற்குள்ள சூத்திரம்,

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + hy'_i(x_k) \; (i = 1, 2, \ldots n)$$

ஆயிலரின் பலகோணம் $h = 0$ ஆகும்போது தீர்வுவரைக்கு ஒருங்குகிறது என்பதன் நிரூபணம் முதல்வரிசைச் சமன்பாட்டில் கூறியதுபோலவேயாகும். தூய மதிப்புக்கு அணிமையில் மதிப்புக்கான ஸ்புடீகரணம். (திரும்பத்திரும்பச் செய்தல்) பயன்படுத்தலாம்.

3. டெயிலர் சூத்திரம்படி விரிவு காணல் முறை : (3·37)-ன் கொள் வலப்பக்கம் k முறை வகையீடு செய்தற்குரியதெனக்கொள்வோம். (அப்போது தீர்வுகள் $\overline{k+1}$ முறை வகையீடு செய்யக் கூடியவை என உறுதியாகும்.) காணவேண்டிய தீர்வுகளை அவற்றின் டெயிலர் விரிவுகளின் முதல் சில உறுப்புக்களால் மட்டும் கூறுவோம்.

$$y_i(x) \approx y_i(x_0) + y'_i(x_0)(x-x_0) + y''_i(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots$$

$$+ y_i^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} \; (i = 1, 2, \ldots n),$$

டெயிலர் சூத்திரத்தின் மீதியை விடுவதால் உள்ள பிழையைக் கீழ்க்காணுமாறு மதிப்பிடமுடியும்.

$$k_{ik} = y_i^{(k+1)} [x_0 + \theta (x - x_0)] \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} ,0<\theta<1$$

இந்தமுறை x_0-க்கு அணிமையில் மட்டும் நல்ல தீர்வைத் தரும்.

4 ஸ்டார்மர் முறை : $x_0 < x < b$ எனும் இடைவெளி h நீளமுள்ள சிறு உள் இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. கீழ் வரும் சூத்திரங்களில் ஒன்றைக் கொண்டு (3·37)-ன் தீர்வு காணப்படுகிறது.

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,k-1}. \quad \ldots \quad (3\cdot 38)$$

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,k-2}, \quad \ldots \quad (3\cdot 39)$$

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i,k-3} \quad \ldots \quad (3\cdot 40)$$

இங்கு $(i = 1, 2, \ldots n)$ என $y_i = y_i(x_k)$

$$x_k = x_0 + kh, \quad q_{ik} = y'_i (x_k)h$$

$$\Delta q_{ik-1} = q_{ik} - q_{ik-1} \quad \Delta^2 q_{i,k-2} = \Delta q_{i,k-1} - \Delta q_{i,k-2}$$

$$\Delta^3 q_{ik-3} = \Delta^2 q_{ik-2} - \Delta^2 q_{0k-3}$$

சூத்திரங்கள் (3·38), (3·39), (3·40) என்பன முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு எவ்வாறு அடைந்தோமோ, (பக்கம் 56 பார்க்கவும்) அதுபோன்று அடையலாம். இந்தச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தும்போது பிழையின் தரம் ஒரு சமன்பாட்டுக்கு உள்ளதுபோலவே இருக்கும்.

ஸ்டார்மர் சூத்திரம் வழி கணக்கீடு செய்யப்புக, $y_i(x_k)$-ன் முதல் சில மதிப்புக்கள் காணவேண்டும். இவற்றை டெயிலர் விரிவு முறை அல்லது ஆயிலர் குறுகிய இடைவெளி முறையில் காணலாம். ஒரு சமன்பாட்டிற்குச் சொன்னதுபோலவே தோராய மதிப்பு உயர ஸ்புடி காண முறை அல்லது ரன்ஜு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

5. ரன்ஜு முறை : (Runge's Method)

கீழ்வரும் எண்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன.

$$m_{i1} = f_i(x_k, y_{1k}\, y_{2k}, \ldots y_{nk}),$$

$$m_{i2} = f_i\left((x_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{hm_{11}}{2}, y_{2k} + \frac{hm_{21}}{2}, \ldots y_{nk} + \frac{hm_{n1}}{2}\right)$$

$$m_{i3} = f_i\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{1k} + \frac{hm_{12}}{2}, y_{2k} + \frac{h_{m22}}{2}, \ldots y_{nk} + \frac{hm_{n2}}{2}\right)$$

$$m_{i4} = f_j(x_k + h,\ y_{1k} + hm_{13}, y_{2k} + hm_{23} \ldots y_{nk} + h^{m}{}_{n3})$$

இவற்றைக் கண்ட பின்னர்

$$y_{i,\,k+1} = y_{ik} + \frac{h}{6}(m_{i1} + 2m_{i2} + 2m_{i3} + m_{i4})\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

எனும் சூத்திரத்திலிருந்து y_{ik+1} கணக்கிடப்படுகிறது. பிழையின் தரம் ஒரு சமன்பாட்டிற்குள்ளது போலேயாகும்.

எந்தத் தோராயத்திற்கு வேண்டுமோ அதைப் பொருத்து h எனும் இடைவெளி தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. சூத்திரங்களில் உள்ள பிழைகளின் தரமும் கவனத்தில் கொள்ளப்படுகிறது. பிறகு h, $\frac{h}{2}$ எனும் இடைவெளிகளில் கணக்கிடும் முயற்சி செய்யப்படுகிறது. $y_i(x_k)$-ன் எல்லா மதிப்புக்களையும் h, $\frac{h}{2}$ என்பவற்றிற்குக் கணக்கிடுவதே மிகச் சிறந்தது. வரும் முடிவுகள் வேண்டிய தோராய அளவுக்குள் இருந்தால் h என்பது நாம் கோரிய மதிப்பை வேண்டிய தோராயத்திற்குத் தருவதென்பதாகும். இல்லாவிடில் இடைவெளியைக் குறைத்து $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{4}$ என ஆக்க வேண்டும். சரியான இடைவெளி h,ஐக் கொண்டால் வேறுபாடுகள் Δq_{ik} $\Delta^2 q_{ik}$ ... என்பவை ஒழுங்காக மாறும். ஸ்டார்மரின் கடைசி வேறுபாடுகள் மிச்ச தசமத்தானத்தில் மட்டும் மாறுதல் விளைவிக்கும்.

மூன்றும் அத்தியாயத்தில் பயிற்சிக் கணக்குகள் :

1. $\frac{dx}{dt} = y\quad \frac{dy}{dt} = -x,\quad x(0) = 0,\quad y(0) = 1.$

2. $\frac{d_2x_1}{dt^2} = x_2,\quad \frac{d^2x^2}{dt^2} = x_1,\ x_1(0) = 2;\ \dot{x}_1(0) = 2.$

   $x_2(0) = 2,\quad x_2(0) = 2.$

3. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t,\ \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^{2t}.$

4. $\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = z, \ \frac{dz}{dt} = x.$

5. $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x}.$

6. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3, \ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3.$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{x}, \ \frac{dz}{dx} = -xy.$

8. $\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$

9. $\frac{dx}{dt} = -x + y + 0, \ \frac{dy}{dt} = x - y + z, \ \frac{dz}{dt} = x + y - z.$

10. $t\frac{dx}{dt} + y = 0, \ t\frac{dy}{dt} + x = 0.$

11. $\frac{dx}{dt} = y + 1, \ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\sin t}.$

12. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x - y}, \ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x - y}.$

13. $\dot{x} + y = \cos t, \ \dot{y} + x = \sin t.$

14. $\dot{x} + 3x - y = 0, \dot{y} - 8x + y = 0, x(0) = 1, y(0) = 4.$

15. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0; \ t = 0, \theta = \frac{\pi}{36}, \ \frac{d\theta}{dt} = 0.$

·001 திருத்தமாக $\theta(1)$-ன் மதிப்புக் காண்க.

16. $\dot{x}(t) = ax - y, \ \dot{y}(t) = x + ay,$ a நிலை எண்.

17. $\dot{x} + 3x + 4y = 0, \ \dot{y} + 2x + 5y = 0.$

18. $\dot{x} = -5x - 2y, \quad \dot{y} = x - 7y.$

19. $\dot{x} = y - z \ \ \dot{y} = x + y, \ \dot{z} = x + z.$

20. $\dot{x} - y + z = 0, \ \dot{y} - x - y = t, \ \dot{z} - x - z = t.$

21. $\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)}.$

22. $\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$

23. $\dot{X} = AX$ இங்கு $X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \ A = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{matrix} \right\|$

4. உறுதிநிலைக் கோட்பாடு

(Theory of stability)

1. அடிப்படைகள்

மெய்யாக நிகழும் நிகழ்ச்சிகளைக் கணிதம் வழி ஆராய நிகழ்ச்சிகளை எளிதாக்கி, இலட்சிய நிகழ்ச்சிகளாக ஆக்க வேண்டிய தேவை ஏற்படுகிறது. அப்போது மிகவும் முக்கிய காரணங்களை மட்டும் கொண்டு மற்ற அவ்வளவு முக்கியமல்லாத காரணங்களை நீக்கவேண்டி வருகிறது. ஆகவே, எளிதாக்கும் கோட்பாடுகள் எத்தனை உசிதமாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன எனும் கேள்வி முன்னே நிற்கும். நாம் எடுத்துக்கொள்ளாத காரணங்கள் நிகழ்ச்சியை மிகவும் பாதிக்கக்கூடியவையாகவும் இருக்கலாம். அதனால் நிகழ்ச்சியின் தன்மையும் அளவுகளும் மாறலாம். முடிவுகளை சோதனை முடிவுகளுடன் ஒப்பிட்டுக் கேள்விக்கு விடை காணலாம். இருப்பினும் இவ்வாறு எளிதாக்குவது எந்தெந்த இடங்களில் இயலாது என்பதையும் காட்டலாம்.

நிகழ்ச்சிகள் கீழ்வரும் சமன்பாடுகளால் விளக்கப்படுவதென்போம்.

$$\frac{dy_i}{dt} = \phi_i\,(t, y_1\ y_2, \ldots y_n),\ t=1,2,\ldots n) \quad \ldots (4.1)$$

இதன் துவக்க மதிப்புக்கள் $y_i\,(t_0) = y_{i_0}\ (i = 1,2, \ldots n)$

இவை சாதாரணமாக கண்டறிந்த அளவுகளின் முடிவாகும். ஆகவே பிழை இல்லாதிருக்க முடியாது. ஆகவே மதிப்புக்களில் சில மாற்றம், காணவேண்டிய தீர்வின் என்ன விளைவை ஏற்படுத்தும் என்பதை ஆராயவேண்டும்.

ஏதேனும் சிறு மாற்றங்கள் துவக்க மதிப்புக்களில் கணிசமான மாற்றத்தைத் தீர்வில் விளைவிக்கும் என்றால். சரியாக இல்லாது துவக்கக் கொள்கைகள் தரும் தீர்வுகள் நடைமுறையில் அர்த்தமற்றவையாக இருப்பதுடன் நிகழ்ச்சியைத் தோராயமாகவும் காட்டாது.

ஆகவே துவக்க மதிப்பில் ஏற்படும் சிறு மாறுதல் எந்தெந்த நிலையில் தீர்வில் சிறு மாற்றத்தை விளைவிக்கும் என்பதை ஆராய வேண்டிய நிலைமை ஏற்படுகிறது.

$t_0 < t < T$ எனும் முடிவுள்ள இடைவெளியில் t மாறும் போது இதற்கு விடை ஒரு தேற்றத்தால் தரப்படுகிறது. இதற்குத் தீர்வுகள் துவக்க மதிப்பைத் தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்க வேண்டும் (பக்கம் 58-59 பார்க்கவும்). ஆனால் ஏதேனும் மிகப் பெரிய மதிப்பைப் பெற்றால், உறுதிநிலைக் கோட்பாட்டால் பிரச்சினை ஆராயப்படுகிறது.

(4·1)-ன் தீர்வு உறுதிநிலையுடையது என்றுகூற இன்னும் திட்டமாகக் கூற லியபுனுவின் உறுதிநிலை உடையது எனக் கூற கீழ்வரும் பண்புகளை உடையதாக இருக்கவேண்டும்.

ஏதேனும் $\in > 0$ என்பதற்கு அந்தத் தொகுதியின் தீர்வின் துவக்க மதிப்புக்கள் $|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ (எல்லா $t > t_0$-க்களுக்கும்) எனும் சமனின்மை உண்மையாக இருக்கும்போது,

$$|y_i(t) - \varphi(t)| < \in (i = 1, 2, \ldots n) \qquad \ldots (4\cdot2)$$

எனப் பொருந்தும்படி $\delta(t)$ காணமுடியும்படி இருக்கவேண்டும். அதாவது துவக்க மதிப்புக்களுக்கு நெருங்கிய துவக்க மதிப்புக்கள் எல்லா $t > t_0$-க்களும் நெருங்கியிருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு: (4·1)-ல் உள்ள தொகுதி துவக்க மதிப்புக்களைத் தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்கும்படியானால் உறுதிநிலை வரையறையை $t > t_0$ என்பதற்குப் பதிலாக $t > T > t_0$ என எழுதலாம். ஏனெனில் இந்தத் தேற்றத்தினால் $t_0 < t < T$ என்ற இடைவெளித் தீர்வுகள் துவக்க மதிப்புகளை நெருங்கி நிற்கும்.

ஏதேனும் $\delta > 0$ எனும் மதிப்புக்கு, (4·2)-ல் உள்ள சமனின்மை $y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவற்றுள் ஒன்றுக்கும் பொருந்தாவிடில் $\varphi_i(t)$ எனும் தீர்வு உறுதியற்ற நிலைத் தீர்வு (unstable) எனப்படும். உறுதியற்ற நிலைப்பிரச்சினை நடைமுறையில் கவனத்திற்குரியவையல்ல.

$\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் ஒரு தீர்வு உறுதி நிலையுள்ளது மட்டுமல்லாமல்,

$$\lim_{t \to \infty} \left| y_i(t) - \varphi_i(t) \right| = 0. \qquad \ldots (4\cdot3)$$

எனும் நியதிக்குட்பட்டது. ஆனால் ஈற்றணுகும் உறுதிநிலை எனப்படும்.

(4·3)-ல் உள்ள ஒரு நியதியினால் மட்டும் $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் தீர்வின் உறுதிநிலை வருவதில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y, \quad a \neq 0,$$

$y(t_0) = y_0$ துவக்க மதிப்பு என்றால் தீர்வின் உறுதிநிலையை ஆராயவும்.

தீர்வு $y = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$

இது ஈற்றணுகு உறுதிநிலை உடையது. ஏனெனில் $t > t_0$ என்பதற்கு $|y_0 - \bar{y}_0| < \in e^{-a^2 t_0}$ என்றால்,

$$|y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - \bar{y}_0 e^{-a^2(t-t_0)}| = e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \in$$

அல்லாமலும் $\lim_{t \to \infty} e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y \quad a \neq 0,$$

துவக்க மதிப்பு $y(t_0) = y_0$, என்றால் உறுதிநிலையை ஆராயவும்.

தீர்வு $y = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$ என்பது உறுதிநிலை அற்றது.

ஏனெனில் $|\bar{y}_0 - y_0| < \delta(t)$,

$$|\bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_0 e^{a^2(t-t_0)}| < t$$

அல்லது $e^{a^2(t-t_0)} |\bar{y}_0 - \bar{y}_0| < \in$ அல்ல $t > t_0$-க்களுக்கும் எனும்படி $\delta > 0$ காணமுடியாது.

$y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும்

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \quad (4\cdot5)$$

சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் உறுதிநிலை ஆராய்வோம் இது மூலப் புள்ளியில் உள்ள சமநிலையில் காணப்படும் சாரமற்ற (trivial) தீர்வின் உறுதிநிலையை ஆராய்வதாக முடியும்.

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \quad (4\cdot4)$$

என 4·1-ல் பிரதியிட்டு சமன்பாடுகளை புது ராசிகளுக்கு மாற்றவும் புதிய சார்பலன்கள் x_i என்பவை.

$y_i - \bar{y}_i{}'(t)$ எனும் $\bar{y}_i(t)$-லிருந்து காணவேண்டிய சார்பலன்களின் வேறுபாடுகள் ஆகும். இவை தீர்வின் உறுதிப்பாடுகளை ஆராயத் தேவைப்படுபவை.

(4·4)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளால், (4·1)-ஐ புது ராசிகளில் கூற வருவது,

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \phi_i\,(t,\, x_1 + \bar{y}_1(t),\, x_2 + \bar{y}_2(t),$$
$$\ldots,\ x_n + \bar{y}_n(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots \quad (4\cdot5)$$

$x_i = y_i - \bar{y}_1(t)$ என்பதால், உறுதிநிலை ஆராயப்படும் $y_i = \bar{y}_1{}'(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் (4·1)-ன் தீர்வுகளுக்கேற்ற (4·1)-ன் $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் சாரமற்ற தீர்வுகள் உள்ளன. ஏனெனில் $x_i \equiv y_i - \bar{y}_1(t)$ என்பதால். (4·1)-ன் தீர்வுகளான $y_i = \bar{y}_1(t)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ எனும் தீர்வுகளின் உறுதிநிலை காண்பதில் இப்போது (4·5)-ன் சாரமற்ற தீர்வுகளின் உறுதிநிலை காண்பதாகிறது. பொதுத்தன்மை மாருமலேயே, இனிமேல் சாரமற்ற தீர்வுகளின் உறுதிநிலை காண்போம். அதாவது சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் மூலம் புள்ளியில் உள்ள சமநிலைப் புள்ளியை ஆராய்வோம்.

$x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் சமநிலைப் புள்ளிக்சேற்ப உறுதிநிலை நியதிகளைக் கூறுவோம்.

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$ எனும் மதிப்புகளுக்கும் லியபுனுவு உறுதிநிலை $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots n)$ எனும் சமநிலைப் புள்ளியில் ஏற்பட வேண்டுமானல்,

$$|\,x_i(t_0)\,| < \delta_i(\epsilon)\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

எனும் சமனின்மையிலிருந்து,

$$x_i(t) < \epsilon\ (i = 1, 2\ \ldots, n)\ t > T > t_0$$

வரும்படி ஒரு $\delta(\epsilon)$ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அல்லது சற்றே வேறு வகையில் சொன்னல், ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும் $t > T$

எனும் மதிப்புக்களுக்கு $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < t^2$ என,

$$\sum_{i=1}^{n} x_1^2(t_0) < \delta_1^2(t)\text{-லிருந்து வரும் வண்ணம் } \delta_1(t)$$

தேர்ந்தெடுக்க இயலுமானல் $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் சமநிலை லியபுனுவ் பொருளில் உறுதிநிலையுடையது ஆகும்.

அதாவது $t > T$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு மூலப்புள்ளியின் δ_1 அணிமையில் துவக்கப் புள்ளியையுடைய இயக்கப்பாதை மூலப் புள்ளியின் ϵ அண்மைக்கு அப்பால் செல்லாதிருக்கவேண்டும்.

2. சமநிலைப்புள்ளிகளில் சாமானியவகைகள் :

இரண்டு சமபடித்தான, நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடி ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத்தொகுதியின் $x=0$, $y=0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளிக் கணிமையில் இயக்கப்பாதைகளின் நிலைகளை ஆராய்வோம்.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y\\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4{\cdot}6)$$

இங்கு, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

தீர்வுகளை $x = \alpha_1 e^{kt}$, $y = \alpha_2 e^{kt}$ எனும் வடிவில் காண்போம். (பக்கம் 235 பார்க்கவும்) k-ன் மதிப்புக்களைக் காண தன்மை காட்டும்,

சமன்பாடு $\begin{vmatrix} a_{11}-ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0$

அல்லது $k^2 - (n_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$

ஒரு நிலைக்காரணி நீங்கலாக α_1, α_2 என்பவை,

$$\left.\begin{aligned}\text{ஏதேனும் } (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 &= 0\\ (a_{21}\ \alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4{\cdot}7)$$

ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து காண முடியும். கீழ்வரும் வகைகளை ஆராய்வோம்.

(a) $k_1\ k_2$ எனும் தன்மை காட்டுச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் வெவ்வேருகவும், மெய்யெண்களாகவும் இருத்தல்.

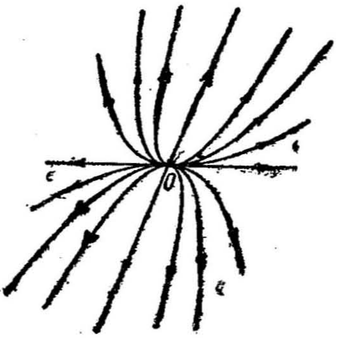
பொதுத் தீர்வின் வடிவம்.

$$\left.\begin{aligned}x &= c_1\alpha_1 e^{k_1 t} + c_2\beta_1 e^{k_2 t}\\ y &= c_1\alpha_2 e^{k_1 t} + c_2\beta_2 e^{k_2 t}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4.8)$$

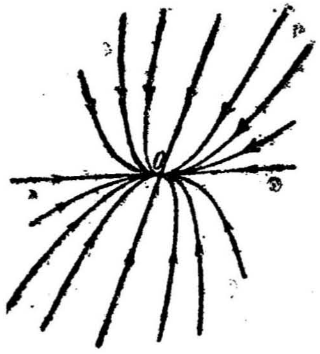
இங்கு α_i, β_i என்பவை $k = k_1$, $k = k_2$ எனும் மூலங்களுக்கு (4·7)-ன் சமன்பாடுகளிலிருந்து காணப்படும் நிலை எண்கள் c_1, c_2 என்பவை ஏதேனும் எண்கள்.

அப்போது கீழ்வரும் வகைகள் காணப்படுகின்றன

(1) $k_1 < 0 \quad k_2 < 0$ என்றால் $x = 0, y = 0$ எனும் நியம ஈற்றணுகு உறுதிநிலையுடையது. ஏனெனில் (t-ன் மிகப் பெரிய மதிப்புக்களுக்கு $e^{k_1 t}$, $e^{k_2 t}$ எனும் காரணிகள் (4·8)-ல் இருப்பதால் $t = t_0$ எனும் துவக்க நேரத்தில் மூலப் புள்ளியின் p அணிமையில் உள்ள புள்ளிகள் மூலப்புள்ளியின் சிறிய ϵ அண்மைக்குச் செல்கின்றன. $t \to \infty$ ஆகும்போது மூலப் புள்ளியை அணுகுகின்றன. படம் 4·1, இத்தகைய இயக்கப்



படம் 4·1.



படம் 4·2.

பாதைகளின் அமைப்பைக் காட்டுகிறது. இது உறுதிநிலை கணுப் புள்ளி (stable nodal point) எனப்படும். அம்புக்குறிகள், t அதிக மாகும்போது பாதையில் இயங்கும் திசையைக் குறிக்கின்றன.

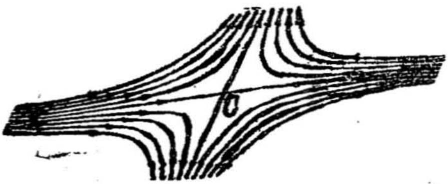
(2) $k_1 > 0 \; k_2 > 0$ ஆகுக; t-க்குப் பகுதி $-t$ எனப் பிரதியிட முந்தியவகை ஆகிறது. அப்போது, பாதைகள் அதே வடிவம் பெற்றிருக்கின்றன. ஆனால் செல்லும் திசை நேரெதிரா கிறது. (படம் 4·2) ஆகவே, t அதிகரிக்க மூலப்புள்ளிக்கு அணிமையில் இருந்தவை அகலப்போகின்றன. ஆகவே, சமநிலைப்புள்ளி லியபுனு பொருளில் உறுதிநிலை அற்றதாகிறது. இத்தகைய புள்ளி, உறுதிநிலை அற்ற கணுப்புள்ளி எனப்படும்.

$k_1 > 0$, $k_2 < 0$ ஆனால் சமநிலைப்புள்ளி உறுதிநிலை அற்றது ஏனெனில், $x = c_1 \alpha_1 e^{k_1 t}$, $y = c_1 \alpha_2 e^{k_2 t}$ (4·9) எனும் பாதை வழி இயங்கும் துகள் e_1-ன் வெகுச் சிறிய மதிப்புக்களுக்கு பூச்சியத்தின் ϵ அணிமையிலிருந்து t அதிகரிக்கும்போது அகலு கிறது.

நாம் கொண்டுள்ள வகையில் மூலப்புள்ளியை அணுகும் இயக்கங்கள் உள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவும். அதாவது,

$$x = c_2 \beta_1 e^{k_2 t} x, y = c_2 \beta_2 e^{k_2 t}$$

c_2-க்குப் பல்வேறு மதிப்புக்கள் தரப்பட $y = \dfrac{\beta_2}{\beta_1} x$ எனும் ஒரே கோட்டில் பல்வேறு இயக்கங்கள் நேரிடுகிறது. t அதிகரிக்கும்



படம் 4·3

போது இந்த நேர்கோட்டில் புள்ளிகள் மூலப்புள்ளியை நோக்கி இயங்குகின்றன. அன்றியும் (4·9)–ன் இயக்கப் பாதையில் புள்ளிகள், t அதிகரிக்கும்போது $y = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} x$ எனும் நேர்கோட்டில் மூலப்புள்ளியை விட்டு அகலுகிறது. ஆனால் $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ என்றால் $t \to \infty$ எனும்போதும் $t \to -\infty$ எனும்போதும் இயக்கப்பாதை சமநிலைப் புள்ளியை விட்டு நீங்குகிறது.

இத்தகைய சமநிலைப்புள்ளி சேணப்புள்ளி (படம் 4·3) எனப்படும். ஏனெனில் இத்தகைய புள்ளிக்கு அணிமையில் இயக்கப் பாதைகள் $z = f(x, y)$ எனும் தலத்தில் சேணப்புள்ளிக்கு அருகில் சமதளக் கோடுகள் அமையும் வகையில் அமைகின்றன.

(b) தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் மூலகங்கள் $k_{1,2} = p \pm qi$. $q \neq 0$ எனும் சிக்கல்எண்கள்.

இந்தத் தொகுதியின் பொதுத்தீர்வு (பக்கம் 239 பார்க்கவும்.)

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y &= e^{pt} (c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt) \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (4{\cdot}10)$$

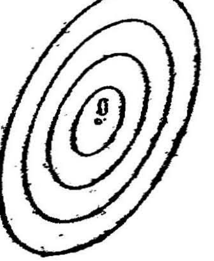
இங்கு c_1, c_2 என்பவை ஏதேனும் நிலை எண்கள்.

c_1^* c_2^* என்பவை மேற்கூறிய நிலை எண்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக வரும் நிலை எண்கள்.

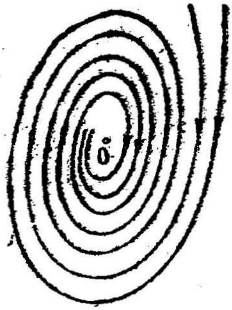
அப்போது,

(1) $k_{1,2} = p \pm qi \quad p < 0 \; q \neq 0$ என்பது ஒருவகை t அதிகரிக்கும்போது $p < 0$ என்றால் e^{pt} பூச்சியத்தை அணுகு கிறது. இரண்டாவது (4·10)-ன் திரும்புக்காரணி, எல்லைக்குட் பட்டது.

p என்பது பூச்சியமானால், (4·10)-ன் வலப்பக்கம் இரண் டாவது காரணியின் அலைவினால் (Periodicity) $x = 0 \; y = 0$ எனும் சமநிலையைச் சுற்றிவரும் மூடுவரைகள் ஆகும். (படம் 4·4) $e^{pt}, p < 0$ எனும் காரணி இருப்பதால், p பூச்சியத்தை அணுக,



படம் 4 4



படம் 4.5

அதிகரிக்க மூடுவரைகள் சுருள்வரைகளாகின்றன. $t \to \infty$ ஆகும்போது, மிகப்பெரிய t ன் மதிப்புக்களுக்கு பூச்சியத்தின் ஏதேனும் δ அணிமையில் இருந்த புள்ளியில், $x = 0 \; y = 0$ எனும் சமநிலைப்புள்ளிக்கு ஏதேனும் குறிப்பிட்ட ϵ அணிமைக்குள் ளேயே சென்று மூலப்புள்ளியை ஈறற்றுகுகிறது. t இன்னும் அதிகரிக்க மூலப்புள்ளியை நெருங்குகிறது. ஆகவே, சமநிலைப் புள்ள ஈற்றருகு உறுதிநிலை உடையது. இத்தகைய குவிய உறுதிநிலைப்புள்ளி (Stable focalpoint) எனப்படும். குவியப் புள்ளிக்கும் கணுப்புள்ளிக்குமுள்ள வேறுபாடு யாதெனில், இயக்கப்பாதைகளின் தொடுகோடுகள், புள்ளி சமநிலையை அணுகும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட தொடுகோட்டுக்கு அணுகு வதில்லை.

(2) $k_{1,2} = p \pm iq \quad p > 0 \; q \neq 0$

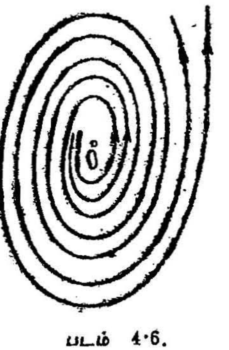
இங்கு t-க்குப் பதில் $-t$ எனப் பிரதியிட முன் சொன்ன வகையாகிறது. இயக்கப் பாதைகளின் வடிவம் முன்னர் கூறியது போலவேயாகும். ஆனால் இயக்கம் t அதிகரிக்க எதிர் திசையில்

ஏற்படும். (படம் 4·6) அதிகரிக்கச் செய்யும் காரணி e^{pt} இருப்பதால் மூலப்புள்ளிக் கணிமையில் இருந்த துகள்கள் t அதிகரிக்கும் போது மூலப்புள்ளியில் $\in$ அணிமையில் இருந்து அகலுகின்றன. ஆகவே, உறுதிப்பாடு நிலையற்றது. இந்தப் புள்ளி உறுதியற்ற குவியப் புள்ளி எனப்படும்.

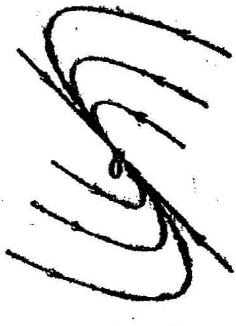
(3) $k_{1,2} = \pm qi, \quad q \neq 0$

முன்னர் கூறியதுபோல அலைச் சார்புத் தீர்வுகள் இருப்பதால் இயக்கப் பாதைகள் மூடுவரைகளாகும். சமநிலைப் புள்ளி உள்ளடக்கியவையாகும். (படம் 4·4) இங்கு அது மையம் எனப்படும். மையம் உறுதிப்பாடுடைய சமநிலைப்புள்ளியாகும். ஏனெனில் $\in > 0$ என $\in$ தரப்பட்டால் δ அணிமையில் பூச்சியத்தை அடுத்த புள்ளிகள் t அதிகரிக்க $\in$ அணிமையைவிட்டு நீங்கா. அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ y &= c_1^* \cos qt + c_2^* \sin qt \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (4\cdot 11)$$



படம் 4·6.



படம் 4·7.

எனும்படியும் $x^2(t) + y^2(t) < \in^2$ எனும்படியும், c_1, c_2 எனும் நிலை எண்கள் காணமுடியும்.

ஆனால் உறுதிப்பாடு இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். ஏனெனில் $x(t), y(t)$, $t \to \infty$ ஆகும்போது பூச்சியத்தை அணுகுவதில்லை.

(c) $k_1 = k_2$ என்பவற்றின் மடங்குகளான மூலகங்கள்

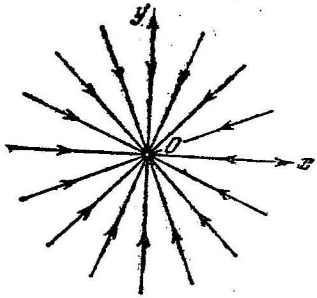
(1) $k_1 = k_2 < 0$.

பொதுத்தீர்வின் வடிவம்,

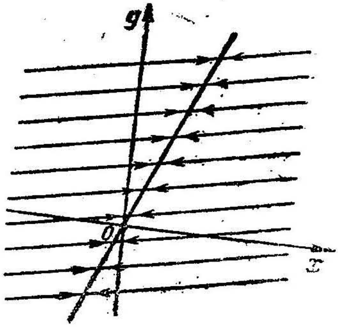
$x(t) = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 t)\, e^{k_1 t}$,

$y(t) = (c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 t)\, e^{k_2 t}$.

$\beta_1 = \beta_2 = 0$ எனவும் வரலாம். ஆனால் α_1, α_2 என்பவை ஏதேனும் நிலை எண்கள். $e^{k_1 t}$ எனும் பூச்சியத்தை வேகமாக அணுகும் காரணி இருப்பதால் ($t \to \infty$ ஆகும் போது), $c_1 \alpha_i + c_2 \beta_{i1}) e^{k_1 t}$ ($i = 1, 2$) என்பது $t \to \infty$ எனும் போது பூச்சியத்தை அணுகுகிறது. ஆகவே மிகப்பெரிய t-ன் மதிப்புக்களுக்கு மூலப்புள்ளியின் δ அணிமையில் இருந்த புள்ளிகள் பூச்சியத்தின் $\in$ அணிமையை அணுகுகிறது. ஆகவே சமநிலைப்புள்ளி ஈற்றணுகு உறுதியுடையவை. [(1)-ன் (a) வகை போல] உறுதி நிலைக்கணுப் புள்ளி எனப்படும். இது (1)-ன் (a) வகைக்கும் (1)-ன் (b) வகையான குவியப்புள்ளிக்கும் இடைத்தரமானது. ஏனெனில் $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ என்பதை நாம் சிறிது மாற்ற, உறுதிநிலை குவியப் புள்ளியாகவோ, அல்லது (1-)ன் (a) வகை உறுதி நிலைக்கணுப் புள்ளியாகவோ மாறும். பொருந்து மூலங்கள், குணகங்களைச் சற்றே மாறுவதால் சிக்கலெண் மூலங்களாகவோ, அல்லது வெவ்வேறு மெய்யெண் மூலங்களாகவோ மாறலாம். $\beta_1 = \beta_2 = 0$ என்றால் மீண்டும் உறுதிநிலைக்கணுப் புள்ளி வருகிறது. (சரியான கணுப்புள்ளி என இது கூறப்படுகிறது). (படம் 4·8 பார்க்கவும்)



படம் 4·8.



படம் 4·9.

(2) $k_1 = k_2 > 0$ என்றால் t-ஐ $-t$ ஆக மாற்ற முன்னர் கூறிய வகை வருகிறது. ஆகவே படங்கள் 4·7, 4·8 காட்டியுள்ள இயக்கப் பாதைகளே வருகின்றன. ஆனால் இயக்கம் எதிர்த்திசையில் நேரிடுகிறது. இந்த வகையில் சமநிலைப் புள்ளி, (2) (a) வகையைப்போன்ற உறுதியற்ற கணுப் புள்ளியாகிறது.

இவ்வாறு எல்லா வகைகளையும் ஆராய்ந்து விட்டோம். ஏனெனில் $k_1 = 0$ (அல்லது $k_2 = 0$) என்பது $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ என்பதால் விலக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, என்றால்

தன்மைகாட்டும் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} a_{11-k} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22-k} \end{vmatrix} = 0,$$

என்பது $k_1 = 0$ எனும் மூலம் உடையதாகிறது. $k_1 = 0$, ஆனால் $k_2 \neq 0$ என்போம். அப்போது (4·6)-ன் உள்ள தொகுதியின் பொதுத் தீர்வின் வடிவம்,.

$$x = c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 e^{k_2 t},$$
$$y = c_1 \alpha_2 + c_2 \beta_2 e^{k_2 t}.$$

't'-ஐ நீக்க, $\beta_1 (y - c_1 \alpha_2) = \beta_2 \ (x - c_1 \alpha_1)$ எனும் இணைகோட்டுத் தொகுதி வருகிறது. $c_2 = 0$ எனும்போது $\alpha_1 y = \alpha_2 x$ எனும் நேர்கோட்டில் அமையும் ஒரு துணை அலகுச் சமநிலைப்புள்ளிகள் வருகின்றன. $k_2 < 0$, என்றால் $t \to \infty$ ஆகும் போது இயக்கப்பாதையில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $x = c_1 \alpha_1$, $y = c_1 \alpha_2$ எனும் இயக்கப்பாதையில் உள்ள சமநிலைப்புள்ளியை அணுகுகிறது. $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ எனும் சமநிலைப்புள்ளி ஈற்றணுகாத் தன்மையுடைய உறுதிப்பாடுடையது.

ஆனால் $k_2 > 0$ இயக்கப்பாதைகளின் அமைப்பு அதே போலவே உள்ளது. ஆனால் புள்ளிகள் இயக்கப்பாதையில் எதிர்த்திசையில் நகருகின்றன. $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப்பாடில்லாதாகிறது.

ஆனால், $k_1 = k_2 = 0$ இரண்டுவகை வருகிறது.

1. (4·6)-ன் பொதுத்தீர்வு $x = c_1, y_1 = c_2$ எனும் வடிவமாகும். எல்லாப்புள்ளிகளும் சமநிலைப்புள்ளிகள். எல்லாத் தீர்வுகளும் உறுதிப்பாடுடையவை.

2. பொதுத் தீர்வின் வடிவம்,

$$x = c_1 + c_2 t, \quad y = c_1^* + e_2^* t,$$

c_1, c_2 எனும் ஏதேனும் நிலை எண்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கை c_1^* c_2^* ஆகும்.

இங்கு சமநிலைப்புள்ளி $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, உறுதிப்பாடு இல்லாதது

குறிப்பு 2 : சமநிலைப்புள்ளிகளை வகைப்படுத்துதல் தனிப் புள்ளிகளின் வகைப்பாடுடன் நெருங்கிய தொடர்புடையது.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y,\\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y,\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4\cdot 6)$$

எனும் வகையில் $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ஆகும்போது,

t-ஐ நீக்க வரும் சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$ ... (4·12)

இதன் தீர்வு வரைகள் (4·6)-ன் இயக்கப்பாதைகளுடன் பொருந்தும், $x=0$, $y=0$ எனும் (4·6)-ன் தொகுதியின் சமநிலைப் புள்ளி (4·12)-ன் தனிப்புள்ளியாகும்.

தன்மைகாட்டும் சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்களும் எதிர் மெய்ப் பகுதிகளையுடையனவானால் [வகைகள் a (1) ; b (1) c (1)], சமநிலைப்புள்ளி ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது. ஆனால் தன்மைகாட்டும் சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒரு மூலம் நேர்மெய் யெண்பகுதியுடையதாக இருந்தால் [வகைகள் (2) (a), (3) (a) ; (b) (2) ; (c) (2).] சமநிலைப்புள்ளி உறுதிப்பாடு இல்லாதது.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \ldots \quad (4\cdot 13)$$

எனும் நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய n சமபடித்தான ஒரு படிச் சமன்பாடுகளுக்கும் இதுபோன்று கூறியவை பொருந்தும்.

(4·13)-ன் தொகுதியின் தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களின் மெய்யெண் பகுதிகள் எதிரெண்ணானால் $X_i \equiv 0$ $(i, = 1, 2, \ldots n)$ எனும் சாரமற்ற தீர்வு ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது ஏன், தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் சில மூலங்கள் k_sக்கு ஏற்ற தனித் தீர்வுகள் k_s மெய்யெண்ணானால்,

$X_i = \alpha_j\, e^{k_s t}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$

ஆகும் (பக்கங்கள் 235, 237)

k_s சிக்கலெண்ணானால், அதாவது $k_s = p_s + q_s i$ ஆனால்

$$x_j = e^{k_s t}\,(\beta_j \cos q_s t + r_j \sin q_s t).$$

ஆகும். முடிவாக, பொருந்து மூலங்களாகும்போது தீர்வுகள் போன்றவையே. ஆனால் $p_j(t)$ எனும் பல்லுறுப்புக் கோவை

அவற்றின் குணகங்களாகும், மூலத்தின் மெய்யெண் பகுதி எதிரெண்ணானால் $p_s < 0$ அல்லது k_s மெய்யெண்ணாகவும், ஆனால்) இத்தகைய தீர்வுகள் யாவும் $t \to \infty$ ஆகும் போது பூச்சியத்தை அணுகும். அது அணுகும் வேகம் c நிலை எண்ணாக $-m < 0$ ஆகவும் தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் மெய்யெண் பகுதியின் மிகப் பெரிய மதிப்பைவிடப் பெரியதாகவும் இருக்கும்போது ce^{-mt} பூச்சியத்தை அணுகும் வேகத்தைவிட மெள்ள இராது. ஆகவே, t போதுமான அளவு பெரிதாக இருக்கும்போது, மூலப்புள்ளிக்கு δ அணிமையில் முதலில் உள்ள புள்ளிகள், ஏதேனும் சிறிய ϵ பூச்சிய அணிமையில் $t \to \infty$ புகுகின்றன. பூச்சியத்தை எல்லையின்றி அணுகுகின்றன. $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் சமநிலைப்புள்ளி ஈற்றணுகு உறுதியுடையதாகிறது.

ஆனால் தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒரு மூலத்தின் மெய்யெண் பகுதி நேரெண்ணானால், அதாவது மெய் $k_i = p_i > 0$ என்றால், $x_j = c \ \alpha_j e^{k_i t}$ எனும் இந்த மூலத்திற்கேற்ற மூலம் அல்லது k_i சிக்கலெண் என்றால் $c\ e^{p_i t}$ $(\beta_j \cos q_i t - r_j \sin q_i t)$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ என்பதால் மெய் (அல்லது கற்பனைப் பகுதி c எத்தனை நுண்ணியதாகினும் t அதிகரிக்கும்போது எல்லையின்றி அளவில் அதிகரிக்கும். ஆகவே t அதிகரிக்கும் பூச்சியத்தின் δ அண்மையில் இருந்த புள்ளிகள் பூச்சியத்தின் ϵ அணிமையைவிட்டு இயக்கப் பாதைகளில் அகலுகின்றன. ஆகவே தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் ஏதேனும் ஒரு மூலத்தின் மெய்யெண் பகுதி நேரெண்ணானால் $x_j \equiv 0$ எனும் $(j = 1, 2, \ldots n)$ (4.13)ன் தொகுதியின் சமநிலைப்புள்ளி உறுதிப்பாடு இல்லாதது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 3y$$

என்ற தொகுதியின் சமநிலைப்புள்ளி எத்தகையது? தன்மை காட்டும் சமன்பாடு.

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது $k^2 - 4k + 5 = 0$

இதன் மூலங்கள் $k_{1,2} = 2 \pm i$, ஆகவே $x = 0$. $y = 0$ என்பது உறுதிப்பாடில்லாத குவியப் புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\ddot{x} = -a^2 x - 2b\dot{x}$ என்பது தடை ஊடே இயங்கும் மீன் இயல்புடை அலைவுகள் சமன்பாடாகும் ($b > 0$ எனும்போது) இதற்குச் சமமான சமன்பாட்டுத் தொகுதியைக் கொள்ள

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -a^2 x - 2by.$$

இதன் தன்மை காட்டும் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} -k, & 1 \\ -a^2 & -2b-k \end{vmatrix} = 0 \text{ அதாவது } k^2+2bk+a^2=0,$$

இங்கு $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$,

கீழ்வரும் வகைகளை ஆராயவும்.

(1) $b = 0$, அதாவது தடையில்லை என்போம். எல்லா இயக்கங்களும் அலை இயக்கங்களாகும். மூலப்புள்ளியில் உள்ள சமநிலைப்புள்ளி உறுதிப்பாடுடையது.

(2) $b^2 - a^2 > 0, b > 0$. சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப் பாடுடைய குவியப் புள்ளி அலைவுகள் ஓய்கின்றன.

(3) $b^2 - a^2 > 0$, $b > 0$. சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப் பாடுடைய கணுப்புள்ளி எல்லாத் தீர்வுகளும் தணிவுடையவை; அலைவில்லாதவை. ஊடகத்தின் தடை அதிகமானால் இத்தகைய வகை வருகிறது.

(4) $b < 0$ (எதிர் உராய்வு வகை) $b^2 - a^2 < 0$, சமநிலைப் புள்ளி உறுதியற்ற குவியப்புள்ளி.

(5) $b < 0, b^2 - a^2 > 0$ (மிக அதிகமான எதிர் உராய்வு) சமநிலைப் புள்ளி, உறுதிப்பாடில்லாத கணுப்புள்ளி.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கீழ்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வின் உறுதிப்பாடை ஆராயவும்.

$$\frac{dx}{dt} = 2y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 5x - 4y,$$

இதன் தன்மை காட்டும் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & -1 \\ 3 & -k & -2 \\ 5 & -4 & -k \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது $k^2 - 9k + 8 = 0.$

பொதுவகையில் முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை நிர்ணயிப்பது கடினம். இங்கு $k_1 = 1$ என்பதை எளிதில் காணலாம். இதன் மெய்யெண் பகுதி நேரெண் ஆகவே, $x = 0, y = 0$. $z = 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப்பாடில்லாதது.

3. லியபுனுவின் இரண்டாவது முறை

சென்ற நூற்றாண்டின் இறுதியில் மிகவும் பிரசித்திபெற்ற கணிதப் பேரறிஞர் அலெக்சாண்டர் மிகாய்லாவி லியபுனுவு (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov) என்பவர்.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(t.\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)\ (i = 1, 2,\ \ldots\ n)\ \ldots (4.14)$$

எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்வதற்கு மிகவும் பொதுவானமுறை ஒன்றை விவரித்தார். அது லியபுனுவின் இரண்டாவது முறை எனப் பெயர் பெற்றது.

தேற்றம் (4·1) (லியபுனுவின் உறுதிப்பாடுத் தேற்றம்)

(1) $x_1, x_2, \ldots x_n$) எனும் வகையிடுவதற்குரிய லியபுனுவுச் சார்பலன் மூலப்புள்ளிக் கணிமையில் கீழ்வரும் நியதிக்குட்பட்டதென்போம்.

(1) $v\,(x_1, x_2, \ldots x_n) > 0;\ x_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவற்றிற்கு மட்டும் $v = 0$ அதாவது மூலப்புள்ளியில் மீச்சிறிய மதிப்புடையது.

$$(2)\quad \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i\,(t, x_1, \ldots\ x_n) \leq 0 \text{ for } t > t_0,$$

என்றால், சமநிலைப்புள்ளி $x \equiv 0\ (i = 1, 2, \ldots n)$ என்பது உறுதிப்பாடுடையது.

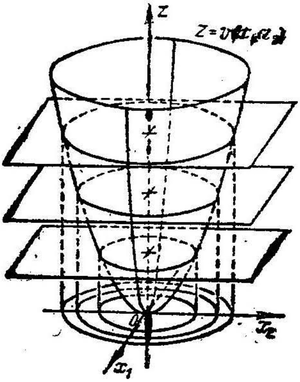
இரண்டாவது நியதியில் $\frac{dv}{dt}$ எனும் வகைக்கெழு தீர்வுவரை வழிக்கொள்ள வேண்டும். அதாவது, $v(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் சார்பலன்களில் உள்ள ராசிகள் x_i-க்குப் பதிலாக (4.14)-ல் உள்ள தொகுதிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x(t)\ (i = 1, 2, \ldots n)$ பிரதியிடப்பட வேண்டும்.

ஏன், $\frac{dv}{dt} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$ எனக்கொண்டோ அல்லது $\frac{dx_i}{dt}$-க்குப் பதிலாக (4.14)-ன் வலப்பக்கத்தைப் பிரதியிட்டோ நாம் அடைவது,

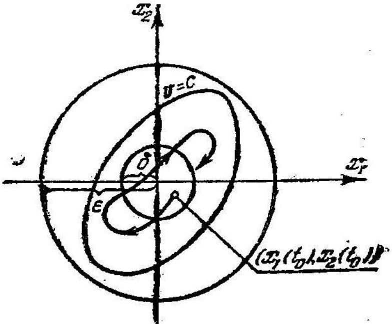
$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ என்பதாம்.}$$

லியபுனவு உறுதிப்பாடுத் தேற்றத்தின் நிருபணம்

மூலப்புள்ளியின் அணிமையிலும் சரியான மீச்சிறியபுள்ளியின் அணிமையிலும் (படம் 4·10) $v(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் சார்பலனின் சமதலங்கள் $v(x_1, x_2 \ldots x_n) = c$ மூடுதலங்களாகும். இவற்றின் உள்ளே மீச்சிறிய புள்ளியாகிய மூலப்புள்ளி அமைந்துள்ளது.



படம் 4-10.



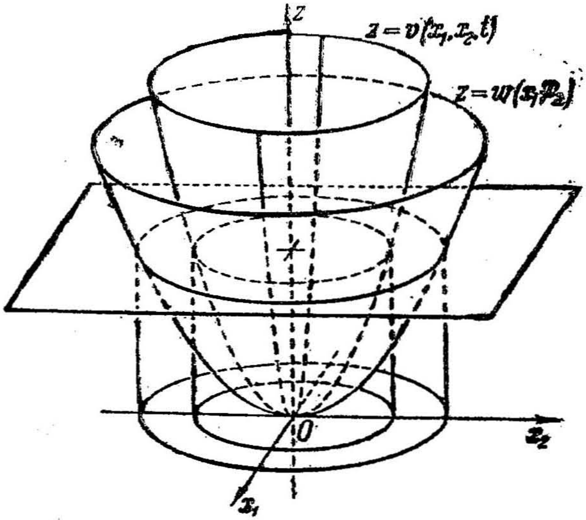
படம் 4–11.

$\epsilon > 0$ என ஆகுக. போதுமான சிறிய மதிப்பு $c > 0$ க்கு $v = c$ எனும் சமதலம் பூச்சியத்தின் அண்மையில் உள்ளது.* ஆனால் பூச்சியத்தின் வழிச் செல்லாது. ஆகவே $v = c$ என்பதன்

* இன்னும திட்டமாகக் கூறவேண்டுமானல் $v = c$ ன் ஒரு மூடு பிரிவவாது பூச்சியத்தின் அணிமையில் வுள்ளது.

உள்ளே பூச்சியத்தில் ϵ அண்மை இருக்குமாறு ஒரு $\delta > 0$ எடுத்துக்கொள்ள முடியும். இந்த அணிமையில் $v > 0$ x_i (t_0) $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் துவக்கப் புள்ளியை மூலப் புள்ளியின் δ அணிமையில் கொள்வோம். (படம் 4.11) ஆகவே $v [x_1 (t_0), x_2 (t_0), \ldots x_n (t_0)] = c_1 < c$: அப்போது $t > t_0$ துவக்க மதிப்புகளால் நிர்ணயிக்கப்பட்ட இயக்கப் பாதையில் உள்ள புள்ளிகள் பூச்சியத்தின் ϵ அணிமையைவிட்டு நீங்க முடியாது. $v = c$ என சமதலப் பரப்பின் எல்லையை மீறியும் போகா. ஏனெனில் தேற்றத்தின் இரண்டாவது நியதியால் இயக்கப் பாதையில் v அதிகரிக்காது. ஆகவே $t > t_0$க்கும் v $[x_1(t), x_2(t), \ldots x_n (t)] \leqslant c_1 < c$.

குறிப்பு : இன்னும் விரிவான கொள்கைகளைக் கொண்டு வியபுனுவின் தேற்றத்தை நிறுவினர். குறிப்பாக v எனும் சார்பலன் t-ஐயும் சார்ந்து இருக்கும் எனும் கொள்கையைக் கொண்டார். $v = v (t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ அப்போது உறுதிப்பாடு தேற்றம் உண்மையாக முதல் நியதிக்குப் பதிலாக பூச்சியத்தின் அணிமையில் $t \geqslant 0$ எனும்போது $v (t, x_1, x_2, \ldots x_n) \geqslant w(x_1, x_2, \ldots x_n) \geqslant 0$



படம் 4–12

எனும் கொள்கையைக் கொள்ளவேண்டும். இங்கு $v (t\ 0, 0, \ldots 0) = w (0, 0, \ldots 0)$ எனும்படி தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன் w மூலப் புள்ளியில் உண்மையான மீச்சிறு மதிப்புடையதாக வேண்டும்.

ஆனுல் இரண்டாவது நியதி $\frac{dv}{dt}<0$ அதுவேதான். ஆனுல்இங்கு

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f(t, x^s\ .\ x_n).$$

நிருபணத்தின் அமைப்பு மாருது. ஆனுல் முதல் நியதியால் $t > t_0$ க்கும் (படம் 4-12) t மாறும்போது சமதலம் $v(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ இயங்கினுலும் $w(x_1, x_2, \ldots x_s) = c$ எனும் சமதலதிற்குள்ளேயே இருக்கிறது.

தேற்றம் 4·2 (ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு பற்றிய லியபுனுவின் தேற்றம்)

$v(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் லியபுனுவின் வகையிடற்குறிய சார்பலன் கீழ் வரும் நியதிகட்குட்பட்டது.

(1) $v(x_1, x_2, \ldots x_n)$ மூலப்புள்ளியில் (v $(0,0\ \ldots) = 0$ எனும் சரியான மிகச்சிறிய மதிப்புடையது

(2) (4·14)ல் உள்ள தொகுதியின் தீர்வுவரை வழிக் கணக்கிடப்படும் பின் வகையீடு

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{1=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) < 0.$$

β என்பது ஒரு நிலை எண்ணுல் மூலப்புள்ளியின் ஏதேனும் ஒரு சிறு அணிமையிலிருந்து வெளியே அதாவது

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \delta_1^2 > 0,\ \ t > T > t_0,\text{ க்கு}$$

வகையீடு $\frac{dv}{dt}< -\beta < 0$, இவ்வாருனுல் $x_i \equiv 0\ (i=1,2, \ldots n)$ எனும் (4.4)ன் சமநிலைப் புள்ளி ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையதாகும்.

நிருபணம் : உறுதிப்பாடுத் தேற்ற நியதிகள் இருப்பதால் ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$ என்பதக்கு ஒரு $\delta(\epsilon) > 0$ எனக் கீழ்வருமாறு கொள்ளமுடியும். அதாவது, மூலப்புள்ளியின் δ அணிமையில் இயக்கப்பாதையில் துவக்கத்தில் இருந்த புள்ளிகள் $t > t_0$ எனும் போது மூலப்புள்ளியின் ϵ அணிமையைவிட்டு அகலாது.

குறிப்பாக, $t > J$ எனும்போது இயக்கப்பாதையில் இரண்டாவது நியதி பொருந்துகிறது. ஆகவே, t அதிகரிக்கும்போது v எனும் சார்பலன் இயக்கப்பாதையில் தொடர்ந்து குறைகிறது. இயக்கப் பாதையில் $t \to \infty$ ஆகும் போது v எனும் சார்பலனுக்கு இயக்க பாதையில் எல்லையுள்ளது. அதாவது,

$$\lim_{t \to \infty} v(t, x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)) = \alpha > 0$$

இன்னும் நாம் நிறுவ வேண்டுவது $\alpha = 0$ என்பதாம் ஏனெனில் $\alpha = 0$ என்றால் முதல் நியதியிலிருந்து $\lim_{t \to \infty} (x_i(t) = 0 \; (i = 1, 2, \dots n)$ எனவரும். அதாவது, சமநிலைப்புள்ளி $x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots n)$ என்பது ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது. $\alpha > 0$ எனக்கொள்வோம். அப்போது இயக்கப்பாதை, $t < to$ எனும்போது $v \geq \alpha$ எனும் இடத்தில் அமைகிறது. ஆகவே மூலப் புள்ளியின் ஒரு δ_1 அணிமைக்கு வெளியாக இருக்கிறது. அதாவது அந்த இடத்தில் இரண்டாவது நியதியால் $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0; \; t < to$ எனும்போது சமனின்மை $\frac{dv}{dt} \leq$-ல் β என்பதை dt ஆல் பெருக்கி இயக்கப் பாதையில் T_0-இலிருந்து t வரை தொகை காண நாம் அடைவது.

$$v[x_1(t), (x_2(t) \dots x_n(t)] - v[x_1(T_v), x_2(T_v) \dots x_n(T_0)] \leq -\beta(t - (T_0),$$

அல்லது,

$$(v[x_1(t)_1 \, x_2(t) \dots (x_n(t)] \geq v[x_1(T_0), (x_2(T_0, \dots (x_n(T)] < v(x_1, T_0 \dots)$$

t-ன் போதுமான அளவு பெரிய மதிப்புக்கு வலப்பக்கம் எதிரெண்ணாகும். ஆகவே, $u[x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)] < 0$ இந்த நியதி (1)க்கு முரணானது.

குறிப்பு: ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு பற்றிய தேற்றத்தை v எனும் சார்பலன் $(t, x_1, x_0, \dots x_n)$ எனும் ராசிகளைச் சார்ந்திருந்தாலும் கொள்ளலாம், அதற்கு முன்தேற்றம் போன்று முதல் நியதிக்குப் பதில்

$v(t, x_1, x_2, \dots x_n) \geq w(x_1, x_2, \dots x_n) > 0$ என நியதியைக் கொள்ளவேண்டும். இங்கு மூலப்புள்ளியில் w எனும் சார்பலன் சரியான மீச்சிறு மதிப்புடையதாக வேண்டும். அத்துடன் $v(t, x_1, x_2, \dots_n)$ எனும் சார்பலன் $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$, ஆகும்போது t-ல் பூச்சியத்தைச் சீராக அணுக வேண்டும்.

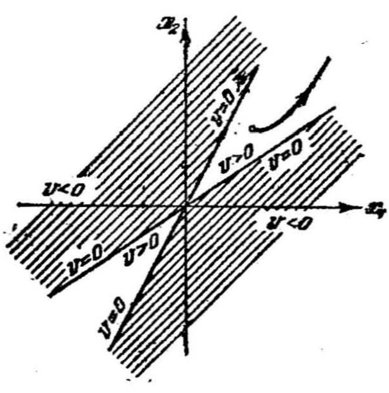
தேற்றம் 4.3 : சேதயேவின் உறுதிப்பாடின்மைத் தேற்றம் (Chetayev's instability Theorem) கீழ்வரும் நியதிக்குட்பட்ட வகையிடற்குரிய $v\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் சார்பலன் உளவாகுக. மூலப்புள்ளியின் முடிய h அண்மையில் (1) மூலப்புள்ளியின் ஏதேனும் ஒரு சிறிய U அணிமையில் ஒரு பரப்பு $(v > 0)$ அதில் $v > 0$, அதன் எல்லையில் ஒரு பாகத்தில் $v = 0$ எனும்படி இருக்க வேண்டும். (2) அந்தப் பரப்பில் $(v > 0)$ வகைக்கெழு

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \ \ t, x_1, x_2, \ldots x_n) > 0 \ \ (v > \alpha).$$

$\alpha > 0$ எனும் பரப்பில் $\frac{dv}{dt} > \beta > 0$ இவ்வாறு அமைந்தால் (4.14)-ன் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் $x_i \equiv 0\ (i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப்பாடுடையதல்ல.

துவக்கப்புள்ளி $x_1\ (t_0), x_2\ (t_0), \ldots x_n\ (t_0)$ இதனை $(v>0)$, $v\ [x_1\ (t_0), x_2\ (t_2), \ldots x_n\ (t_0)\ ] = \alpha > 0$ (படம் 4,13) எனும் பரப்பில் மூலப்புள்ளிக்கு ஏதேனும் அணிமையில் இது உள்ளது.

$\frac{dv}{dt} \geqslant 0$ எனும்படி இயக்கப்பாதை உள்ளது. ஆகவே இயக்கப் பாதையில் v எனும் சார்பலன் குறைவதில்லை. ஆகவே இயக்கப்பாதை மூலப் புள்ளியின் h அணிமையில் உள்ள வரை (இங்கு தேற்றநியதிகள் பொருந்துகின்றன.) இயக்கப் பாதை $(v > \alpha)$ எனும் பரப்பில் இருக்க வேண்டும். இயக்கப்பாதை மூலப் புள்ளியின் h அணிமையை விட்டு நீங்குவதில்லை என்போம். அப்போது இரண்டாவது நியதியால் $t > t_0$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு இயக்கப் பாதையில் $\frac{dv}{dt} > \beta > 0$ இந்தச்



படம் 4-13.

சமனின்மையை dt ஆல் பெருக்கித் தொகை காண நாம் அடைவது $v\ [x_1\ (t), x_2\ (t), \ldots x_n\ (t)\ - v\ [x_1\ (t_0), x_2\ (t_0)], \ldots x_n\ (t_0)] > \beta\ (t - t_0)$ ஆகவே $t \to \infty$ ஆகும்போது இயக்கப் பாதயைில்

எல்லையின்றி சார்பலன் v அதிகரிக்கிறது. ஆனால் இது, மூலப் புள்ளியின் h அணிமையைவிட்டு நீங்குவதில்லை எனும் கொள்கைக்கு முரணாகிறது. ஏனெனில் h அணிமையில் 'v' என்பது எல்லையுடைய தொடர்ச்சியுடைய சார்பலனாகும்.

குறிப்பு : v என்பது 't'-ஐச் சார்ந்துள்ளது எனவும் கொண்டு சேதாயவு தேற்றத்தில் நிருபித்தார். அப்போது கொள்கையைச் சற்றே திருத்தவேண்டும். குறிப்பாக மூலப்புள்ளியின் h அணிமையில் உள்ள எடுத்துக்கொண்ட பரப்பில் $(v > 0)$ v ஆனது எல்லையுடையது எனக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3,$$

எனும் தொகுதியின் சாரமற்ற தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராயவும்.

$v(x, y) = x^2 + y^2$ எனும் சார்பலன் லியபுனவி ஈற்றணுகு உறுதிப்பாட்டுத் தேற்றத்தின் நியதிகட்கு உட்பட்டது. அதாவது,

(1) $v(x, y) > 0$, $v(0,0) = 0$

(2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-y-x^3)+2y(x-y^3) = -2(x^4+y^4) < 0$

மூலப்புள்ளியின் அணிமைக்கு வெளியே,

$$\frac{dv}{dt} < -\beta < 0.$$

ஆகவே, $x \equiv 0$ $y \equiv 0$, எனும் தீர்வுகள் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையவை

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4, \quad \frac{dy}{dt} = yx^4,$$

எனும் தொகுதியின் சாரமற்ற தீர்வு $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ என்பதன் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

சார்பலன் $v(x, y) = x^4 + y^4$ என்பது லியபுனவு நியதிகட்கு உட்பட்டது. சார்பலன் $v(x, y) = x^4 + y^4 > 0$ $v(0, 0) = 0$.

$$\frac{dv}{dt} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0.$$

ஆகையால் சாரமற்ற தீர்வு $x \equiv 0$ $y \equiv 0$, உறுதிப்பாடுடையது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + x^5$$

$$\frac{dy}{dt} = x^3 + y^5$$

எனும் தொகுதியின் சாரமற்ற தீர்வு ஆகிய $x \equiv 0, \quad y \equiv 0$ என்பதன் இறுதிப்பாட்டை ஆராயவும்.

சார்பலன் $v = x^4 - y^4$ செதயெவின் தேற்றத்தின் நியதி கட்குட்பட்டவை

(1) $v > 0 \quad |x| > |y|$ என்பதற்கு,

(2) $\dfrac{dv}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0,$

$|x| > |y|$ எனும்போது; $v \geqslant \alpha > 0; \ \dfrac{dv}{dt} \geqslant \beta > 0$ எனும் போதும், $x \equiv 0 \quad y \equiv 0$, என்பது உறுதிப்பாடு இல்லாதது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u\,(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_i} \,(i = 1, 2, \ldots n),$$

எனும் தொகுதியின் $x_i \equiv 0 \quad y_i \equiv 0$, எனும் சாரமற்ற தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க

$v\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் சார்பலன் சரியான மீச்சிறிய மதிப்பை மூலப்புள்ளியில் அடைகிறது எனத் திரட்டப்பட்டுள்ளது.

இங்கு லியபுனுவு சார்பலன் ஆக,

$$v\,(x_1, x_2, \ldots x_n) = v\,(0, 0, \ldots 0) - u\,(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

என்பதைக் கொள்வோம்.

இது $x_i \equiv (i = 1, 2, 3, \ldots n)$ எனும்போது பூச்சியமாகிறது. மூலப் புள்ளியில் சரியான மீச்சிறு மதிப்புடையதாகிறது. ஆகவே லியபுனுவின் உறுதிப்பாடு தேற்றத்தின் முதல் நியதி பொருந்துகிறது. தீர்வுவரை வழி உள்ள வகைக்கெழு

$$\frac{dv}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 < 0.$$

இவ்வாறு லியபுனு தேற்றத்தின் நியதிகள் பொருந்துகின்றன. ஆகவே சாரமற்ற தீர்வு உறுதிப்பாடுடையது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j$$

இங்கு $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t), (i \neq j)$ எனும்போது

அன்றியும் $a_{ij}(t) < 0$.

இந்தத் தொகுதியின் சாரமற்ற தீர்வு $x_1 \equiv 0, (i = 1,2,...n)$ என்பதன் உறுதிப்பாடு ஆராய்க.

சாரமற்ற தீர்வு உறுதிப்பாடுடையது ஏனெனில் சார்பலன்

$v = \sum_{i=1}^{n} (x_i^{\,2}$ என்பது லியபுனுவு தேற்ற நியதிகட்கு உட்பட்டது.

(1) $v > 0, \quad v(0, 0 \ldots 0) = 0,$

(2) $$\frac{dv}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{dx_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{u} a_{ij}(t)\, x_i\, x_j$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_i^2 < 0.$$

4. முதற்கண் தோராயம் காணும் முறையின் அடிப்படையில் அமைந்த உறுதிப்பாடு ஆய்வு

Test for stability based on First approximation

மூலப்புள்ளிக் கணிமையில் வகையிடற்குரிய சார்பலன்கள் f_i என்பவை.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (i=1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (4\cdot14)$$

எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் சமநிலைப் புள்ளி $x_i \equiv 0 \; (i = 1, 2, \ldots n)$-ன் உறுதிப்பாட்டை ஆராயக் கீழ்வரும் முறை கையாளப்படுகிறது. $f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனும் சார்பலன்களின் வகையிடற்குரிய பண்பைப் பயன்படுத்தி

(4·14)-ன் தொகுதிச் சமன்பாட்டை $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ எனும் மூலப்புள்ளிக் கணிமையில்,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots x_n) \; (i=1, 2, \dots n) \quad \dots (4{\cdot}15)$$

எனும் வடிவில் குறிப்போம். இங்கு R_i என்பவை,

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2}$ என்பதைச் சார்ந்து முதல் படியைவிட அதிக மானது. தொகுதி (4·15)-ன் சமநிலைப் புள்ளி $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$-க்குப் பதிலாக ஒருபடித் தொகுதி,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j \; (i = 1, 2, \dots n) \quad \dots (4{\cdot}16)$$

என்பதன் அதே சமநிலைப் புள்ளியின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்வோம். இந்தத் தொகுதி (4·15)-ன் தொகுதியின் முதற் கண் தோராய சமன்பாட்டுத் தொகுதி எனப்படும். இந்த முறையைப் படுத்தும் முறையின் தொகுதியை ஆராயாமலே பல முறை பயன்படுத்தியுள்ளோம். இம் முறை A லியபுனவால் விரிவாக ஆராயப்பட்டு. பின்னர் கணித அறிஞர்களால்—குறிப் பாக O. பெரான் (O. Perron) I. மால்கின் (I. Malkin) K. பெர் சிட்ஸ்சி, N. செதயெவ் இவர்களால் பரவலாகப் பயன்படுத்தப் பட்டது.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, ஒருபடியல்லாத தொகுதிக்கு, அசல் சமன்பாட்டுத் தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்வதைவிட முதற்கண் தோராயத் தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்வது எளிது. இருப்பினும் (4.16)-ல் a_{ij} எனும் குணகம் மாறுவதனால் ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி இத்தகைய ஆராய்ச்சி மிகமிகச் சிக்கலானது. ஆனால் எல்லா a_{ij}-க்களும் நிலை எண்களானால், அதாவதுமுதற்கண் தோராயத்தில் தொகுதி நிலையானால் (4.16)-ல் உள்ள தொகுதியின் தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்வதில் அடிப்படைச் சிக்கல் ஏதும் தென்படாது. (பக்கம் 251 பார்க்கவும்.)

தேற்றம் 4·4 : (4 15)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதி முதற்கண் தோராயத்திற்கு நிலையானால் R_iல் உள்ள எல்லா

உறுப்புக்களும் $t > T \geqslant t_0$ எனும் இடைவெளியில் மூலப்புள்ளியின் போதுமான அளவு சிறு அணிமையில் $|R_i| < N \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$ எனும் சமனின்மைக்கிணங்கியனவாக இருக்கும். இந்த N, α என்பவை $\alpha > 0$ எனும்படி நிலை எண்கள் (ie, k_i, t-ஐச் சார்ந்தது அல்லவானுல் அவற்றின் தரம் $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2)}$ ஐச் சார்ந்தது முதற் படிக் கதிகமானது). அன்றியும்,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(4.17)$$

எனும் தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டு மூலங்கள் எதிரெண் மெய்ப் பகுதிகளுடையவையானுல், (4·15)-ன் சாரமற்ற தீர்வுகள் $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2 \dots n)$, (4·16)-ன் தீர்வுகள் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையவை. இந்த இடத்தில் முதற்கண் தோராய அடிப்படையில் உறுதிப்பாடு ஆய்வு காண்பது முறையே.

தேற்றம் 4·5 (4·15)-ன் தொகுதிச் சமன்பாடுகள் முதற்கண் தோராயத்திற்கு நிலையானுல், R_i எனும் எல்லாச் சார்புகளும் மேற் சொன்ன தேற்றத்தின் எல்ல நியதிகட்கும் அடங்கும். அல்லாமலும் (4·17) ஆகிய தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் குறைந்தது ஒரு மூலத்தின் மெயப்பகுதி தோரண்ணுனுல் (4·15)-ல் உள்ள சமன் பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகள் (4·16)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகளும் ஆகிய சமநிலைப் புள்ளிகள் $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ உறுதிப்பாடு இல்லாதவை. அதன் விளைவாக இந்த இடத்திலும் முதற்கண் தோராய அடிப்படையில் உறுதிப் பாடு ஆய்வு காணவும் தகும்.

தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மேல் சுமத்தப் படும் நியதிகளைப் பொருத்தவரை தேற்றம் 4·4, 4·5 மிகவும் அரிய வகை (Critical case) என்பதை மட்டும் தழுவவில்லை. மூலங்களின் எல்லா மெய்யெண் பகுதிகள் நேரண்ணுகவில்லா தவை; ஒரு மூலத்தின் மெய்யெண் பகுதி பூச்சியமாகும்.

அரிய வகையில் ஒருபடித்தானதல்லாத R_i-ன் உறுப்புக்கள் (4·15)-ன் தொகுதியின் சாரமற்ற தீர்வின் உறுதிப்பாட்டைப் பாதிக்கின்றன. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து முதற்கண் தோராய அடிப்படையில் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்தல் இயலாது.

தேற்றம் 4·4, 4·5-ன் நிருபணம் மால்கின் அவர்களது நூலில் [2] காணப்படும். நிருபணத்தின் தன்மை என்ன என்பதை ஓரளவு காட்ட தன்மைகாட்டும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் வெவ்வேருகவும் மெய்யெண்களாகவும் உள்ளன எனக் கொண்டு கீழ்வருமாறு நிறுவுவோம்.

அதாவது,

$k_i < 0 \ (i = 1, 2, \dots n) \ k_i \neq k_j \ i \neq j$ என்ருல்,

வெக்டர் குறியீட்டில் (4·15), (4·16)-ல் உள்ள தொகுதி,

$$\frac{dX}{dt} = AX + R \qquad \dots \quad (4\cdot15_1)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad \dots \quad (4\cdot16_1)$$

இங்கு,

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\| \quad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \quad R = \left\| \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n \end{matrix} \right\|.$$

$X = BY$ எனும் நிலை எண்குணங்களுடன் கூடிய சிதையாத ஒருபடித்தான உருமாற்றம் செய்யவும்.

இங்கு,

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & \dots & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots & b_{nn} \end{matrix} \right\|, y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{matrix} \right\|.$$

$(4\cdot16_1)$ ஆனது,

$\dfrac{BdY}{dt} = ABY$ அல்லது,

$\dfrac{dy}{dt} = B^{-1} ABY$ என மாறுகிறது.

B எனும் அணியை $B^{-1}AB$ எனும் அணி மூலை அணியாக இருக்குமாறு கொள்ளவும்.

$$B^{-1}AB = \begin{Vmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{Vmatrix}$$

அப்போது (4·16)-ல் உள்ள தொகுதி.

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

(4·15)-ன் தொகுதி, அதே மாற்றத்தில்,

$$\frac{dy_i}{dt} = k_i y_i + \overline{R_i}(t, y_1, y_2, \dots y_n) \quad (i = 1, 2, \dots n) \qquad \dots (4\cdot18)$$

என மாறுகிறது. இங்கு,

$$|\overline{R_i}| < N \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

N என்பது நிலை எண் $\alpha > 0$, $t > T$.

(4.18)-ல் உள்ள தொகுதியைச் சார்ந்த முறைகளுக்குத் தேற்ற நியதிகட்குட்பட்ட லியபுனுவுச் சமன்பாடுகள்.

$$v = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

ஏன் (1) $v(y_1, y_2, \dots y_n) > 0$, $v(0, 0, \dots 0) = 0$.

(2) $$\frac{dv}{dt} = 2 \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{dy_i}{dt} = 2 \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} k_i y_i R_i$$

$$< \sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2 < 0.$$

இவை போதுமான அளவு y_i-ன் சிறு மதிப்புக்கு. ஏனெனில் எல்லா $R_i < 0$ இரட்டைத் தொகை $2 \sum_{i=1}^{n} R_i y_i k_i$ போதுமான அளவு y_i-ன் சிறு மதிப்புக்களுக்கு தனி மதிப்பால் $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2$ எனும் கூடுதலைவிடக் குறைவாக்க முடியும்.

முடிவாக மூலப் புள்ளியின் அணிமைக்கு வெளியே

$$\frac{dv}{dt} < -\beta < 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4.19)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் $x = 0$, $y=0$ உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

ஒருபடித்தானதல்லாத உறுப்புக்கள் தேற்றங்கள் 4.4, 4.5 கூறும் உறுதிப்பாடு நியதிகட்குட்பட்டவை. முதற்கண் தோராய சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4.20)$$

இவற்றின் சமநிலைப் புள்ளி $x = 0, y = 0$.

தன்மைகாட்டும் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$

இதன் மூலங்கள் $k_{1,2} = 1 \pm i$ ஆகவே 4·5–ன் தேற்றத்தால் (4·19), (4·20)-ன் சமநிலைப் புள்ளிகள் உறுதிப்பாடு இல்லாதவை.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 8 \sin y \\ \frac{dy}{dt} &= 2 - e^x - 3y - \cos y \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (4{\cdot}21)$$

$\sin y$, e^x, $\cos y$ இவற்றை டெயிலர் சூத்திரத்தால் விரிவுகண்டு வதாகுதியை எழுதுவோம்,

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + R_1$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y + R_2$$

இங்கு R_1, R_2 என்பவை தேற்றம் 4·4, 4·5 இவற்றின் நியதிகட்குட்பட்டவை,

முதற்கண் தோராயச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + R_1, \frac{dy}{dt} = -x - 3y + R_2 \quad \dots \quad (4{\cdot}22)$$

இதன் தன்மைகாட்டும் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

இதன் மூலங்களின் மெய்யெண் பகுதி எதிரெண்ணாகும், ஆகவே (4·21), (4·22) இவற்றில் உள்ள தொகுதியின் சமநிலைப்புள்ளி $x = 0, y = 0$ சுற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையவை.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y^3. \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (4{\cdot}23)$$

இந்தத் தொகுதியின் சமநிலைப் புள்ளி $x = 0$, $y = 0$ன் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

முதற்கண் தோராய சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தன்மை காட்டும் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} -k & -4 \\ 3 & -k \end{vmatrix} = 0.$$ இதன் மூலங்கள்

முற்றும் கற்பனை எண்கள். இது அரிய வகையைச் சார்ந்தது,

முதற்கண் தோராய முறை இங்கு இயலாது. இந்த இடத்தில் லியபுனுவுச் சார்பலன்,

$$v = 3x^2 + 4y^2$$ எனக்

கொள்வது எளிது.

(1) $v(x, y) > 0,\ v(0, 0) = 0$

(2) $$\frac{dv}{dt} = 6x(-4y - x^3) + 8y(3x - y^3) = -(6x^4 + 8y^4) < 0.$$

மூலப்புள்ளியின் ஒரு குறிப்பிட்ட அண்மைக்கு வெளியே $\frac{dv}{dt} < -\beta < 0$, என்பதைக் கவனிக்கவும். ஆகவே முன் பிரிவில் உள்ள தேற்றத்தால் $x = 0, y = 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது.

இந்த எடுத்துக்காட்டை இன்னும் விரிவாக ஆராய்வோம். இந்தத் தொகுதியின் முதற்கண் தோராயச் சமன்பாடுகள்.

$$\frac{dx}{dt} = -4y,\ \frac{dy}{dt} = 3x \qquad \ldots \quad (4{\cdot}24)$$

என்பது மூலப்புள்ளியில் மையத்தை உடையது.

(4·23)-ன் தொகுதியின் ஒரு படித்தானதல்லாத உறுப்புக்கள் இந்த மையத்தை உறுதிப்பாடுடைய குவியப் புள்ளியாக மாற்றுகிறது.

பொதுவகையும் இதேபோன்று, ஆனால் இன்னும் சிக்கலான வரைபட அமைப்பைக் காட்டுகிறது.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + R_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + R_2(x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \quad ..(4{\cdot}25)$$

எனும் தொகுதியின் முதற்கண் தோராயம் மூலப் புள்ளியில் மையம் போன்ற சமநிலைப் புள்ளியை உடையதாகுக. பக்கம் 269,70 கூறியது போன்று ஒரு படித்தானதல்லாத உறுப்புக்கள் $R_1(x_1, x_2)$, $R_2(x_1, x_2)$ $(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$-ஐச் சார்ந்து முதற் படியைவிட அதிகமாகுக. இந்த ஒரு படித்தானதல்லாத உறுப்புக்களை ஒருபடித்தான உறுப்புக்களுடன் ஒப்பிட்டால் மூலப்புள்ளியின் மிகச் சிறிய அண்மையில் நுண்ணியவையாகும். இருந்தாலும்

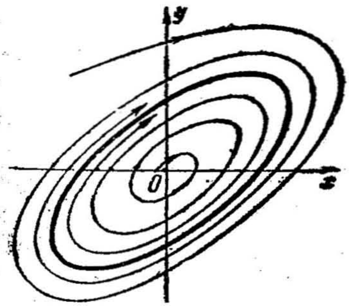
மூதற்கண் தோராய ஒரு படித்தான தொகுதியில் வரையறுக்கப் பட்ட களத்தின் திசையைச் சற்றே கோணலாகக் காட்டுகிறது. இந்தக் காரணத்தால் (x_0, y_0) எனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து துவங்கும் இயக்கப் பாதை (மூலப்புள்ளியைச் சுற்றிவந்ததும்), அதேபுள்ளி வழி உள்ளஒரு படித்தான சமன்பாட்டு இயக்கப் பாதையிலிருந்து மாறுபடுகிறது. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து (x_0, y_0)க்கு மீண்டும்வராது .இந்த இயக்கப்பாதை மூடுவரையல்ல.

மூலப்புள்ளியைச் சுற்றிவந்ததும் எல்லா இயக்கப் பாதைகளும் மூலப் புள்ளியை அணுகினால் மூலப்புள்ளியில் உறுதிப்பாடு உடைய குவியப் புள்ளி தோன்றுகிறது. ஆனால் மூலப்புள்ளியை விட்டு அகன்று சென்றால் உறுதிப்பாடில்லாத ஒரு குவியப்புள்ளி மூலப் புள்ளியில் ஏற்படுகிறது.

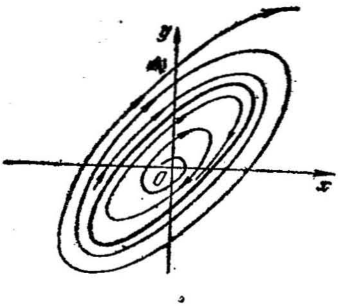
ஒரு விதிவிலக்கான வகையும் ஏற்படலாம். இதில் மூலப் புள்ளியின் அணிமையில் நிலைபெற்றுள்ள இயக்கப் பாதைகள் மூடுவரைகளாகலாம். மிகவும் காணப்படும் வகையில் ஒருசில (அல்லது ஒன்றுமே இல்லாத) வரைகள் மூடுவரைகளாகவும் மற்றவை சுருள் வரைகளாகவும் மாறுகின்றன.

இத்தகைய மூடு இயக்கப் பாதைகள் — அதாவது அவற்றின் அணிமையில் இயக்கப் பாதைகள் சுருள்வரைகளோ அவை— எல்லைத் திரும்பு சுருள்கள் (limit cycles) எனப்படும்.

இயக்கப்பாதைகள், $t \to \infty$ ஆகும்போது, எல்லைத் திரும்புச் சுருளுக்கு அருகில் இருக்கும் சுருள்வரைகளாக அதனை அணுகுவ



படம்-4 14.



படம் 4-15.

தானால், உறுதிப்பாடுடையவை எனப்படும் (படம் 4.14). திரும்பு சுருளுக்கு அணிமையில் உள்ள சுருள்வரைகள் $t \to \infty$ ஆகும்

போது திரும்பு சுருள்வரையைவிட்டு $t \to \infty$ ஆகும்போது நீங்கினால் உறுதிப்பாடற்றது எனப்படும். $t \to \infty$ ஆகும்போது திரும்புச் சுருளை ஒருபுறமிருந்து அணுகவும், மறுபுறம் அகலவும் செய்தால் பாதி உறுதிப்பாடுடையது எனப்படும். (படம் 4.15)

இவ்வாறு (4.16)-ல் உள்ள முதற்கண் தோராயத்திலிருந்து (4.25) எனும் தொகுதிக்குள்ள மாற்றம் பொதுவாக கூறுமிடத்து மையத்தை P ($P = 0$ என்பதுவும் உட்பட்டது) திரும்புச் சுருள் சூழ்ந்த குவியப் புள்ளியாக மாற்றுகிறது.

186 — 187 பக்கங்களில்

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \mu) \qquad \ldots \quad (4.26)$$

எனும் தனி ஒருபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் திரும்புச் சார்புத் தீர்வுகளை ஆராயும்போது இத்தகைய வகையைக் கண்டோம். (4.26)-ன் தொகுதிக்குப் பதிலாக, அதற்குத் துல்லியமான தொகுதி

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -a^2 x + \mu f(x, y, \mu) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (4 \cdot 27)$$

என்பதைக் காண்கிறோம்.

இதற்கேற்ற ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி.

$\dot{x} = y, \dot{y} = -a^2 x$ மூலப்புள்ளியில் மைய வகையுடைய சமநிலைப் புள்ளியையுடையது. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து மிகச் சிறிய (μவின் சிறு மதிப்புக்கு) ஒருபடித்தானதல்லாத உறுப்புக்களைச் சேர்ப்பது மையத்தை, பல எல்லைச் சுருள்கள் சூழ்ந்த குவியப் புள்ளியாக மாற்றுகிறது. இவற்றின் ஆரங்கள் பக்கம் 188ல் உள்ள (2.128)ல் உள்ள சமன்பாட்டால் அறியலாம்.

(4-25)க்கும் (4.27)க்கும் உள்ள வகைகளின் வித்தியாசம் R_1, R_2 எனும் உறுப்புக்கள் மூலப்புள்ளிக்குப் போதுமான அளவு அணிமையில் சிறியவை ஆனால் (4.27)-ல் மூலப்புள்ளிக் கணிமையில் மட்டுமல்ல, μவின்போதுமான சிறு மதிப்புக்களுக்கும் $\mu f(x, y, \mu)$ சிறியதாக்க முடியும். (பக்கம் 188-ல்) 2வது உதாரணத்தில μவின் சிறு மதிப்புக்களுக்கு, மூலப் புள்ளியை மையமாகவுடைய 6 அலகு வட்ட அண்மையில் ஒரு எல்லைச் சுருள் தோற்றுகிறது. இந்த வட்டம் ஆக்கும் சமன்பாட்டின் இயக்கப் பாதையாகும்.

பயன்படு வகைகளில் உறுதிப்பாடுடைய சுருள்கள் தனி அசைவு முறைகளுக்கு ஒத்திருக்கும். அதாவது அலைவெண்ணையும் வீச்சையும் மாற்றாத சிறு சலனங்கள் வரும் அலைவு வகைகளுக்கு ஒத்ததாக இருக்கும்.

5. பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களின் எதிரெண்மெய் பகுதியுடையவாக இருக்க அறிகுறிகள்

(Criteria of Negativity of the real parts of all roots of a polynomial)

சென்ற பிரிவில், பரவலாகப் பலவகை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் சாரமற்ற தீர்வுகளின் உறுதிப்பாடுகள் காண்பது தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மெய்ப்பகுதிகளின் குறிகளை ஆராய்வதற்கு ஒடுக்கப்பட்டது.

தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின்படி மிக அதிகமானால் தீர்வு காண்பது சிக்கலாகிறது. ஆகவே (தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணாமலே) மூலங்களின் மெய்ப்பகுதி எதிரா நேரா எனக் காணும் முறை மிகவும் முக்கியத்வம் வாய்ந்ததாகிறது.

தேற்றம் 4.6 (உர்விட்சுத் தேற்றம் Hurwitz's theorem)* மெய்க் குணகங்கள் கொண்ட $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots a_{n-1} z + a_n$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவை கொண்ட சமன்பாட்டின் மூல மெய்ப் பகுதி ; எதிராக இருக்கத் தேவையானதும், போதுமானதுவுமான நியதி உர்விட்சு அணியின் முக்கிய மூலை உறுப்புக்களின் சிற்றணி நேராக இருப்பதாகும்:

உர்விட்சு அணியாவது

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & 0 & \ldots & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & 0 \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}$$

முக்கிய மூலை உறுப்புக்கள் பல்லுறுப்புக் கோவையின் a_1 லிருந்து a_n வரையுள்ள குணகங்களாகும். கலங்கள் ஒன்று விட்டு ஒன்று ஒற்றை அல்லது இரட்டைக் குறிகள் உள்ள எண் குணகங்களையுடையது. ஆகவே அரை உறுப்பு $b_{ik} = a_{2i-k}$-மற்ற எல்லா காலி இடங்கள் உள்ள குணகங்கள் (அதாவது 0-க்கு குறைவும் n-க்கு அதிகமானதுமான குணகங்கள்) பூச்சியங்களாகும்.

---

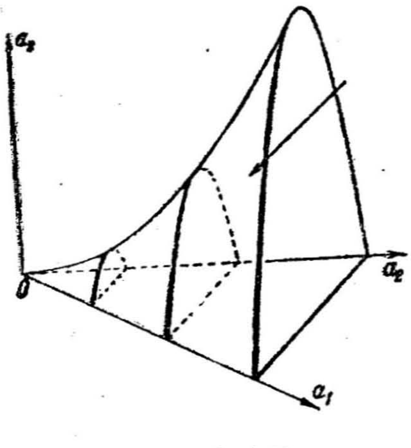
*ஹர்விட்ஸ் தேற்ற நிரூபணம் காண உயர் இயல் கணித நூல்களைப் பார்க்கவும். உயர் இயல் கணிதம்—A. குர்ராஷ் எழுதியது பார்க்கவும்.)

உர்விஸ் அணி முக்கிய மூல உறுப்புக்களின் சிற்றணிகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு குறிக்கவும்.

$$\Delta_1 = |a_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

$$\ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix}$$

$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$ ஆனதால் $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Delta_3 > 0, \ldots \Delta_n > 0$ எனும் உர்விஸ் நியதிக்குப் பதில் $a_n > 0$* எனக்கொள்ளலாம்.



படம் 4–16.

உர்விஸ் நியதியை இரண்டு மூன்று நான்குபடிப் புல்லுறுப்புக் கோவைக்குப் பயன்படுத்துவோம்.

(a) $z^2 + a_1 z + a_2$

உர்விஸ் நியதி $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ எனவாகிறது.

---

*கீழ் வருவது கவனிக்கவும் உர்விஸ் நியதி எல்லா $a_i < 0$ என்பதிலிருந்து மெய்யகுதிஎதிராக, எல்லாக் குணகங்களும் நேராக மட்டும் இருந்தால் போதாது.

a_1, a_2 என்ற வெளியில் இவை முதல் கால் டீயைத் தருகிறது. (படம் 4.16). $z^2 + a_1 z + a_2$ என்பது தேற்றம் 4.1-ன் தன்மை காட்டும் பல்லுறுப்புக் கோவையானுல் அது பொருந்தும் சமன்பாட்டுச் சாரமற்ற தீர்வுகளின் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு பொருந்தும் வெளியைப் படம் (4.16) விளக்குகிறது.

(b) $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$,

ஊர்விஸ் நியதிகள் $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$, இது பொருந்தும் தலத்தை படம் (4.17) காட்டுகிறது.

(c) $z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$.

இங்கு ஊர்விஸ் நியதி

$a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0 \; a_4 > 0$ ஊர்விஸ் நியதிகள் மிகவும் சவுகர்யமானவை. நாம் எடுத்துக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு சீக்கிரம் சரிபார்க்க முடியும். ஆனுல் பல்லுறுப்புக் கோவையின்படி உயரும்போது சிக்கலாகிறது. அப்போது மெய்யெண் பகுதி எதிரா எனக் காண வேறு முறைகள் பயன்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3 \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 \quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3,$$

இந்தத் தொகுதியின் சாரமற்றத் தீர்வு $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ அந்த αவின் மதிப்புக்கு ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது.

தன்மை காட்டும் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ \alpha & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \text{ அல்லது } k^3 + k^2 - \alpha k + 6 = 0$$

ஊர்விஸ் நியதிப்படி $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$ என ஆனுல் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு உள்ளது. இங்குள்ள கணக்கில், நியதி $-\alpha - 6 > 0$ ஆகும்.

ஆகவே $\alpha > -6$.

6. உயர் வரிசை வகைக்கெழுவின் இரு குணக வகை

(The case of a small coefficient of a higher order derivative)

துணை அலகைத் தொடர்ந்து சார்புடைய தீர்வுத் தேற்றம் கூறுவது (பக்கம் 58-59 பார்க்கவும்). $x(t) = f(t \; x(t), \mu)$

எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு μ எனும் அலகுடன் தொடர் சார்பு பெற t, x, μ எனும் ராசிகளின் மூடு இடைவெளியில் இந்த ராசிகளைப் பற்றிய வரை 'f' எனும் சார்பலன் தொடர்ச்சியுடையதாக வேண்டும். x-ஐப் பொருத்து,

$$| f(t, \bar{x}, \mu) - f(t, x, \mu) | < N (\bar{x} - x)$$

என லீப்சிச் நியதிக்குட்பட்டதாக வேண்டும். இங்கு N, எனும் எண் t, x, μ-வைச் சார்ந்ததல்ல.

இயற்பியல், பொறியியல் பிரச்சினைகள் இத்தேற்ற நியதிக்குட்பட்டதாகும். ஆனால் ஓரிடத்தில் துணையலகின் வலப்பக்கத்தில் தொடர்பற்ற சார்பு அடிக்கடி சில பயன்படு இடங்களில் வருகின்றன. இத்தகைய வகையை இப் பிரிவில் ஆராய்வோம்.

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad \ldots \quad (4{\cdot}28)$$

எனும் சமன்பாட்டில் μ மிகச் சிறிய அலகு. பிரச்சினை என்னவெனில் $|\mu|$-ன் சிறு மதிப்புக்களுக்கு $\mu \dfrac{dx}{dt}$ என்பதை எடுக்காமலே விடலாமா என்பதாம். அதாவது, $\mu \dfrac{dx}{dt} f(t, x)$ என்பதன் தீர்விக்குப் பதிலாகத் தோராயமாகச் சிதைந்த சமன்பாடு

$$f(t, x) = 0 \qquad \ldots \quad (4{\cdot}29)$$

என்பதைக் கொள்ளலாமா என்பதாம். துணை அலகைத் தொடர்ந்து சார்ந்து நிற்பதைப் பற்றிய தேற்றத்தை இங்கு பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில்,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x), \qquad \ldots \quad (4{\cdot}28_1)\text{-ன்}$$

வலப்பக்கத்தின் தொடர்ச்சி $\mu = 0$ எனும்போது, அறுபடுகிறது.

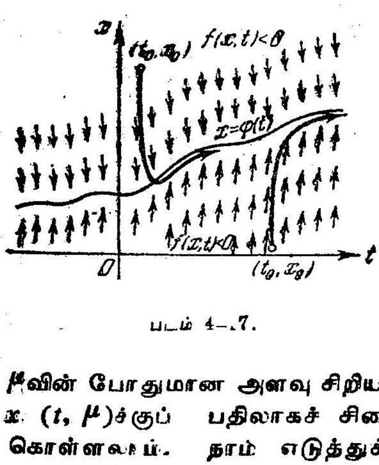
இப்பொழுதுக்கு, எளிதாக்க வேண்டி சிதைந்த சமன்பாடு (4·29) $x = \varphi(t)$ எனும் ஒரே தீர்வை உடையதெனக் கொள்வோம். திட்டமாகக் கூறவேண்டி $\mu > 0$ எனக் கொள்வோம். μ எனும் துணையலகு பூச்சியத்தை அணுகும்போது $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\mu} f(t, x)$ என்பதன் தீர்வாகிய $\dfrac{dx}{dt}$, $f(t,x) \neq 0$ இல்லாத ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் எல்லையின்றித் தனி மதிப்பில் அதிகரிக்கிறது. அதன் குறி, $f(t, x)$-ன் குறியாகிறது. ஆகவே $f(t, x) \neq 0$ எனும் புள்ளிகளில் எல்லாம் தீர்வு வரையின் தொடு

கோடுகளின் திசைகள் $\mu \to 0$ ஆகும்போது, x அச்சுக்கு இணையான திசைக்கு நெருங்குகிறது. அத்துடன் $f(t, \mu) > 0$ என்றால், $(4 \cdot 28_1)$ தீர்வாகிய $x(t, \mu)$, t அதிகரிக்க அதுவும் அதிகரிக்கிறது. ஏனெனில், $\frac{dx}{dt} < 0$ அல்லாமலும் $f(t, x) < 0$ என்றால் t அதிகரிக்கும்போது $\frac{dx}{dt} < 0$, ஆனதால் தீர்வு $x(t, \mu)$ குறைகிறது.

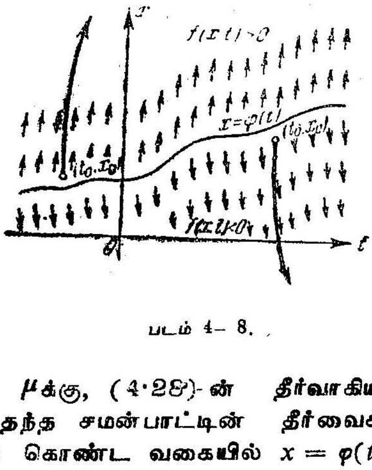
படம் 4·18-ல் காட்டப்பட்டுள்ள வகை (a)-ஐப் பார்ப்போம். இங்கு (x அதிகரிக்க, t நிலையாக இருக்க) $f(t, x)$-இன் குறி சிதைந்த சமன்பாடு $x = \varphi(t)$-ன் தீர்வு வரையைக் கடக்கும் போது + லிருந்து − ஆக மாறுகிறது.

அம்புக் குறிகள் μ-வின் போதுமான சிறு மதிப்புகளுக்குத் தீர்வு வரைகளின் தொடுகோட்டுத் திசையைக் குறிக்கின்றன. சிதைந்த சமன்பாட்டின் மூல வரையின் திசையில் தொடு கோட்டுத் தளத்தின் திசை அமைகிறது.

துவக்க மதிப்பு $x_0(t_0) = x$ ஏதாயினும் சரி, இவை நிச்சயிக்கும் தீர்வு வரைகள் x அச்சுக்கு ஏறக்குறைய இணையாக அமைவதுடன் சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வரையாகின்றன. அத்துடன் t அதிகரிக்க இந்த வரையின் அணிமையினின்றும் நீங்கா. ஆகவே இந்த வகையில் $t > t_1 > t_0$ எனத் தரப்பட்டால்,



படம் 4–17.

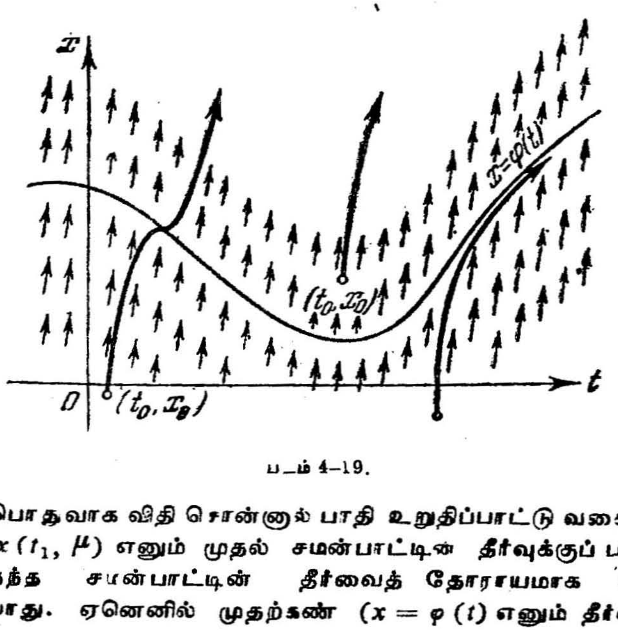


படம் 4–18.

μவின் போதுமான அளவு சிறிய μக்கு, $(4 \cdot 28)$-ன் தீர்வாகிய $x(t, \mu)$ச்குப் பதிலாகச் சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வைக் கொள்ளலாம். நாம் எடுத்துக் கொண்ட வகையில் $x = \varphi(t)$ எனும் தீர்வு உறுதிப்பாடுடையது.

வகை (b)ஐ ஆராய்வோம். x அதிகரிக்க, t நிலையாக இருக்க, $f(t_1, x)$ எனும் சார்பலன் $x = \varphi(t)$ எனும் சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வரையைக் கடக்கும்போது. அதன் குறி − லிருந்து + ஆக மாறுகிறது. (படம் 4·19)ல் μவின் போதுமான அளவு சிறிய மதிப்புகளுக்குத் தீர்வு வரைகளின் தொடு கோட்டுத் திசைக் களம் காட்டப்பட்டுள்ளது, இந்த வகையில் $f(t, x_0) \neq 0$ எனும்படித் துவக்க மதிப்பு $x(t_0) = x_0$ என்பது ஏதாயினும் சரி (μவின் சிறு மதிப்புகளுக்கு) இந்தத் துவக்க மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட தீர்வு வரைகளின் தொடுகோடு x அச்சுக்கு ஏறக்குறைய இணையாகவும் (4·29)ன் தீர்வுவரையாகிய $x = \mu(t)$ லிருந்து அகல்வதாகவும் ஆகிறது. வேறுவிதமாகச் சொன்னால் $\mu \dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ ல் μ எத்தனை சிறியதாயினும் $\mu \dfrac{dx}{dt}$ என்பதனைப் புறக்கணிக்க முடியாது.

பாதி உறுதிப்பாடுடைய வகையென மூன்றாவது ஒன்று உள்ளது. சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வரையை $f(t_1, x)$ கடக்கும்போது அதன் குறி மாறுவதில்லை. (படம் 4·20)ல் $x = \varphi(t)$ எனும் பாதி உறுதிப்பாட்டின் வகைத் திசைக்களம் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 4–19.

பொதுவாக விதி சொன்னால் பாதி உறுதிப்பாட்டு வகையிலும் $x = x(t_1, \mu)$ எனும் முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வுக்குப் பதிலாக சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வைத் தோராயமாக எடுக்க முடியாது. ஏனெனில் முதற்கண் ($x = \varphi(t)$ எனும் தீர்வுவரை

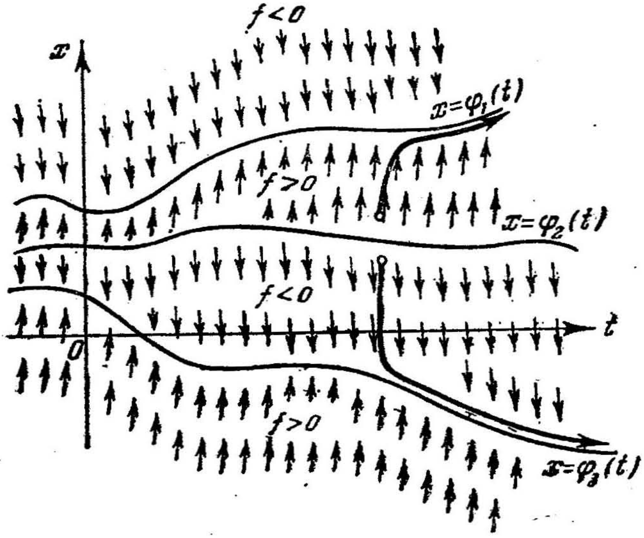
படத்தின் ஒரு பக்கம் அமையும் தீர்வு வரைகளை வரை படத்தி லிருந்து அகல்கின்றன. இரண்டாவதாக $x = \varphi(t)$ எனும் வரை படத்தை அணுகும் தீர்வுவரைகள், உறுதிப்பாடில்லாத பக்கத் திற்கு அதனைக் கடந்து $x = \varphi(t)$ எனும் தீர்வு வரை படத்தி னின்றும் நீங்குகின்றன. முடிவாக, $x = x(t, \mu)$ எனும் தீர்வு வரைகள் தீர்வுவரை படத்தின் அணிமையில் இருந்தாலும் தவிர்க்க முடியாது அசைவுகள் நடைமுறை பிரச்சினைகளில் நேரிடுகின்றன. அவை $x = x(t, \mu)$ எனும் வரையை சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வரையின் உறுதிப்பாடில்லாத பக்கத்திற்குத் தள்ளுகிறது. அதன் பிறகு $x = x(t, \mu)$ எனும் வரை $x = \varphi(t)$ லிருந்து அகல்கிறது.

கீழ் வருவதைக் கவனிக்கவும்.

சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வரைப் படத்தில் $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, என்றால் $x = \varphi(t)$ என்பது திட்டமாக உறுதிப்பாடுடைய தீர்வு ஆகும். ஆனால், $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ என்றால் $x = \varphi(t)$ எனும் தீர்வு உறுதிப்பாடில்லாதது. ஏனெனில் $x = \varphi(t)$-ன் அணிமையில் முதல் வகையில் x அதிகரிக்க, f எனும் சார்பலன் குறைகிறது. ஆகவே குறி $+$ லிருந்து $-$ ஆக மாறுகிறது. ஆனால் இரண் டாவது வகையில் x உடன் சார்பலன் f-ம் அதிகரிக்கிறது. ஆகவே f எனும் சார்பலன், $x = \varphi(t)$-ன் வரைபடத்தைக் கடக்கும்போது $-$ லிருந்து $+$ ஆகிறது

சிதைந்த சமன்பாடு $x = \varphi_i(t)$ எனப் பல தீர்வுகளையுடைய தானால், ஒவ்வொன்றையும் உறுதிப்பாட்டுக்கு ஆராயவேண்டும். துவக்க மதிப்பைப் பொருத்து, $\mu \to 0$ ஆகும்போது முதல் சமன் பாட்டின் தீர்வு வரைகள் அமைகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, (படம் 4·21)-ல் சிதைந்த சமன்பாடு $x = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ என மூன்று தீர்வுகளையுடையது. இவற்றின் வரைபடங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதில்லை. $t > t_0$ எனும்போது $\mu \to 0$ ஆகும்போது, $\mu > 0$, $x = \varphi(x, \mu)$ எனும் முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = \varphi_2(t)$ எனும் வரைக்கு மேல் உள்ள துவக்கப் புள்ளி களால் வரையறுக்கப்பட்டது உறுதிப்பாடு வாய்ந்த $x = \varphi_2(t)$ எனும் சிதைந்த சமன்பாட்டின் உறுதிப்பாடு வாய்ந்த தீர்வை அணுகுகிறது. ஆனால் $x\,\varphi_2(t)$ எனும் வரைக்குக் கீழே உள்ள புள்ளிகளால் துவக்க மதிப்புக்கள் அறுதியிட்ட $x = x(t, \mu)$ எனும் தீர்வு $t > t_0$ எனும்போது $\mu \to 0$ என்றால்

$x = \varphi_3(t)$ எனும் உறுதிப்பாடு வாய்ந்த சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வை அணுகுகிறது.



படம் 4–21,

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x(t_0) = x_0$ எனும் துவக்க மதிப்புடைய,

$$\mu \frac{dx}{dt} = x - t, \ \mu > 0.$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு, $\mu \to 0 \; t > t_0$ எனும்போது சிதைந்த சமன்பாடு $x - t = 0$ என்பதன் தீர்வை அணுகுகிறதா என ஆராயவும்.

$x = x(t, \mu)$ எனும் தீர்வு சிதைந்த சமன்பாட்டுத் தீர்வாகிய $x = t$-ஐ அணுகுவதில்லை. ஏனெனில்,

$$\frac{\partial (x - t)}{\partial x} = 1 > 0 \ \ (\text{படம் } 4{\cdot}22)$$

ஆனதால் சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு உறுதிப்பாடற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

முன்கூறியது போலவே சமன்பாடு

$$\mu \frac{dx}{dt} = \sin^2 t - 3e^x, \text{ ஆராயவும்.}$$

சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$x = 2\, l_n\, |\sin t| - l_n 3$$

இங்கு $\dfrac{\partial(\sin^2 t - 3e^x)}{\partial x} = -3e^x < 0$

ஆகவே தீர்வு உறுதிப்பாடுடையது. ஆகவே $x = x(t, \mu)$ எனும் முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு $t > t_0$, $\mu \to 0$ எனும்போது சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வை அணுகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\mu \frac{dx}{dt} = x(t^2 - x + 1),\ \mu > 0,\ x(t_0) = x_0.$$

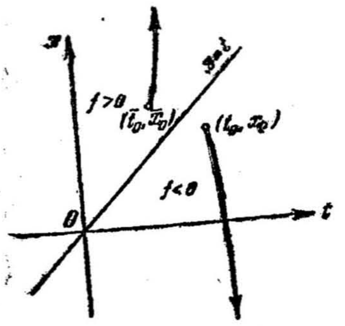
என்பதற்கும் முன் கூறியது போன்று ஆராயவும். சிதைந்த சமன்பாடு $x(t^2 - x + 1) = 0$. இதன் மூலங்கள் $x = 0$, $x = t^2 + 1$. இவற்றுள் முதல் தீர்வு உறுதிப்பாடற்றது. ஏனெனில்

$$\left.\frac{\partial\, x(t^2 - x + 1)}{\partial x}\right|_{x=0} = t^2 + 1 > 0.$$

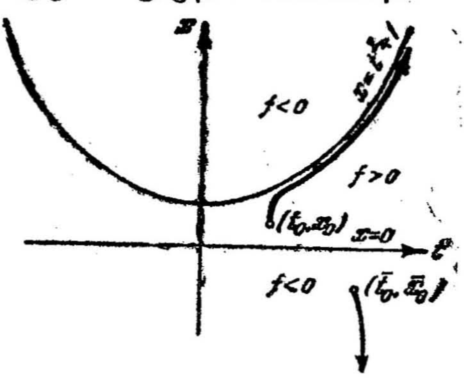
இரண்டாவது உறுதிப் பாடுடையது ஏனெனில்

$$\left.\frac{\partial\, x(t^2 - x + 1)}{\partial x}\right|_{x=t^2+1} = -t^2 - 1 < 0.$$

துவக்கமதிப்பு (t_0, x_0) என்பது $x > 0$ எனும் மேல் அரைத் தளத்தில் இருந்தால், $\mu \to 0$ ஆகும்போது முதல் சமன்பாட்டின்



படம் 4–22.



படம் 4–23.

தீர்வுவரை $x = t^2 + 1$ எனும் சிதைந்த சமன்பாட்டின் தீர்வரைபடத்தை அணுகி, அதன் அணிமையில் இருக்கும்.

ஆனல் $x < 0$ எனும் கீழ் அரைத்தளத்தில் துவக்கப்புள்ளி அமைந்தால் $t > t_0$ எனும்போது $\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu) = -\infty$ $\mu + 0$

மிகப் பெரிய வரிசை வகைக் கெழுவின் குணமாகிய சிறிய μ வைத் தீர்வுகள் சார்ந்து நிற்கும் பிரச்சினை

$\mu\, x^{(n)}(t) = f(t, x\, \dot{x}\, \ddot{x}, \ldots x^{n-1})$ எனும் n th வரிசை சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளிலும் எழும்.

n th வரிசை சமன்பாட்டை, எப்போதும் போல, முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு (பக்கம் 101, 102 பார்க்கவும்) ஒடுக்க முடியும். ஆகவே இப்போதுள்ள பிரச்சினை முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டில் வகைக்கெழுக்களின் ஒன்றோ அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்டதோ ஆன சிறு குணகங்களை ஆராய்வதாகும். இந்தப் பிர்ச்சினை *A.* திக்கனுவு [A. Tikhonoo [4]] *A.* வாசிலாவு (A. Vasilieva) இவர்களால் விரிவாக ஆராயப்பட்டுள்ளது.

7. தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடு

(Stability under Constantly operating Perturbations).

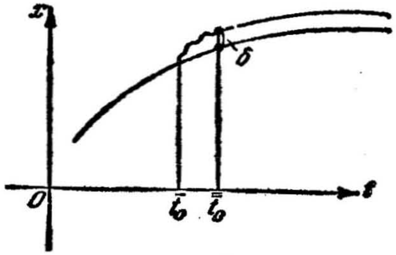
$$\frac{dt_i}{dt} = f_i(t_1, x_1, x_2, \ldots x_n)\; x_i{}'t_0) \ldots x_{i_0} \quad \ldots (4\cdot 30)$$

எனும் ஆராயப்படும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள், சிறு குறுகிய அசைவுகளுக்குட்படுத்தப்பட்டால், $\bar{t}_0 < t < \bar{\bar{t}}_0$ எனும் குறுகிய t இடைவெளியில் — (4·30) தொகுதிக்குப் பதிலாக அசைவுடைத் தொகுதியைக் கொள்ளவேண்டும். அதுகீழ் வருமாறு.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(t_1, x_1, x_2, \ldots x_n) + R_1(t, x_1, x_2 = x_n) \\ x_i(\bar{t}_0) &= \bar{x}_c(\bar{t}_0)\,(t = 1, 2, \ \ldots\ n) \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot 31)$$

இங்கு எல்லா $R_i(t, x_2, \ldots x_n)$ என்பவைகள் தனி மதிப்பில் சிறியவை. $t > \bar{t}_0$ எனும்போது அசைவுகள் நீங்குகின்றன. மீண்டும் (4·30) தொகுதிக்குத் திரும்பவேண்டும். ஆனல் துவக்க மதிப்புக்கள் கீழ்வருமாறு மாறுகின்றன. $\bar{\bar{t}}_0$ என்ற புள்ளியில் $x_i(\bar{\bar{t}}_0) = \tilde{x}(\bar{\bar{t}}_0) + \delta_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ இங்கு $\tilde{x}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ என்பன (4·30)ன் தொகுதியின் தீர்வாகும். தொடர்ந்து துணைவகைச் சாரும் தேற்றத்தால் (படம் 4·24) $|R_i|$ ன் சிறு மதிப்புகளுக்கு ∂_i-க்களும் சிறு மதிப்புக்களாகும்.

ஆகவே, குறுகியகால அசைவுகள் இறுதியில் துவக்க மதிப்புக்களின் அசைவுகளாகின்றன. கணநேர அசைவுகள் எனக் கூறப்படும் குறுகியகால அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடு, ஏற்கனவே படித்த வியபுனுவு உறுதிப்பாடாக மாறுகிறது.



படம் 4–23.

ஆனால் அசைவுகள் தொடர்ந்து செயல்பட்டால் (4·30)-ல் உள்ள தொகுதிக்குப் பதிலாக எல்லா $\geqslant t_0$-க்களுக்கும் (4·31)-ல் உள்ள தொகுதியைக் கொள்ள வேண்டும். அப்போது தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உள்ள உறுதிப்பாட்டை ஆராய்தல் எனும் புதிய பிரச்சினை உருவாகிறது,

வியபுனுவு வகையில் உறுதிப்பாட்டை, ஆராய்ந்தது போலவே, $x_i = y_i = \phi_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ என ராசி மாற்றம் செய்ய. $y_0 = \varphi_i(t)$ $(t = 1, 2, \dots n)$ எனும்

$$\frac{dy_i}{dt}\Phi_i(t_1, y_1, y_2, \dots y_n)\ i = 1, 2, \dots n).$$

எனும் தொகுதியின் தீர்வுகளை. மாற்றப்பட்ட தொகுதியின் சாரமற்ற $x_i \equiv 0$ எனும் தீர்வுகளை ஆராய்வதாக மாற்ற முடியும். ஆகையால், தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகள் இருந்தால், (4·30)-ன் சாரமற்ற தீர்வுகள் $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ இவற்றின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்வது என இனிமேல் கொள்ளலாம்.

கீழ்வரும் நியதிக்குட்பட்டிருந்தால் (4·30)-ன் தொகுதியின் சாரமற்ற தீர்வுகள் தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடுடையவை எனக் கூற முடியும்.

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும் $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ என எடுத்துக் கொள்ள முடியவேண்டும். δ_1, δ_2 எவ்வாறு இருக்கவேண்டுமென்றால்,

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1^2,\ t > t_0 \text{ எனும்போது,}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \delta_2^2 \text{ என்றால்}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i_0}^2 (t) < \epsilon_2^2,\ t > t_0)$$ எனும்போது,

இவ்வாறு இருக்கவேண்டும். இங்கு $x_i(t)\ (i = 1, 2, \ldots n)$ என்பன (4·31) தொகுதிச் சமன்பாட்டின் துவக்க மதிப்புகள் $x_i(t_0) = x_{i_0}\ (i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை தரும் தீர்வுகளாகும்.

தேற்றம் 4·7 (மால்கின் தேற்றம்) (Malkin's theorem)

$t > t_0$ எனும்போது, மூலப் புள்ளியின் அணிமையின் கீழ் வரும் நியதிக்குட்பட்ட லியபுனவு சார்பலன், (4·30)-ன் சமன் பாட்டுத் தொகுதிக்கு இருக்கட்டும்.

(1) $v(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \geq w_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq 0$. $v(t, 0, 0, \ldots 0) = 0$. மூலப்புள்ளியில் மட்டும் பூச்சியமாகும் தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன் w_1 ஆகும்.

(2) வகையீடுகள் $\dfrac{\partial v}{\partial x_s}\ (s = 1, 2, \ldots n)$ தனி மதிப்பின் எல்லைக்குட்பட்டவை.

(3) வகையீடு $$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i$$
$$< -w_2(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0.$$

இங்கு தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன் $w_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$ மூலப் புள்ளியில் மட்டும் பூச்சியமாகும். இவ்வாறெனில் (4.30)-ன் தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளுக்கேற்றச் சாரமற்ற தீர்வு உறுதிப்பாடுடையதாகும்.

நிருபணம் :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$$ எனும்போது, $t > t_0$, எனும் t-ன் மதிப்பு களுக்கு, $\dfrac{\partial O}{\partial x_s}\ (s = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை எல்லைக்குட்பட்டிருப் பதால் v எனும் சார்பலன் பூச்சியத்தைச் சீராக அணுகுகிறது என்பதைக் கவனிக்கவும். ஏனெனில் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தால்

$$v(t, x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) x_i,$$

இங்கு $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ [0, x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவற்றிற்கு இடையே] உள்ள சில மதிப்புக்களுக்கு $x_1, x_2, \ldots x_n$ ராசிகளைச் சார்ந்து கணக்கிடப்பட்டவையாகும்.

அன்றியும்,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i < k < 0,$$

R_i-ன் போதுமான அளவு சிறு மதிப்புக்களுக்கு $(k_i = 1, 2, \ldots n)$ என்பதையும் கவனிக்கவும். ஏனெனில் மூலப்புள்ளியில் δ அணிமைக்கு வெளியே (அதாவது) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \delta^2 > 0)$ $t > t_0$, எனும் போது (2)வது (3)வது நியதிகளால் இது வருகிறது.

$\epsilon > 0$ என்பதைந் திட்டப்படுத்திக் கொள்வோம். மூலப் புள்ளியின் ϵ அணிமையில் முற்றிலும் அமையும். $w_i = l$ $(l < 0)$ எனும் சமதலத்தைக் (அல்லது அதன் ஒரு பிரிவை) கொள்ளவும்.

(1)-வது நியதியால் ($t > t_0$ என ஏராசி தரப்பட) இயங்கும் சமதலம் $v(t_1, x_1, x_2, \ldots x_n) = l$, என்பது $w_l = l$ எனும் சமதலத்திற்குள் அமைகிறது. ஆனால், $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$ ஆகும்போது v எனும் சார்பலன் பூச்சியத்தைச் சீராக அணுகுவதால் $v < l$ எனும்படிப் பூச்சியத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட δ_2 அணிமைக்கு வெளியே அமைகிறது. ஆகவே இங்கு $v < l$, ஆகவே ஏதேனும் $t > t_0$ என்றால், $v(t, x_1, x_2, \ldots x_n) = l$ எனும் சமதலத்தில் வகைக்கெழு,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i < -R < 0.$$

இதற்கு $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1$ $\delta_1 > 0$ (சிறிய δ_1-க்கு) ஆகவேண்டும், $t > t_0$ எனக் கொண்ட t-ன் மதிப்புக்கு $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் துவக்க மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட மேலே குறிப்பிட்ட மூலப்புள்ளியின் δ_2 அணிமையில் அமையும் இயக்கப் பாதை மூலப்புள்ளியின் ϵ அணிமையை விட்டு நீங்கமுடியாது. ஏனெனில் δ_2 எடுத்துக்கொண்ட முறையில் $v(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}) < l$ ஆகவே, $t > t_0$-க்கு இயக்கப்பாதை மூலப்புள்ளியின்

ε அணிமையை விட்டு நீங்கினல் அல்லது குறைந்தபட்சம் $w_1 = l$ எனும் சமதலத்திற்கு அப்பால் சென்ருல், ஏதேனும் $t = T$ எனும் மதிப்புக்கு $v(t, x_1, x_2, \ldots x_n) = l$ எனும் சமதலத்தை முதன் முறையாகக் கலக்க நேரிடும். வெட்டும் புள்ளிக்கு அருகில், v எனும் சார்பலன் இயக்கப் பாதையில் அதிகரிக்க வேண்டும். ஆனல் இது $\frac{dv}{dt} < -k > = 0$ (இயக்கப் பாதையில் $v(t, x_1, x_2, \ldots x_n) = l$ (எனும் புள்ளிகளில்) எனும்நியதிக்கு முரணனது.

சுற்றணுக உறுதிப்பாட்டுக்குரிய, லியபுனுவு, மால்கின் தேற்ற நியதிகளை (பக்கம் 265-ல் குறிப்பு பார்க்கவும்) ஒப்பிடும்போது அவை ஏறக்குறைய ஒன்ருவதை நாம் பார்க்கிருேம். மால்கின் தேற்றத்தின் அதிகமான தன்மை யாதெனில் $\frac{dv}{dx_s} (s = 1, 2, \ldots n)$ எனும் வகையீடுகள் எல்லையுடையனவாகலாம். இதனல் தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடும், சுற்றணுகு உறுதிப்பாடும் ஏறக்குறைய ஒன்ருகலாம். (இரண்டும் ஒன்ருகாவிடினும்)

எடுத்துக்காட்டு 1

$$\frac{dx}{dt} = a^2 y - x^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = b^2 x - y^3.$$

a, b நிலை எண்கள். இவற்றின் சாரமற்ற தீர்வு $x = 0, y = 0$ என்பது தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடுடையதா என ஆராயவும். மால்கின் தேற்ற நியதிக்குட்பட்ட லியபுனுவுச் சார்பலன்,

$$v = b^2 x^2 + a^2 y^2.$$

ஆகவே. தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே $x = 0$, $y = 0$ எனும் சாரமற்ற தீர்வு உறுதிப்பாடுடையது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i (t, x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad \ldots (4{\cdot}82)$$

இங்கு எல்லா a_{ij}-க்களும் நிலை எண்கள். R_i லியபுனுவு தேற்ற (பக்கம் 280) நியதிக்குட்பட்டது. அதாவது, N நிலையாக $\alpha < 0$ ஆக,

$$|R_i| < N \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

தன்மைகாட்டும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் முதற்கண் தோராயத் தொகுதிக்கு, வெவ்வெறுகவும் எதிரெண்ணுகவும் அமைகின்றன. என்ருல், தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளுக்குட்பட்டு சமநிலைப் புள்ளி $x_i \equiv 0 \; (i = 1, 2, \ldots n)$ இவை உறுதிப்பாடுடையவை.

பக்கம் 272-ல், ராசி மாற்றத்தால் (4·32)-ன் ஒருபபடித்தான பாகம், திட்ட உருவத்திற்கு, மாறுபட்டது. அதனுல், $v = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ எனும் லியபுனுவுச் சார்பலன் வருகிறது. இது மால்கின் தேற்ற நியதிக்குட்பட்டது. ஆகவே $x_i = 0 \; (i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடுடையது.

தன்மை காட்டும் சமன்பாட்டின் மெய்ப்பகுதிகள் (பொருந்தும் மூலங்களும் இதனுள் அடக்கம்) எதிரெண்கள் எனக் கொண்டாலும் வரும் முடிவும் இதுவே. ஆனுல் இந்த வகையில் எடுத்துக்கொள்ளும் லியபுனுவுச் சார்பலன் இன்னும் சிக்கலானது.

அத்தியாயம் 4-ன் கீழ் உத்திக் கணக்குகள்

பயிற்சிகள்

1. $x = 0, y = 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளியின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க. தொகுதி.

$$\frac{dx}{dt} = -2x - 3y + x^3.$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y - y^2.$$

2. $x = 0, y = 0, z = 0$, எனும் கீழ்க்கண்ட தொகுதியின் சமநிலைப் புள்ளியின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க :

$$\frac{dx}{dt} = x - y - z, \frac{dy}{dt} = x + y - 3z, \frac{dz}{dt} = x - 5y - 3z.$$

3. $\frac{dx}{dt} = \alpha x - y,\ \frac{dy}{dt} = \alpha y - z,\ \frac{dz}{dt} = \alpha z - x,$ எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் சமநிலைப் புள்ளி $x = 0$, $y = 0, z = 0$, α-வின் எந்த மதிப்புக்கு உறுதிப்பாடுடையது ?

4. α-வின் எந்த மதிப்புக்கு

$$\frac{dx}{dt} = y + \alpha x - x^5,\ \frac{dy}{dt} = -x - y^5,$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் $x = 0, y = 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப்பாடுடையது ?

5. $\mu \to 0$, $t > 1$ எனும் மதிப்புகளுக்கு $\mu \to 0$ ஆகும்போது

$$\mu \frac{dx}{dt} = (x^2 + t^2 - 4)(x^2 + t^2 - 9),\ x(1) = 1.$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு எந்த எல்லையை அணுகுகிறது?

6. $\mu > 0$, $t > 2$ எனும்போது $\mu \to 0$ என்றால்,

$$\mu \frac{dx}{dt} = x - t + 5,\ x(2) = 5,$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு எந்த எல்லையை அணுகுகிறது?

7. $$\frac{dx}{dt} = x + e^y - \cos y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y - \sin y.$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் $x = 0, y = 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளியின் உறுதிப்பாடு எத்தகையது?

8. $x = 0$, $y = 0$ எனும் கீழ்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் சமநிலைப் புள்ளி தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடுடையதா என ஆராய்க.

$$\frac{dx}{dt} = -2y - x^5,\quad \frac{dy}{dt} = 5x - y^5.$$

9. $\dddot{x} + 6\ddot{x} + 2x + 20 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு $x \equiv 0$ உறுதிப்பாடுடையதா ?

10. $\dddot{x} + 5\ddot{x} + 6\dot{x} + x = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு $x \equiv 0$ உறுதிப்பாடுடையதா?

11. $\frac{dx}{dt} = x + 3y$, $\frac{dy}{dt} = 5x - y$ என்பதன் சமநிலைப் புள்ளி $x = 0, y = 0$ எத்தகையது?

12. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \sin t$ எனும் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்புத் தீர்வை கண்டு அதன் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

13. $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x = \cos t$ எனும் சமன்பாட்டின் திரும்பு சார்புத் தீர்வு உறுதிப்பாடுடையதா?

14. $\dot{x} = y^3 + x^5, \dot{y} = x^3 + y^5$ எனும் தொகுதியின் $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ எனும் சமநிலைப் புள்ளி உறுதிப்பாடுடையதா?

15. $\dot{x} = 3y - 2x + e^t$
$\dot{y} = 5x - 4y + 2$ எனும் சமன்பாட்டுத் தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

16. $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 3\dot{x} + 7 \sinh x = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் சாரமற்ற தீர்வின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

17. α எனும் துணை அலகுடைய
$\ddot{x} + (\alpha - 1)\ \dot{x} + (4 - \alpha^2)\,x = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் சாரமற்ற தீர்வின் உறுதிப்பாடு ஆராய்க.

18. $\dot{x} = 3y - x^3$, $\dot{y} = -4x - 3y^5$ எனும் சமன்பாட்டின் $x \equiv 0, y \equiv 0$ எனும் தீர்வு தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளிடையே உறுதிப்பாடுடையதா?

19. முப்பெருமாண வெளியில் $X(t)$ என்பது ஒரு வெக்டர்

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$X(t) = A\,X(t)$ எனும் சமன்பாட்டின் சாரமற்ற தீர்வின் உறுதிப்பாடு எத்தகையது?

20. $\dddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} = t$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் உறுதிப்பாட்டினை ஆராய்க.

21. $\ddot{x} + 9x = \sin t$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

22. $\ddot{x} \times x = \cos t$ என்ற சமன்பாட்டின் திரும்புச் சார்புத் தீர்வை கண்டு அதன் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

23. $\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + (1 - \alpha)\,x = 0$ என்றதன் உறுதிப்பாடு இடைவெளி என்ன?

24. $\dddot{x} + \ddot{x} + \alpha^2\,\dot{x} + 5\,\alpha x = 0$ என்பதன் உறுதிப்பாட்டிடை வெளி காண்க.

5 முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(First order partial differential equations)

1. அடிப்படை

முன்னுரையில் (பக்கம் 13) ஏற்கனவே சுட்டிக்காட்டியபடி பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தனி மாறிகள் வரும் சமன்பாடுகள் வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாகும். பல இயற்கை நிகழ்ச்சிகள் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளால் விவரிக்கப்படுகின்றன.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z),$$

எனும் சமன்பாடு சமத்தன்மை இல்லாத $n(x, y, z)$ எனும் பிறழ்ச்சிக் குணகமுடைய (Refractive index), ஊடகம் வழி ஒளிக் கதிர் பரவுவதை விவரிக்கிறது.

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, என்பது ஒரு கம்பியின் வெப்ப நிலை மாறுதலை விளக்குகிறது.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, எனும் சமன்பாடு ஒருதந்தியின் அலைவை (vibrations)த் தருகிறது.

லாப்லாசின் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

இல்லாத மண்டலங்களின் மின்னூட்ட மாறி (Charges) நிலைப் பண்பைத் தருகிறது.

இந்த அத்தியாயத்தில் முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறையைச் சுருக்கமாக விளக்குவோம். சில சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறையை ஒட்டியதே இதன் அடிப்படை.

இதினினும் உயர்ந்த வரிசைப் பகுதிவகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல் முறை வேறு ஆகும். இதனை இதே நூல் தொடரில் வேறொரு நூலில் விவரிப்போம்.

சில எளிய உத்திக் கணக்குகளை இங்கு பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = y + x.$$

x-ஐச் சார்ந்து நுண்தொகை காண

$$z(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \phi(y)$$

இங்கு $\varphi(y)$, y-ன் ஏதேனும் சார்பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\, \partial y} = 0, \text{ அல்லது}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\} = 0,$$

x-ஐச் சார்ந்து தொகை காண.

$$\frac{\partial z}{\partial y}\ \phi(y).$$

இங்கு $\phi(y)$ ஏதேனும் y-ன் சார்பலனாகும். பிறகு y-ஐச் சார்ந்து நுண்தொகை காண,

$$z = \int \varphi(y)\, dy + \varphi_1(x).$$

இங்கு $\varphi_1(x)$ ஏதேனும் x-ன் சார்பலனாகும். அல்லது,

$$\int \varphi(y)\, dy = \varphi_2(y).$$

என எழுத முடிவில் நாம் அடைவது,

$$z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y).$$

$\varphi_1(y)$-யும் $\varphi_2(y)$-யும் அவ்வாறே y ன் ஏதேனும் சார்பலன்களாகும்.

இப்போது அறிவிக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து நாம் அறிவது முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின்

பொதுத் தீர்வு. இச்சைக்கேற்ப கொள்ளும் ஒரு சார்பைத் தழுவி யது என்பதாம். இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு ஏதேனும் இரண்டு சார்பலன்களையும், nth வரிசை வகைக் கெழுச் சமன்பாடு p சார்பலன்களையும் சார்ந்து நிற்கும் எனலாம்.

இந்தக் கொள்கைகள் உண்மையே ஆயினும் அவற்றை இன்னும் திட்டமாகக் கூறவேண்டும், இவ்வாறு திட்டப்படுத்தப் பட்ட, கோவலஸ்கையா (S. Kovalevsgkaya) என்பவரின் தேற் றத்தைக் கூறுவோம். பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வின் உள்ளமை தனித்தன்மை இவை பற்றிய தேற்றமாகும். இது

தேற்றம் 5.1 கோவலெஸ்கயாவின் தேற்றம் (Kovalevskaya's Theorems) $(x_{10}, x_{20} \ldots x_{n0})$ என்ற புள்ளிக் கணிமையில் தனித் தன்மை வாய்ந்த பகுப்பாய்வுடைத் தீர்வு ஒன்று உள்ளது. இது மிக உயர்ந்த வரிசையுள்ள

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1{}^p} = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, z \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1{}^2} \cdots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1{}^{p-1}},\right.$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2{}^2} \cdots \frac{\partial^p z}{\partial x^p{}_n}\right)$$

என்பதன் தீர்வாகும். $x = x_{10}$ எனும் மதிப்புக்கு

$$z = \phi_0 (x_2, x_3 \ldots x_n), \frac{\partial z}{\partial x_1} = \phi_1 (x_2, x_3, \ldots x_n) \ldots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1{}^{p-1}}$$
$$= \phi_{p-1} (x_2, x_3, \ldots x_n).$$

இதற்கு $\phi_0, \phi_1 \ldots \phi_{p-1}$ என்னும் துவக்க மதிப்புக்கள் $x_{20}\ x_{30}$. x_{n0} என்பதன் அணிமையில் பகுப்பாய்வு பெற்றவை. f என்பது அதன் ராசிகளின் துவக்க மதிப்பிக்கள் $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}\ z_0 = \phi_0 (x_{20}\ x_{30} \ldots x_{n0})$.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_n = \phi_1(x_{20} \ldots x_{n0}) \left(\frac{\partial^p z}{\partial x^p{}_n}\right) = \left(\frac{\partial^p \phi_0}{\partial x^p{}_n}\right)_{x_1 = x_{10}}.$$

இவற்றில் பகுப்பாய்வுடையது.

துவக்க மதிப்புக்கள் $\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_{p-1}$ இவற்றைக் குறிப்பிடத் தீர்வு வரும். ஏதேனும் p சார்பலன்களைத் தழுவி நிற்கும் (A) எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுத் தொகுதி பகுப்பாய்வு மாறுமல் $\phi_0, \phi_1, \phi^{p-1}$ எனும் சார்பலன்கள் மாறவரும்,

பகுப்பாய்வுச் சார்பலன்களின் பண்பைப் பயன்படுத்தும் இந்தத் தேற்ற நிருபணத்தை நாம் இங்கு தரவில்லை.

2. ஒருபடித்தானதும், பகுதி ஒருபடித்தானதுமான முதல் வரிசை பகுதிவகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Linear and Quasilinear first order partial differential equations)

சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடித்தான அல்லது பகுதி ஒருபடித்தான முதல் வரிசை பகுதிவகைக்கெழுச் சமன்பாடு என்பது கீழ் வருமாறு.

$$X_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = Z(x_1, x_2, \ldots x_n, z) \quad \ldots \quad (5\cdot 1)$$

இந்தச் சமன்பாடு வகைக்கெழுக்களில் ஒருபடித்தானது, ஆனால் காணவேண்டிய சார்பலன் z-ல் அவ்வாறல்ல.

வலப்பக்கம் முற்றிலும் பூச்சியமானால், X_i-ன் குணகங்கள் z–ஐச் சார்ந்து இராவிடில் அப்போது (5·1)-ன் சமன்பாடு சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடு எனப்படும்.

வரைபட விளக்கத்தை இன்னும் தெளிவுபடுத்த முதலில் இரண்டு தனி மாறிகளில் பகுதி ஒருபடித்தான சமன்பாட்டைப் பார்ப்போம்.

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad \ldots \quad (5\cdot 1_1)$$

சார்பலன்கள் P, Q, R என்பவை நாம் ஆராயும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையவை எனவும், எல்லாம் ஒன்றாக பூச்சியமாகாதவை எனவும், கொள்வோம்.

தொடர்ச்சியுடைய வெக்டர் மண்டலம்,

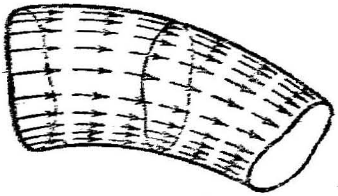
$$\bar{F} = P(x, y, z)\,\bar{i} + Q(x, y, z)\,\bar{j} + R(x, y, z)\,\bar{k}$$

என்பதை ஆராய்வோம். இங்கு அச்சுக்கள் திசையில் $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ என்பவை அலகு வெக்டர்களாகும்.

இந்த மண்டலத்தில் வெக்டர் வரைகள் (அதாவது $\bar{F}$ எனும் வெக்டர் திசையில் வரைக்குத் தொடுகோடுகள் அமைப்பவை.) நிச்சயிக்க, $\bar{t} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz$ எனும் வெக்டருடன் நாம் கோரிய வரைகளின் தொடுகோடுகள் அமையவேண்டும் அத்துடன்,

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

இத்தகைய வெக்டர்வரைகளாலான தலம், அல்லது இன்னும் திட்டமாகக் கூற ஒரு புள்ளியையாவது தலத்துடன் பொதுவாகக் கொண்டு வெக்டர் வரைகளை முற்றிலும் கொண்ட தலங்கள் வெக்டர் தலங்கள் (படம் 5.1) எனப்படும்.



படம் 5-1.

இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட ஒரு துணை அலகு சார்ந்த (தொடர்ந்து துணை அலகைச் சார்ந்த) வெக்டர்வரைத் தொகுதிகளில் அமையும் புள்ளிகளைக் காண வெக்டர் தலம் வரும் என்பது எளிதில் புலனாகும். வெக்டர் தலத்தின் பண்பு என்னவெனில் அதற்குச் செங்கோடாகவுள்ள வெக்டர் $\bar{N}$, தலத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தல வெக்டர் $\bar{F}$-க்கு குத்தாகும். அதாவது,

$$(\bar{N}\ \bar{F}) = 0. \qquad \ldots \quad (5.2)$$

$z = f(x, y)$ என்பது வெக்டர் தலத்தின் சமன்பாடானால் அப்போது

$$\text{வெக்டர் } \bar{N} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} - \bar{k}$$

அப்போது (5.2)-ன் நியதியின் வடிவம்

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = x, R(y, z) \quad \ldots \quad (5.3)$$

$u(x, y, z) = 0$ எனும் சமன்பாட்டால் வெக்டர் தலம் தரப்பட்டால், வெக்டர் $\bar{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ என்றால் (5.5)ன் வடிவம்

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

ஆகவே வெக்டர் தலத்தைக் காண, (5.3)-ல் உள்ள பகுதி ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு காணவேண்டும். அல்லது (5.4)-ல் உள்ள சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு காண வேண்டும். இது வெக்டர்தலச் சமன்பாடு வெளிப்படைச் சார்பு தருகிறதா அல்லது உட்படு சார்பு தருகிறதா என்பதைப் பொருத்தது

வெக்டர் தலங்கள் வெக்டர் வரைகளால் ஏற்படுகின்றன வாதலால் (5.3) (அல்லது 5.4)-ன் தீர்வு காண்பதென்பது,

வெக்டர் வரைகளின் சாதாரண வகைகெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதாகிறது.

வெக்டர் வகைகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளேற்படுத்துக.

$$\frac{dx}{P\ (x, y, z)} = \frac{dy}{Q\ (x, y, z)} = \frac{dz}{R\ (x, y, z)} \quad \dots \quad (5\cdot5)$$

(5.5)-ல் உள்ள தொகுதியின் முதல் தொகைகள்

$\psi_1\ (x, y, z) = c_1$, $\psi_2\ (x, y, z) = c_2$, எனும் ஒன்றையொன்று சாராதனவாகுக. $\psi_1\ (x, y, z) = c_1$ $\psi_2\ (x,y,z) = c_2$ எனும் இரு துணை அலகு வெக்டர் வரைகளிலிருந்து நமது இஷ்டம்போல, ஒருதுணை அலகுத் தொகுதி ஒன்றை உருவாக்குவோம். இது (5.3) அல்லது (5.4) தன்மை காட்டி எனப்படும். இவ்வாறு c_1, c_2 எனும் இரும் துணை அலகுகளிடையே தொடர்ச்சியுள்ள $\Phi\ (c_1, c_2) = 0$ எனும் தொடர்பை ஏற்படுத்துவோம்-

$\psi_1\ (x, y, z) = c_1$, $\psi_2\ (x, y, z) = c_2$, $\Phi(c_1, c_2) = 0$ எனும் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் c_1, c_2 இவற்றை விடுவிப்போம். அப்போது,

$$\Phi\ (\psi_1\ (x, y, z), \psi_2\ (x, y, z) = 0. \quad \dots \quad (5.6)$$

எனும் வெக்டர் தலங்களின் சமன்பாடு வருகிறது. இங்கு Φ என்பது யாதேனும் இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட சார்பலனுகும். இவ்வாறு ஏதேனும் சார்பலனைச் சார்ந்த பகுதி ஒருபடித்தான (5.3)-ன் சமன்பாட்டின் தொகைத் தீர்வை இவ்வாறு கண்டோம்.

$\bar{F} = P\ (x, y, z)\ \bar{i} + Q\ (x, y, z)\ \bar{j} + R\ (x, y, z)\ \bar{k}$ எனும் தளத்தின் ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் தலமல்லாது $\Phi_1\ (x, y, z) = 0$, $\Phi_2\ (x, y, z) = 0$ எனும் வரை வழிச் செல்லும் தலத்தைக் காண வேண்டுமென்ருல் (5.6)-ல் உள்ளது ஏதேனும் ஒரு தலமாக இராது.

ஆனல்,

$$\Phi_1\ (x,y,z) = 0, \quad \Phi_2\ (x,y\ z) = 0,$$

$$\psi_1\ (x,y,z) = c_1, \quad \psi_2\ (x,y,z) = c_2,$$

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து x,y,z எனும் விலக்கவரும். மேற்கூறிய சமன்பாடுகளை $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ எனும் எந்த வரைவழி $\psi_1\ (x,y,z) = c_1$, $\psi_2\ (x,y,z) = c_2$ என்னும் தன்மை காட்டியை

கொள்கிறோமோ அங்குள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிகளும் ஒழுங்காக அனுசரிக்க வேண்டும்.

$\Phi_1(x,y,z)=0$ $\Phi_2(x,y,z)=0$ எனும் வரைதன்மை காட்டியானால் பிரச்சினை திட்டமான தீர்வுடையதாக இருப்ப தில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். ஏனெனில் இந்த வகையில் ஓரலகுத்தன்மை காட்டியில் இந்தவரையும் உட்பட்டது. ஆகவே அதன் வழிப் பல்வேறு தீர்வுத்தலங்கள் உள்ளன.

ஆகவே,

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z),$$

எனும் பகுதி ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின், ஏதேனும் சார்பலனை பொருத்துள்ள தீர்வு கீழ்வருமாறு காணலாம்.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

எனும் துணைச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு காணவும். ஒன்றையொன்று சாராத இரண்டு தீர்வுகள் $\psi_1(x,y,z)=c_1$ $\psi_2(x,y,z)=c_2$, என்பவற்றைக் கண்ட பின்னர் வேண்டிய தீர்வை $\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0$ எனும் வடிவில் காண்கிறோம். இங்கு Φ இச்சைக் கேற்பக் கொள்ளும் சார்பலன் ஆகும். $\Phi_1(x,y,z)=0$, $\Phi_2(x,y,z)=0$ எனும் சமன்பாடுகள் தரும் வரைவழிச் செல்லும் பகுதி ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வுத்தலத்தைப் பின் வருமாறு காணலாம். இங்கு Φ எனும் சார்பலனை இச்சைக்கேற்ப கொள்வதில்லை. ஆனால்,

$$\Phi_1(x,y,z)=0,\qquad \Phi_2(x,y,z)=0.$$

$$\psi(x,y,z)=c_1,\qquad \psi_2(x,y,z)=c_2.$$

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து (x,y,z)-ஐ விலக்க $\Phi(c_1,c_2)=0$ எனும் சமன்பாடு வருகிறது. ஆகவே நமக்கு வேண்டிய தீர்வு தலச் சமன்பாடு $\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0$ என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ எனும் சமன்பாட்டின் ஏதேனும் சார்பலனைச் சார்ந்து நிற்கும் தீர்வைக் காணவும்.

துணைச் சமன்பாடுகள்

$dx=dy=dz$ ஆகும்.

இதன் முதல் தொகையின் வடிவம் $x-y=c_1$, $z-x=c_2$

ஆகவே முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு $\Phi\,[(x-y),(z-y)]=0$ Φ என்பது ஏதேனும் சார்பலன் அல்லது z-ன் வெளிப்படையாகச் சொல்ல $z=x+\psi(x-y)$. இங்கு ψ என்பது வகையிடத் தகுதியான ஏதேனும் சார்பலன்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x=0\ z=y^2$ எனும் வரை வழிச்செல்லும் $x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு தலத்தைக் காண்க.

$\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{0}$ எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு காண்க.

$$\therefore\quad z=c_1,\ x^2+y^2=c_2,$$

$$x^2+y^2=c_2,\ z=c_1,\quad x=0,\quad z=y^2$$

இவற்றினின்று (x,y,z) விலக்க $c_1=c_2$ என வருகிறது.

ஆகவே, $z=x^2+y^2$.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$z=1,\ y^2+y^2=4$ எனும் வட்டம் வழிச் செல்லும், $x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு தலத்தைக் காண்க. (5 7)-ல் தரப்பட்டுள்ள வரை வெக்டர்வரை (தன்மை காட்டி) யாதலால் பிரச்சினைக்குத் திட்டமான தீர்வு இல்லை. ஏன்? சமன்பாட்டின் தீர்வு தலங்கள் யாவும் $z=\Phi\ (x^2+y^2)$ உருள் தலங்களாகும். சுற்று அச்சு z அச்சுடன் சேரும் (5·7)-ல் உள்ள வட்டம் வழி பற்பல உருள் தலங்கள் உள்ளன. உதாரணமாய் $z=x^2+y^2-3,\ 4z=x^2+y^2,\ z=-x^2\quad y^2+5$ எனும் பரவளைய உருள் தலம் (Paraboloid) $x^2+y^2+z^2=5$ எனும் கோளத்தலம் என இன்னும் பிற.

$(5\cdot 1_1)$-ன் தீர்வுதலம் செல்லும்வரை பின் சமன்பாடு துணை அலகில் தரப்பட்டால்

$$x_0=x_0(s),\ y_0=y_0(s),\ z_0(s), \qquad ..\ (B)$$

பொதுவாக

$$x=x(t,s).\ y=y(t,s),\ z=(t,s)$$

எனத் தீர்வுத் தலத்தையும் துணை அலகுச் சமன்பாடுகளால் காண்கிறோம். (5-5)ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியில்

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}=dt \qquad (5\cdot 5_1)$$

என 't' என்னும் துணை அலகைப் புகுத்துகிறோம். தன்மைகாட்டி தரப்பட்டுள்ள வரை வழிச் செல்ல $t = 0$ (அல்லது $t = t_0$) எனும் மதிப்புக்கு துவக்க நியதிகள் $x = x_0(s), y = y_0(s), z = z_0(s)$ எனும்படி $(5 \cdot 5_1)$ தீர்வைக் காணவேண்டும். அத் தகைய துவக்க மதிப்புகளுக்கும், தரப்பட்டுள்ள s-ன் மதிப்புக்கும், (B) எனும் வரையில் குறிப்பிட்ட புள்ளி வழி ஒரு தன்மை காட்டி செல்கிறது s என்பது மாற $(x = x)$ $(t, s), y = y(t, s). z = z$ $(t, s$ (C) எனும் தன்மைகாட்டித் தொகுதி வருகிறது இவை, (B)-ல் தரப்பட்டுள்ள வரையின் புள்ளிகள் வழிச் செல்கின்றன. [B-ல் தரப்பட்டுள்ள வரை தன்மைகாட்டியல்ல எனக்கொள்கிறோம்]. இந்த (C)-ல் தரப்பட்டுள்ள தன்மை காட்டித் தொகுதியில் அடங்கியுள்ள புள்ளிகள் நாம் கோரிய தீர்வு தலத்தைத் தருகின்றன.

எடுத்துககாட்டு 4 :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

$x_0 = s, y_0 = s^2, z_0 = s^5$ என்னும் வரைவழிச் செல்லும் தீர்வுதலம் காணவும்.

தன்மைகாட்டிகளைத் தரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதி

$$dx = -dy = dz = dt$$

இதன் பொதுத் தீர்வு

$$x = t + c_1, y = -t + c_2, z = t + c_3$$

துவக்க மதிப்புக்களிலிருந்து இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட நிலை எண்களின் மதிப்பு காண்கிறோம். முடிவில் நாம் அடைவது

$$x = t + s. \; y = -t + s^2, z = t + s^8$$

இப்போது n தனிமாறிகள் வரும் வகையைக் கவனிப்போம். முப்பரிமாண வகை கூறியதை $(n+1)$ பரிமாண வகைக்கும் கூறலாம் என எதிர்பார்பபது இயற்கையே.

முதலில் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து துவங்குவோம்,

$$X_1(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} \dots + X_n(x_1, x_2, \dots x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \qquad \dots (5.8)$$

இங்கு $X_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனும் சார்பலன்கள் ஒருங்கே எடுத்துக் கொள்ளும் வெளியில் எங்கும் பூச்சியமாவதில்லை. அங்கெல்லாம் அவற்றிற்கு எல்லையுடைய பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன.

நாம் துணைச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை ஏற்படுத்துகிறோம்.

$$\frac{dx_1}{X_1\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \qquad (5.9)$$

இவை, மேலே குறிப்பிட்ட நியதிகட்குட்படுவதால் 'உள்ளமை தனிமைத் தேற்றத்திற்' கேற்றதாகின்றன.

நாம் (5·9)-ன் $(n-1)$ முதல் தீர்வைக் காண்கிறோம். அவை

$$\psi_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1$$
$$\psi_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_{n-1}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{n-1}.$$

$(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ எனும் கூறுகளுள்ள வெளியில் இந்தத் தொகுதி $(n-1)$ துணையலகுவரைத் தொகுதியைத் தருகிறது. இந்தத் தொகுதி (5.8)-ன் தன்மைகாட்டி எனப்படும். (5·9)-ன் முதல் தீர்வு $\psi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$-ன் இடப்பக்கம் (5·8)-ல் உள்ள முதல் சமபடித்தான ஒருபடிப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு என நாம் காட்டுவோம்.

ஏன், (5·9)-ன் எந்தத் தீர்வுவரையிலும் $\psi \equiv c$ ஆகும். ஆகவே, தீர்வு வரையின் வழி,

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx_i \equiv 0 \qquad \ldots (5\cdot10)$$

ஆனால் (5·9)-ன் தொகுதியின் தீர்வுவரை வழி dx_i என்பன X_i எனும் சார்பலன்களுடன் நேர்விகிதமாகும். ஆகவே,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx_i \equiv 0$$ எனும் சமன்பாட்டில் இடப்பக்கத்தில் dx_i-ல் சமபடித்தானதால் dx_i-க்குப் பதில் X_i எனும் சார்பலன்களைப் பிரதியிடலாம். (அவை X_i-க்கு நேர்விகிதமானதால்) இவ்வாறு (5·9)-ன் தீர்வுவரை வழி,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, X_i \equiv 0 \qquad \ldots (5\cdot11)$$

எனக் காண்கிறோம்.

(5·9)-ன் தீர்வு வரைகள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனும் மாறிகளின் வீச்சில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வழியும் செல்கின்றன. (5·11)-ல் இடப் பக்கம் $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ எனும் நிலை எண்களைச் சார்ந்தது அல்ல. ஆகவே, (5·11)-ல் உள்ள முற்றொருமை ஏதேனும் ஒரு தீர்வுவரை வழி மட்டுமல்ல, ஆனல் $x_1, x_2, \ldots x_n$ எனும் மாறிகளின் வீச்சு முழுமையும் உண்மையாகும். அதாவது ψ எனும் சார்பலன்,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \text{ எனும்}$$

சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

ஏதேனும் சார்பலனுகிய $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0$

என்பது (5·9)-ன் தீர்வு என்பது மிகத் தெளிவாகும். ஏனெனில், (5·9)-ன் தீர்வுவரைத் தொகுதி முழுமைக்கும் சார்பலன்கள் $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ என்பவை நிலையாகின்றன. ஆகவே, $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ என்பதுவும் (5-9)-ன் தீர்வுவரை வழி நிலையாகும். ஆகவே, $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ என்பது (5.8)-ல் உள்ள சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும். Φ என்பது இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் சார்பலனுகும்.

$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ என்பது (5·8)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு என நிறுவுவோம்.

தேற்றம் 5·2. Φ என்பது இச்சைக்கேற்ப சார்பலனுக $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ என்பது.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad \ldots \quad (5\cdot 8)$$

எனும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகும். அதாவது, எல்லாத் தீர்வுகளையும் விலக்கின்றிக் கொண்டுள்ள தீர்வாகும்.

நிருபணம் : $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்பது (5.8)-ன் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு எனக் கொள்ளவும். பிறகு $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ என ஒரு சார்பலன் உள்ளது என நிறுவுக.

ψ என்பதுவும் $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ என்பதுவும் (5.8)-ன் தீர்வுகளாதலால்,

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} &\equiv 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5\cdot12)$$

என வருகிறது.

(5·12)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியை n சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி — X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ - ல் — எனக் கொள்வோம். இந்தத் தொகுதி நாம் கொண்ட இடைவெளியில் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சாரமுள்ள தீர்வையுடையதென்பதையும் மனத்தில் கொள் வோம். ஏனெனில், கொள்கைப்படி $X_i (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்பன ஒருங்கே பூச்சியமாவதில்லை. ஆகவே, நாம்வரும் முடிவு, இத் தொகுதியின் அணிக்கோவை,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

நாம் எடுத்துக்கொண்ட இடைவெளியில் முற்றொருமையாகப் பூச்சியமாகும் என்பதாம். இருப்பினும், $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$

என்பதன் ஜேகோபியன் முற்றொருமையாகப் பூச்சியமாகிற தென்பது

$$F(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0 \qquad \ldots (5\cdot 13)$$

எனச் சார்பலன்களிடையே தொடர்புள்ளதென்பதைக் காட்டு கிறது.

(5·9)-ல் உள்ள தொகுதியின் $\psi_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ எனும் முதல் தொகைகள் ஒன்றை யொன்று சாராதிருப்பதால்,

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}$$

எனும் ஜேகோபியனின் $(n-1)$ வரிசையுள்ள

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \ldots x_{\alpha n-1})}$$

எனும் ஒரு சிற்றணியாவது பூச்சியமன்று. ஆகவே, (5·13)-ல் சமன்பாட்டை

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) \text{ எனும்}$$

வடிவில் சொல்லலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \qquad \ldots (5\cdot 14)$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுத் தொகை காண். இதன் தன்மை காட்டிச் சமன்பாடு

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

சார்பிலா முதல் தீர்வு

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}.$$

ஆகவே, முதல் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$z = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

இது பூச்சியம் அடுக்குள்ள சமபடித்தான சார்பலன் ஆகும்.

சமபடித்தான சார்பலனின் பண்பைக் கூறும் ஆயிலர் தேற்றம், (5·14)-லுள்ள சமன்பாட்டிற்குப் பூச்சியம் அடுக்குள்ள சமபடித்தான சார்பலன் பொருத்தமாகும் எனக் கூறுகிறது, இப்போது பூச்சியம் அடுக்குள்ள சார்பலன் மட்டுமே இத்தகைய பண்புடையதென நிறுவியுள்ளோம்.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \quad \ldots (5\cdot15)$$

என்பது சமபடித்தானதல்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். இங்கு X_i, Z என்பவை வகையிடற்குரிய சார்பலன்கள். $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ எனும் ராசிகளில் கொண்ட இடைவெளியில் பூச்சியமாகாதவை. இதன் தீர்வு காண இதனைச் சமபடித்தான சமன்பாடாக மாற்றுகிறோம்.

இதற்கு, மூன்று மாறிகளில் கூறியதுபோலவே (5·15)-ன் z-ன் தீர்வை,

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \quad \ldots (5\cdot16)$$

எனும் உட்படு சார்பலனுகக் காண்போம். இங்கு,

$$\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0.$$

ஏன், (5·16)-லிருந்து $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனும் சார்பலன் வருகிறதெனக் கொண்டு,

$$u[(x_1, x_2, \ldots, x_n, z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0$$

எனும் முற்றொருமையை x_i-ஐச் சார்ந்து வகையிட்டு நாம் அடைவது,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

$$\text{இங்கு} \quad \frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

(5·15)-ல் $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ஐப் பிரதியிட்டு $-\frac{\partial u}{\partial z}$ ஆல் பெருக்கி, எல்லா உறுப்புகளையும் இடப்பக்கத்திற்கு மாற்றி, நாம் கீழ் வரும் சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாட்டை அடைகிறோம்.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$(5\cdot17)$$

இதற்குப் பொருந்தியதாக u எனும் சார்பலன் இருக்க வேண்டும். ஆனால், $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ எனும் சமன்பாடு தரும், $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனும் மாறிகளில் z என்பது சார்பலன் எனக் கொள்கையால் மட்டும் இது வரும்.

இவ்வாறு $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ என்பதால் (5·17)-ல் உள்ள சமபடித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை முற்றொருமை ஆக்கவல்ல u எனும்சார்பலன்களைக் காணவேண்டும். முதலாக, $(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$ எனத் தனி மாறி தரப்பட்டால் (5·17)-ல் உள்ள சமன்பாட்டை முற்றொருமையாக்கும் u எனும் சார்பலன்களைக் காணவும். அத்தகைய எல்லா 'u' சார்பலன்களும் (5·17)-ன் சமபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். இதுவரை நாம் அறிந்த முறைகளினால் இதனைக் காணலாம். தன்மை காட்டியைத் தரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை அமைப்போம்.

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)} = \frac{dz}{Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)} \quad \ldots (5{\cdot}18)$$

இதன் n முதல் சாராத் தீர்வுகளைக் காண்போம்,

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c_1,$$
$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c_n;$$

அப்போது (5.17)-ன் பொதுத் தீர்வின் வடிவம்

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

இங்கு Φ ஏதேனும் ஒரு சார்பலன்.

(5·15)-ன் சமன்பாட்டின் தீர்வு z என்பது இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் சார்பலனைச் சார்ந்தது. அந்தச் சார்பலன்

$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ அல்லது $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ என்பதிலிருந்து வருகிறது.

எனினும், இந்த முறையிலிருந்து காணப்பட்ட தீர்வுகளல்லாமல் $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்தும் வரும் தீர்வுகள் z உள்ளன. இங்கு u எனும் சார்பலன் (5.17)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வு அன்று. ஆனால் $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ என்பதால் இந்தச் சமன்பாட்டை முற்றொருமையாக்குகிறது, அத்தகைய தீர்வுகள் சிறப்புத் தீர்வுகள் (special solutions)எனப்படும்.

சாதாரணப் பொருளில், சிறப்புத் தீர்வுகள் பல இல்லை. அவை ஓரலகு தொகுதியாகக்கூட இருக்க முடியாது.

ஏன், ஒரு சிறப்புத் தீர்வு,

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c \qquad \ldots (5\cdot19)$$

எனும் சமன்பாட்டால் தரப்பட்டால், c என்பது துணையலகு $c_0 < c < c_1$ எந்த c-ன் மதிப்புக்கும், (5.19)-ல் உள்ள சமன்பாடு இருப்பதால், (5.17)-ல் உள்ள சமன்பாடு முற்றொருமையாக வேண்டும். ஆனால், (5.17)-ல் c இல்லாததால், c-ஐ உடைய (5.19)-ல் உள்ள c-ஐ உடைய சமன்பாட்டால் முற்றொருமையாக முடியாது. ஆகவே ஒன்றையொன்று சாராது மாறு $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ எனும் ராசிகளில் முற்றொருமையாகிறது.

கடைசியில் சொன்ன கூற்றுக்கு வரைகணித விளக்கம் தர முடியும். $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ என்பதால் (5.17)-ல் உள்ள சமன்பாடு முற்றொருமையாகிறது என்று கூறுவதன் பொருள், $u = 0$ எனும் தலத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் (5.17) முற்றொருமையாகிறதென்பதாம். ஆனால், $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ தரும் வெளியில் மற்றப் புள்ளிகளில் முற்றொருமையாகாது. c எனும் தொடர்ந்து மாறும் துணையலகைக் கொண்ட $u = c$ எனும் சமன்பாட்டால் c-யே இல்லாத (5·17)-ல் உள்ள சமன்பாடு முற்றொருமையானால் அதன் பொருள் $c_0 < c < c_1$ எனும் படியுள்ள $u = c$ எனும் எல்லாத் தலங்களிலும்—அவை ஒன்றையொன்று வெட்டாதன—முற்றொருமை எனப் பொருளாகும். இவை $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ எனும் வெளியில் D எனும் ஒரு பகுதியை நிரப்புகிறது. ஆகவே, $x_1, x_{2n}\ x_3, \ldots, x_n, z$ எனும் சாராமாறிகளில் D எனும் இடைவெளியில் (5.17)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் முற்றொருமையாகின்றன.

சாதாரணப் பயன்படு உத்திக் கணக்குகளில் சில துவக்க மதிப்புகளுக்கு ஒத்த (5.15)-ன் தீர்வுகளைக் காணவேண்டி வரும். ஒரு சில சிறப்புத் தீர்வுகளே மேற்சொன்ன பொருளில் உள்ளபடியால் மிகவும் விதிவிலக்கான இடங்களில் மட்டும் துவக்க மதிப்புகளையுடையனவாயிருக்கும். ஆகவே, மிகமிக அரிய கணக்குகளில் மட்டுமே இவற்றைக் கவனிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = Pz \qquad \ldots (5.20)$$

P என்பது நிலை எண். இதன் தீர்வு காணவும்.

கீழ்வரும் தொகுதி

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{Pz}.$$

இவற்றின் தீர்வு

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \frac{x_2}{x_n} = c_2, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \frac{z}{x_n^p} = c_n.$$

ஆகவே முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^p}\right) = 0,$$

ஆகவே

$$z = x_n^p \ \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

ஆகவே, தீர்வுஇங்கு p அடுக்குள்ள சமபடித்தான சார்பலன்.

(5·20)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுக்குச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை என நிறுவ முடியும். ஆகவே, ஆயிலரின் சமபடித்தான சார்பலன் தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையே என அதாவது(5·20)-க்கு p அடுக்குள்ள சமபடித்தான சார்பலன் மட்டுமே தீர்வாகும் எனக் காண்கிறோம்.

'தன்மை காட்டி'க் கருத்தைத் தனிவகையான பகுதி சமபடித்தான சமன்பாட்டிற்கும் புகுத்தலாம். அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} P(x, y, u, v)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u, v)\frac{\partial u}{\partial y} &= R_1(x,y,u,v), \\ P(x, y, u, v)\frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, u, v)\frac{\partial v}{\partial y} &= R_2(x,y,u,v). \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

இந்தத் தொகுதியின் வெக்டர் வரைகள்

$$\mathbf{F} = P(x, y, u, v)\,\mathbf{i} + Q(x, y, u, v)\,\mathbf{j} + R_1(x, y, u, v)\,\mathbf{k}_1$$

$+ R_2(x, y, u, v)\,\mathbf{k}_2$ எனும் நான்கு பரிமாண வெளி வெக்டர் வெளியில் உள்ளவையாகும்.

தன்மை காட்டி தரும் சமன்பாட்டுத் தொகுதி

$$\frac{dx}{P(x, y, u, v)} = \frac{dy}{Q(x, y, u, v)} = \frac{du}{R_1(x, y, u, v)} = \frac{dv}{R_2(x,y,u,v)} \quad (E)$$

(D)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளை வெக்டர் குறியீட்டில் எழுத வருவது

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1) = 0 \quad (\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2) = 0$$

இங்கு $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ எனும் வெக்டர்களின் கூறுகள்

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1, 0\right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, 0, -1\right)$$ என்பனவாம்.

இவை முறையே $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ எனும் முப்பரிமாண உருளைத் தலங்களுக்குச் செங்கோட்டுத் திசைகளில் உள்ளன.

ஆகவே, வரைகணித நோக்கில் பார்த்தால், (D)-ன் தொகுதியின் தீர்வு காண்பதென்பது இரு தலங்களின் வெட்டு வரையின் புள்ளிகளில் உள்ள வெக்டர் வரைகளுக்குச் செங்கோடாய் அமையும் இரண்டு முப்பரிமாண உருளைத் தலங்கள் $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ என்பனவற்றைக் காண்பதாகும்.

இந்த நியதி பொருந்தவேண்டுமானால், பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, முப்பரிமாண உருளைத் தலங்கள் $u=u(x, y)$, $v=v(x,y)$ வெட்டும் இரு பரிமாண வெளி S வெக்டர் வரைகளைக் கொண்டதாக இருக்கவேண்டும் என்பது எளிதில் புலனாகிறது. ஏனெனில் இந்த வெக்டர் வரைகள் $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ எனும் இரு தலங்களிலும் ஒருங்கே அமையவேண்டும், ஆகவே, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ எனும் வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாக அமைய வேண்டும்.

u, v-ஐச் சாராத ஏதேனும் இரண்டு தீர்வுகள் $\Phi_1(x,y,u,v) = 0$, $\Phi_2(x,y,u,v)=0$ என்பனவற்றைக் கொண்டோமானால், பொதுவாகக் கூற அவை வெட்டும் இருபரிமாண வெளி S-ஐ அடைவோம். இது வெக்டர் வரைகளை உள்ளடக்கியதாக இருக்கும். ஏனெனில், $\Phi_1(x,y,u,v) = 0$, $\Phi_2(x,y, u, v) = 0$ எனும் இரு தலங்களுக்கும் பொதுவாக ஒரு புள்ளியிருந்தால் இந்தப் புள்ளி வழி அமையும் வெக்டர் வரையும் இரண்டு தலங்களிலும் அமையும்.

$\Phi_1(x, y, u, v) = 0$, $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$. எனும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளை விடுவிக்க, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ எனும் முப்பரிமாண உருளைத் தலங்கள் வரும். இவை அதே வெக்டர் வரைகளையுடைய இருபரிமாண வெளி S-ல் வெட்டிக்கொள்ளும்.

ஆகவே, இவ்வாறு கண்ட சார்பலன்கள் $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ என்பவையே முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

D எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் இரண்டு ஏதேனும் சார்பலன்களைச் சார்ந்து நிற்கும் தீர்வை இதே முறையில் காணலாம். ஆனால், (E)-ல் உள்ள தொகுதியின் முதல் தீர்வுத் தொகையை, மிகவும் பொதுவான வகையில்

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 (\psi_1 (x,y,u,v), \psi_2 (x,y,u,v), \psi_3 (x,y,u,v) = 0,\\ \Phi_2 (\psi_1 (x,y,u,v), \psi_2 (x,y,u,v), \psi_3 (x,y,u,v) = 0,\end{aligned}\right\} \quad (F)$$

எனக் கொள்ள வேண்டும்.

இங்கு $\psi_1(x,y,u,v)$, $\psi_2(x,y,u,v)$, $\psi_3(x,y,u,v)$ எனும் ஒன்றையொன்று சாராத (E)-ன் முதல் தீர்வுத் தொகைகளாகும். Φ_1, Φ_2 என்பன இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் சார்பலன்களாகும்.

(F)-ல் உள்ள சார்பலன்கள் (D) எனும் தொகுதியின் தீர்வு $u(x,y)$, $v(x,y)$-ஐ உட்படு சார்பலன்களாகக் கூறுகிறது. இவை இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் சார்பலன்கள் Φ_1, Φ_2 இவற்றைப் பொறுத்தது. Φ_1,Φ_2 என்பன u, v-ஐச் சார்ந்து இருக்கக்கூடாது.

3. ஃபாஃபியன் சமன்பாடுகள்
(Pfaffian Equations)

இரண்டாம் பிரிவில் தொடர்ச்சியுடைய வெக்டர்களும்

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}.$$

இதனை ஆராய்வதால் வரும் பிரச்சினைகளைப் பார்த்தோம். இவை வெக்டர் வரைகள், வெக்டர் தலங்கள் காணும் பிரச்சினைகளாகும்.

அடிக்கடி எழும் ஒரு பிரச்சினை என்னவெனில், வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகவுள்ள $U(x, y, z) = c$ எனும் தலங்களைக் காண்பதாம். இத் தலங்களின் சமன்பாட்டு வடிவம் $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}) = 0$ ஆகும். இங்கு $\mathbf{t}$ என்பது நாம் கோரிய தலத்தின் தொடுகோட்டுத் தலங்களில் உள்ள வெக்டராகும். அதாவது,

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz.$$

அல்லது விரிவு செய்யப்பட்ட வடிவில்,

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \quad \ldots (5\cdot21)$$

$(5\cdot21)$-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் ஃபாஃபியன் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

எனும் களத்திற்கு நிலைப்பண்பு (Potential) இருந்தால்,

$$\mathbf{F} = \text{Grad } U, \text{ அதாவது. } P = \frac{\partial U}{\partial x},\ Q = \frac{\partial U}{\partial y},\ R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

அப்போது கோரிய தலங்கள் $U(x, y, z) = c$ என்பவை நிலைப் பண்புச் சார்பலன் U–வின் சமதலங்கள் எனப்படும். இங்குக் கோரிய தலங்களைக் காண்பது கடினமன்று. ஏனெனில்,

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

இங்கு, வரை நுண்தொகை (x_0, y_0, z_0) என்ற குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து (x, y, z) எனும் மாறக்கூடிய புள்ளிக்கு எந்தப் பாதைவழியாகிலும் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, அச்சுகளுக்கு இணையாகவுள்ள நேர்கோடுகள் வழியுள்ள பாதையில் நுண் தொகையைக் காணலாம்.

ஆனால், **F** எனும் களத்திற்கு நிலைப்பண்பு இல்லை என்றால், சிலவகைகளில் வெக்டரல்லாத குணகம் $\mu(x, y, z)$ என்பதால் **F**-ஐப் பெருக்க, **F**, நிலைப்பண்புடையதாகும். அவ்வாறு குணகம் இருந்தால்,

$$\mu \mathbf{F} = \text{Grad } U \text{ அல்லது},$$

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \mu R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

ஆகவே,

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z},$$

அல்லது,

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}\right).$$

முதல் சமன்பாட்டை R ஆலும், இரண்டாவது சமன்பாட்டை P-ஆலும், மூன்றாவதை Q-ஆலும் பெருக்கி மூன்றையும் உறுப்பு வாரிக் கூட்ட, μ எனும் குணகம் இருக்கத் தேவையான நியதி,

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) +$$
$$+ Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0.$$

அல்லது $(\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) = 0$ என வருகிறது. இங்கு $\nabla \times \mathbf{F}$, அதாவது களச் சுழல், கீழ்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

(5·21)-ன் சமன்பாட்டின் 'முழுத்தொகைக் காண் நியதி' எனக் கூறப்படும் நியதி பொருந்தியிரா விட்டால், $F(x, y, z)$ எனும் தள வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகத் தளம் $U(x, y, z) = c$ இல்லை எனப் பொருளாகும்.

ஏன், அத்தகைய தளங்கள் $U(x.y,z) = c$ இருந்தால் (5.21)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் இடப் பக்கம்

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

என்பதிலிருந்து வேறுபட்டிருக்கும். எவ்வாறெனில் $\mu(x,y,z)$ எனும் குணகம் மட்டும் இருக்காது. $\mu(x,y,z)$ என்பது (5.21)-ன் நுண்தொகை காண் குணகம் எனப்படும்.

இவ்வாறு F எனும் தளத்திலுள்ள வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாக $U(x,y,z) = 0$ எனும் தளங்கள் அமையவேண்டுமானல் F எனும் வெக்டர் சுழல் $\mathbf{F}(\Delta \times \mathbf{F})$ எனும் வெக்டரும் குத்தாக அமையத் தேவையாகும். அதாவது $(\nabla \times \mathbf{F}.\mathbf{F}) \equiv 0$.

குறிப்பு: $(\nabla \times \mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$ எனும் நியதி $Pdx + Qdy + Rdz$ எனும் ஃபாஃபியன் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே தொடர்பு $U(x,y,z) = c$ வடிவில் தீர்வு காண்பதற்குரிய நியதி எனப்படும்.

சில இடங்களில், F எனும் தளத்திற்குக் குத்தாக உள்ள தலங்களில் காணவேண்டிவரும். ஆனல் அதே பண்புடைய வரைகளைக் காணவேண்டிவரும். அதாவது இரு தொடர்புடைய —ஒன்றல்ல— ஃபாஃபியன் சமன்பாடுகள்

$$U_1(x,y,z) = 0, \quad U_2(x,y,z) = 0 \qquad \ldots (5.22)$$

காணவேண்டும். இத்தகைய வரைகளைக் காண (5·22)-ல் உள்ள ஒரு சமன்பாட்டை இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளவும்.

$U_1(x,y,z) = 0$, என்பது அதுவாகுக. (5.23)

(5.23)-ன் உதவியால் (5.21)-ல் இருந்து ஒரு மாறி—z என்க— நீக்கம் செய்யவரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டு வடிவம்,

$M(x,y)\,dx + N\,(x,y)\,dy = 0.$

இதன் தீர்வு காண இச்சைக் கேற்பக் கொண்ட $U_1(x,y,z)=0$ எனும் தளத்தில் அமையும் நாம் கோரிய வரைகள் வருகின்றன.

வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகத் தளங்கள் ஏற்பட $(\Delta \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}) = 0$ என்பது தேவையான நியதி மட்டுமல்ல, போதுமானதும் ஆகும் என நிறுவுவோம்.

நாம் கோரிய $U(x,y,z) = c$ எனும் தளத்தில் $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ என்பது முற்றொருமையாக வேண்டும் என்பதைக் கவனிக்கவும். அதாவது வரை நுண்தொகை

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (5.24)$$

இந்தத் தலத்தில் உள்ள எந்தப் பாதையிலும் (மூடாத பாதை உட்பட) பூச்சியமாக வேண்டும்.

நாம் எல்லாச் சுழல் தளங்களையும் கவனிப்போம், அதாவது சுழல் $\mathbf{F}$ எனும் வெக்டர் தலங்களை ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தால்

$$\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot}\,\mathbf{F}\,\mathbf{n}\,d\sigma$$

இங்கு $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ (5.24)-ல் உள்ள வரை நுண் தொகை சுழல் தளத்தில் உள்ள எந்த மூடுபாதையிலும் பூச்சியமாகும். (ஏனெனில், தளத்திற்குத் தளவெக்டர் $\mathbf{r}$, $\Delta \times \mathbf{F}$ எனும் வெக்டர் இவற்றின் புள்ளிப பெருக்கற்பலன் பூச்சியமானதால்) பல்வேறு சுழல் தளங்களில் நாம்

$$\int_L \mathbf{F}dr = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

எனும் நுண்தொகை மூடாப் பாதையிலும் பூச்சியமாகும் தளங்களைக் கொள்வோம். $M(x_0, y_0, z_0)$ எனும் புள்ளி வழிச் செல்லும் அத்தகைய தளம் அமைக்க. இந்தப் புள்ளி M வழி, F எனும் தளத்தின் வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாக ஒரு வரை அமைக்கவும். அத்தகைய வரைகளின் சமன்பாடு

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \qquad \dots \quad (5.21)$$

இதனுடன் M வழி ஏதேனும் தளம் $z = f(x,y)$ என்பதையும் கொள்ளவும். [சாதாரணமாக இந்தத் தளத்தின சமன்பாட்டை $z = f_1(x)$ அல்லது $z = f_2(y)$ அல்லது $z = a, -a$ என்பது நிலைஎண் — என்றும்கூடக் கொள்ளலாம்]

(5·21)-ல் $z = f(x, y)$ எனப் பிரதியிட, சாதாரணச் சமன்பாடு,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)dy = 0.$$

என வருகிறது. $y(x_0) = y_0$ எனும் துவக்க மதிப்பைக் கொண்டு இதன் தீர்வைக் காண $M(x_0, y_0, z_0)$ வழிச் செல்லும் l எனும் நாம் கோரிய வரை கிடைக்கிறது. இது வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகும் (படம் 5·2).

இந்த வரை சுழல் வரை அல்லவெனில், l-ன் ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகவும் சுழல்வரை அமைக்கச் சுழல்தளம் S, கிடைக்கிறது. இந்தத் தளம் **F** எனும் தளத்திலுள்ள வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகும்.

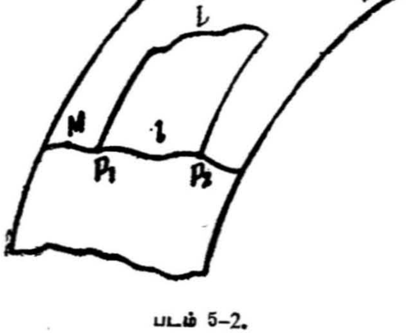
ஏன், S எனும் தளத்தில் L எனும் மூடா வரையை எடுத்துக் கொண்டு அதன் எல்லைப் புள்ளிகளின் வழி l எனும் வரையை p_1, p_2-ல் வெட்டுமாறு சுழல் வரையை அமைக்க, p_1, p_2 இவற்றிடையே உள்ள l எனும் துண்டும், L வரையும் இரண்டு சுழல் வரைகளும் கொண்ட ஒரு சுற்று வரை (Cantour) வருகிறது.

இந்த மூடுவரை வழி,

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

எனும் நுண்தொகை கொள்ள அது பூச்சியமாகும். ஏனெனில், அதன் பாதை சுழல் தளத்தினுள் இருக்கிறது. ஆனால், l எனும் வரையின் துண்டின் மீதும் சுழல் வரைத் துண்டுகள் மீதும் நுண்தொகை பூச்சியம், ஏனெனில், l-ன் வில்லும், சுழல் வரைகளும் **F** எனும் களத்தில் உள்ள வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தானதால் ($\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = 0$ என்பதால் **F** எனும் கள வெக்டர் வரைக்குச் சுழல் வரைகள் குத்தாகும்.)

ஆகவே $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ எனும் இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட மூடா வரைவழி நுண்தொகையும் பூச்சியம் ஆகும். அதாவது, S எனும் தளம் M வழிச் செல்லும். (5.21)–ல் தீர்வு தளமாகும்.



படம் 5–2.

இந்த மாதிரியாக $(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = 0$ என்பது F எனும் களவெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாக தளத் தொகுதி உள்ளமைக்குப் போதுமான நியதி என நிறுவுவது அத்தகைய தளங்களை அமைக்கும் வழியையும் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$zdx + (x - y)\,dy + zy\;dy = 0.$$

$(\nabla \times \mathbf{F},\mathbf{F}) = 0$ எனும் நியதி இங்குப் பொருந்துவதில்லை. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + (x - y)\,\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ ஆகும். ஆகவே, ஒரு தொடர்பு கொண்டு இதன் தீர்வு காணமுடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$(6x + yz)\,dx + (xz - 2y)\,dy + (xy + 2z)\,dz = 0.$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv 0. \quad \mathbf{F} = (6x + yz)\,\mathbf{i} + (xz - 2y)\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k},$$

ஆகவே $\mathbf{F} = \text{grad}\; U$

$$U = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (6x + yz)\,dx + (xz - 2y)\,dy + (xy + 2z)\,dz$$

வரை நுண்தொகை காண அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளைக் கொள்வோம். அப்போது $U = 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz.$ ஆகவே, வேண்டிய தீர்வு $3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = c.$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$yzdx + 2xzdy + xydz = 0.$$

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \qquad \nabla \times \mathbf{F} = -x\mathbf{i} + z\mathbf{k}.$$

தீர்வு காண உள்ள நியதி $(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = 0$ என்பது பொருந்துகிறது. ஒரு தளத்தில், $z = 1$ என்போம்.

$$z = 1,\; ydx = 2xdy = 0,\; xy^2 = a,$$

எனும் வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகவுள்ள வரைகளைக் காண்போம்.

$z = 1,\;\; xy^2 = a$ எனும் வரைகள் வழிச் சுழல் தளங்கள் அமைப்போம். இதற்கு,

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z},\; y = c_1,\; xz = c_2,$$

எனும் சுழல் வரைகளின் தீர்வு காண்போம்.

$z = 1$, $xy^2 = a$, $y = c_1$, $xz = c_2$ இவற்றிலிருந்து x, y, z இவற்றை விலக்க நாம் அடைவது, $c_1^2 \cdot c_2 = a$ ஆகவே, முதல் சமன்பாட்டின் தீர்வு $xy^2z = a$ எனும் வடிவிலாகும்.

குறிப்பு: $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0.$ (5·21) எனும் ஃபாஃபியன் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண மற்றொரு சாதாரண முறை z (அல்லது வேறு ஏதேனும் மாறி)-ஐ நிலை எண் எனக் கொள்வதாகும். பிறகு சாதாரணச் சமன்பாடு,

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0. \qquad \dots (5{\cdot}25)$$

இதன் தீர்வு காணவும். இங்கு z என்பது துணை அலகாகக் கருதப் படுகிறது. (5·5)-ன் தீர்வை,

$$U(x, y, z) = c(z). \qquad \dots (5{\cdot}26)$$

எனக் கண்ட பின்னர்—இச்சைக்கேற்ப நுண்தொகையில் கொள் ளும் நிலை எண் z-ன் சார்பலனாகும். $c(z)$ எனும் சார்பலனை (5·21) எனும் சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்துமாறு கொள்ள வேண்டும். (6·26)-ஐ வகையீடு செய்ய,

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \left[\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z)\right]dz = 0. \qquad \dots (5{\cdot}27)$$

(5·21), (5·27) எனும் சமன்பாடுகளில் உள்ள வகை நுண் (differentials) குணகங்கள் நேர்விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்க வேண்டும்.

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} - \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{Q} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - i(z)}{R}.$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - c'(z)}{R}.$$

எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து $c'(z)$-ஐக் காண முடியும். ஏனெனில், $\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{F} = 0$ என்றால், இந்தச் சமன்பாடு z, $c'(z)$ என்பன மட்டும் கொண்டுள்ளது என நிறுவ முடியும். ஆகவே, $U(x,y,z) = c(z)$.

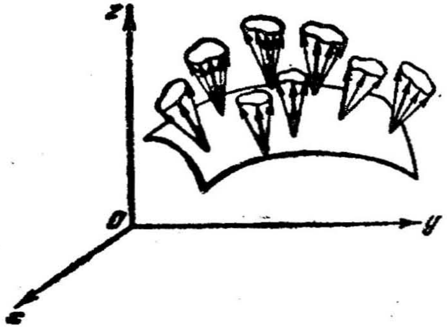
4. முதல்வரிசை ஒருபடித்தானதல்லாத சமன்பாடுகள்
(First order non-linear equations)

முதலில் நாம், கோரும் சார்பலன் இரண்டு தனிமாறிகளைக் கொண்டதாக இருக்கும் வகையைக் கவனிப்போம். மூன்று மாறிகளில் முதல் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$F(x,y,z,p,q)\quad 0 \quad ...(5{\cdot}28)$

இங்கு, $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}\; q$

$q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$



படம் 5–3.

(5.28)–ல் உள்ள சமன்பாடு திட்டப்படுவது யாதெனில் முதல் மூன்று மாறிகள் வேறுபடும் ஒவ்வொரு புள்ளி (x,y,z)-ல் p, q எனும் ராசிகளிடையேயுள்ள $\phi(p,q)=0$ எனும் தொடர்பேயாகும். (p, q) என்பவை (5·28)-ன் தீர்வுத் தலங்கள் $z=z\ (x,y)$ என்பதற்குள்ள செங்கோடு $N\ (p, q, -1)$-ன் திசையைத் திட்டப்படுத்துகின்றன.

இவ்வாறு கோரிய தீர்வுத் தலத்திற்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள செங்கோட்டின் திசையை வெளிப்படையாகத் திட்டப்படுத்தப்படுவதில்லை. ஒரு துணை அலகுக் குடும்பமாகிய தனிப்படுத்தப்பட்ட செங்கோடுகளின் திசைகள் தான் உள்ளன— சாத்தியமாகவுள்ள $N(p, q, -1)$ எனும் செங்கோடுகள் கொண்ட கூம்புகள் தாம் உள்ளன. இந்த p, q இவற்றின் தொடர்பு $\varphi(p, q)=0$ என்பதால் தரப்படுகிறது. (படம் 5·3 பார்க்கவும்)

இவ்வாறு (5·28)-ன் தீர்வு காண்பதென்பது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சாத்தியமாகவுள்ள செங்கோட்டுக் கூம்புகளில் உள்ள செங்கோடுகள் கொண்ட $z=z\,(x, y)$ எனும் தலத்தைக் காண்பதாகும்.

இந்த வரைகணித விளக்கத்தின் அடிப்படையில் (5·28)-ன் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகாணும் முறையைச் சுட்டிக்காட்டுவோம். இந்தத் தீர்வு இருதுணை அலகுகள் a, b-ஐச் சார்ந்துள்ள தீர்வு $\Phi\,(x, y, z, a,b)=0$ எனின், இச்சைக்கேற்பவுள்ள சார்பலனைச் சார்ந்து நிற்கும்.

ஏதேனும் இரு நிலைஎண்கள் a, b-யின் சார்பலனாய் அமையும் (5·28)-ன் தீர்வு $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, என்பது முழுத்தீர்வு (complete integral) எனப்படும்.

முதல் சமன்பாடாகிய (5.28)-ல் தீர்வுதலத்தின் செங்கோட்டுத் திசையை மட்டும் கட்டுப்படுத்துவதால் தீர்வுத்தலங்களின் செங்கோடுகளுடன் ஒன்றுபடும் செங்கோடுகளையுடைய ஒவ்வொரு தலமும் தீர்வு தலங்களாகும். ஆகவே இரு துணையலகுகளின் தழுவல் (envelope) அல்லது ஒரு துணை அலகு தீர்வுத் தலத் தொகுதி முழுமையும் தீர்வு தலங்களாகும், ஏனெனில் தழுவலின் செங்கோடுகள் அதே புள்ளி வழிச்செல்லும் தீர்வுதலத் தொகுதியின் செங்கோடுகளுடன் ஒன்றும்.

$\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ எனும் பகுதி வகையீடுகள் எல்லையுடையனவென்றும், ஒருங்கே பூச்சியமாவதில்லை எனவும் கொண்டால், $\frac{\partial\Phi}{\partial a}, \frac{\partial\Phi}{\partial b}$ என்பன உள்ளன எனவும் கொள்ள இரு துணை அலகுத் தீர்வுத் தலத் தொகுதியின் தழுவல்

$$\Phi(x,y,z,a,b) = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial b} = 0 \quad \dots (5\ 29)$$

எனும் சன்பாடுகளால் தரப்படுகிறது.

கீழ்வருமாறு ஒரு தீர்வுத்தலம் காணலாம். இரு துணை அலகுத் தீர்வுதலத் தொகுதி $\Phi(x,y,z,a,b) = 0$ என்பதிலிருந்து நம் இச்சைக்கேற்ப ஒருதுணை அலகுத் தொகுதிகொள்ளவும் (இதற்கு b-ஐ a-ன் வகையிடற்குரிய ஏதேனும் சார்பலனாகக் கொள்ளவும்.) $\Phi(x,y,z,a,b(a)) = 0$ எனும் ஒரு துணை அலகுத் தொகுதியின் தழுவலைக் காணும்போது தீர்வுதலத்தைக் காண்கிறோம்.

Φ எனும் சார்பலன்களின் எல்லா மாறிகளிலும் எல்லையுள்ள வகையீடுகள் உள்ளன எனக்கொண்டு, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ எனும் வகையீடுகள் ஒருங்கே பூச்சியமாவதில்லை எனவும் கொள்ள ஒரு துணை அலகுத் தொகுதியின் தழுவலைத்தரும் சமன்பாடுகள்,

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,\ \frac{\partial}{\partial a}\{\Phi(x, y, z, a, b(a)\} = 0,$$

அல்லது $\Phi(x, y, z, a, b, (a)) = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}b'(a) = 0 \dots (5.30)$

இந்த இருசமன்பாடுகளும் சேர்ந்து தரும் தீர்வுதலம் இச்சைக்கேற்பக் கொண்ட $L\,b(a)$ எனும் சார்பலனைப் பொருத்தது.

இச்சைக்கேற்ப $b(a)$ எனும் சார்பலன் (5·30)-ல் இருப்பதால், (5.30) என்பது (5.28)-ன் எல்லா தீர்வு தலங்களையும் விதிவிலக்கின்றி உள்ளடக்கியது என உறுதி கூற முடியாது. ஆனால், (5.30)-ல் இச்சைக்கேற்ப உள்ள ஒரு சார்பலன் இருப்பது கோஷியின் (cauchy's) நியதிகட்கு பொருந்தும் துவக்க மதிப்புடைய தீர்வுதலத்தைப் பரித்துக் காண்பதற்குப் போதுமானதாகும். (பக்கம் 298 பார்க்கவும்). இவ்வாறு முழுத்தீர்வைக் காண்பதால் ஏதேனும் ஒரு சார்பலனைப் பொருத்துள்ள ஒரு தீர்வை அமைக்க முடிகிறது.

பல இடங்களில் முழுத் தீர்வைக் காண்பது கடினமல்ல. எடுத்துக்காட்டாக (1) (5.28)-ல் உள்ள சமன்பாடு $F(p,q)=0$ எனவோ அல்லது $P=\varphi(q)$ எனவோ இருந்தால் $q=a$ (a ஏதேனும் ஒரு நிலை எண்) எனப் பிரதியிட வருவது $p=\varphi(a)$, $dz=p\,dx+q\,dy=\varphi(a)\,dx+a\,dy$ ஆகவே, $z=\varphi(a)x+ay+b$ என்பது முழுத் தீர்வு ஆகும்.

(2) (5·28)-ல் உள்ள சமன்பாடு $\varphi_1(x,p)=\varphi_2(\bar{y},q)$ எனும் வடிவுக்குக் கொண்டு வரப்பட்டால்,

$$\varphi_1(x,p)=\varphi_2(y,q)=a$$

என இட (a ஏதேனும் நிலை எண்) p, q-க்கு (இயன்றால்) தீர்வு காண

$$p=\psi_1(x,a),\ q=\psi_2(y,a) \text{ என வரும்,}$$

$$dz=p\,dx+q\,dy=\psi_1(x,a)\,dx+\psi_2(y,a)\,dy.$$

$$z=\int\psi_1(x,a)\,dx+\int\psi_2(y,a)\,dy+b.$$

என்பது முழுத் தீர்வு ஆகும்.

(3) (5.28)-ல் உள்ள சமன்பாடு $F(z,p,q)=0$ என ஆனால், $z=z(u)$ என பிரதியிட ($u=ax+y$) கிடைக்கும். கிடைப்பது,

$$F\left(z,a\frac{dz}{du},\frac{dz}{du}\right)=0.$$

இந்த சாதாரண சமன்பாட்டின் தீர்வு காண

$z=\Phi(u,a,b)$ இங்கு b என்பது ஏதேனும் நிலை எண். அல்லது,

$z=\Phi(ax+y,a,b)$ என்பது முழுத் தீர்வு ஆகும்.

(4) (5·28)-ஐ கிளாரா சமன்பாடு போன்று

$z = px + qy + \varphi \ (p, q)$ என ஆனால் பொதுத் தீர்வு $z = ax + by + \varphi (a, b)$ என்பதை நேரடியாகப் பிரதியிட்டு எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$p = 3q^3$ என்பதன் முழுத் தீர்வு காண்.

$q = a, p = 3a^3, dz = 3a^3 \ dx + ady.$

$z = 3a^3x + ay + b.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$pq = 2xy$ என்பதன் முழுத் தீர்வு காண்.

$$\frac{p}{x} = \frac{2y}{q} = a, p = ax, \ q = \frac{2y}{a}, dz \neq ax \, dx + \frac{2y}{a} dy$$

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{a} + b.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$z^3 = pq^2$ என்பதன் முழுத் தீர்வு காண்க.

$$z = z(u), \text{ இங்கு } u = ax + y, p = a\frac{dz}{du}, q = \frac{dz}{du}$$

$$z^3 = a\left(\frac{dz}{du}\right)^3 \text{ அல்லது } \frac{dz}{du} = a_1 z \left(a_1 = a^{-\frac{1}{3}}\right).$$

$$\ln |z| = a_1 u + \ln b, z = b \ e^{a_1 u}$$

$$z = b \, e^{a_1} \left(\frac{x}{a_1 3} + y\right).$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$z = p\,x + qy + p^2 + q^2$ என்பதன் முழுத் தீர்வு காணவும்

முழுத் தீர்வு $z = ax + by + a^2 + b^2$

இன்னும் சிக்கலான கணக்குகளில் $F(x,y,z,p,q) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு பொது முறைகளில் ஒன்றால் காணப் படுகிறது. இவற்றுள் மிகவும் எளிதானது லாகிரான்சு,—சார்பிட் இவர்களது முறையாகும். இந்த முறையில்

$$U(x, y, z, p, q) = 0. \qquad \dots \quad (5·31)$$

எனும் ஒரு சமன்பாட்டை

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots \quad (5{\cdot}28)$$

என்பதற்குப் பதிலாகக் கொள்கிறோம்- அது எவ்வாறெனில், $p = p(x, y, z, a)$, $q = q(x, y, z, a)$ எனும் இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து வரும் சார்பலன்களை,

$$dz = p(x, y, z, a)\, dx + q(x, y, z, a)\, dy \quad \ldots \quad (5{\cdot}32)$$

எனும் ஒரே தொடர்பிலிருந்து தீர்வுகாண இயலுமாறுள்ள ஃபாஃபியன் சமன்பாட்டிற்குக் கொண்டுவந்து விடவேண்டும். $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ எனும் ஃபாஃபியன் சமன்பாட்டின் தீர்வு (5·28)-ன் முழுத் தீர்வு ஆகும். இங்கு b என்பது (5.32)-ன் தீர்வு காணும்போது வரும் இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் நிலை எண்ணாகும்.

(5·62)-ன் தீர்வு காணப் பொருந்தவேண்டிய நியதியிலிருந்து U எனும் சார்பலன் நிச்சயிக்கப்படுகிறது.

அதாவது $(F. \nabla \times \mathbf{F}) = 0$. இங்கு

$$\mathbf{F} = p(x, y, z, a)\, i + q(x, y, z, a)\, \mathbf{j} - k,$$

விரிவில் இதன் வடிவம்,

$$p\frac{\partial q}{\partial z} - q\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad \ldots \quad (5.33)$$

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ U(x, y, z, p, q) &= a, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.34)$$

எனும் மூற்றொருமைகளிலிருந்து

$$\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z},$$

என்பன கணக்கிடப்படுகிறது. p_1 q_1 என்பவற்றை (5·34)-ஆல் வரையறுக்கப்பட்டபடி x, y, z-ன், சார்பலன்களாகக் கருதப்படுகின்றன.

x-ஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்ய நாம் அடைவது

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial q}{dx} = 0q,$$

ஆகவே,

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F,U)}{D(p,\ x)}}{\dfrac{D(F,\ U)}{D(p,q)}}.$$

இதேபோன்று (5.34)-ஐ y-ஐச் சார்ந்து வகையீட்டு

$$\frac{\partial P}{\partial y}\text{-ஐக் காண}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\dfrac{D(F,U)}{D(y,q)}}{\dfrac{D(F,U)}{D(p,q)}}.$$

(5.34)-ஐ $\bar{z}$-ஐச் சார்ந்து வகையிட்டு $\frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}$ காண நாம் அடைவது

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F,U)}{D(z,q)}}{\dfrac{D(F,U)}{D(p,q)}} \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\dfrac{D(F,U)}{D(p,\bar{z})}}{\dfrac{D(F,U)}{D(p,q)}}.$$

இவ்வாறு கணக்கிட்ட வகைக்கெழுக்களை (5.33)-ன் தீர்வு காண் நியதியில் பிரதியிட்டு பூச்சியமல்ல என நாம் கொள்ளும் $\frac{D(F,U)}{D(p,q)}$ ஆல் பெருக்க நாம் பெறுவது,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial z}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0$$

அல்லது

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} -$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial q} = 0. \quad (5.35)$$

U எனும் சார்பலனைக் காண (5·35)-ல் உள்ள சமடிபத்தான ஒருபருடிந்தான சார்பலனை அடைந்தோம், இதனை இந்த அத்தியாயத்தின் இரண்டாவது பிரிவில் சொன்னதுபோல் தொகைக் காண தன்மை காட்டியின் சமன்பாடு வரும்.

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dv}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} =$$

$$= -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \dots \quad (5{\cdot}36)$$

அப்போது (5·36)-ன் $U, (x, y, z, p, q) = a$ எனும் ஒரு தீர்வு ஆவது காணப்படுகிறது. $F_1 U_1$ எனும் சார்பலன்கள் p,q-ஐச் சாராதன என்றால், அதாவது $\frac{D(FU_1)}{D(p,q)} \neq 0$ என்றால், $U_1(x, y, z, p, q)$ என்பது (5.35)-ன் கோரிய தீர்வு ஆகும். இவ்வாறு $p = p(x, y, z, a)$, $q = q(x, y, z, a)$ என

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$U_1(x, y, z, p, q) = a,$$

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து கண்டு

$dz = p(x, y, z, a)\,dx + q(x, y, z, a)\,dy$-இல்பிரதியிட ஒரு தொடர்பால் தீர்வு காண இயலும் ஃபாஃபியன் சமன்பாடு வருகிறது. இதன் தீர்வு கண்டால் $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ எனும் முதல் சமன்பாட்டில் முழுத் தீர்வு வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$yzP^2 - q = 0. \quad \dots \quad (5.37)$$

எனும் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காணவும்.

(5·36)-ல் உள்ள தொகுதியின் வடிவம்

$$\frac{dx}{2pyz} = -dy = \frac{dz}{2P^2yz - q} = -\frac{dp}{yP^3} = -\frac{dp}{zP^3 + yp^2q}.$$

முதல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, மூன்றாவது விகிதத்தைச் சுருக்கி, தொகை காணக்கூடிய விதம் கொள்ள வருவது

$$\frac{dz}{P^2yz} = -\frac{dP}{P^3y}.$$ இதிலிருந்து $-P = \frac{q}{z}$ ... (5.38)

(5.37), (5.38)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து நாம் காண்பது $p = \frac{a}{z}$, $q = \frac{a_2 y}{z}$ ஆகவே $dz = \frac{a}{z}dx + \frac{a^2y}{z}dz.$

$2z$ ஆல் பெருக்கித் தொகை காண முதல் சமன்பாட்டின் முழுத் வு [illegible] $+ a^2y^2 + b$ என்பதாகும்.

$F(x,y,z,p,q) = 0$ என்பதன் முழுத் தீர்வு $\Phi(x,y,z,a,b) = 0$ என்பதைக் கண்ட பின்னர் பொதுவாகக் கூறுமிடத்து அடிப்படை பிரச்சினையின் தீர்வு காண இயலும். இன்னும் பொதுப்படையான பிரச்சினையாகிய $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ எனும் வரை வழி உள்ள தீர்வுதலத்தையும் கூடக் காணமுடியும்.

$b = b(a)$ எனும் சார்பலனைக் கீழ்வருமாறு வரையறுக்கவும்.

$$\Phi(x, x, z, a, b, (a)) = 0, \qquad \dots \quad (5.40)$$

எனும் சமன்பாடு, $$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} b'(a) = 0, \qquad \dots \quad (5{\cdot}41)$$

எனும் சமன்பாடு இவற்றால் தரப்படும் ஓரலகுத் தொகுதியின் தழுவல் (5.39)-ல் வரைவழிச் செல்லும்படி இருக்கவேண்டும்,

தரப்பட்டுள்ள வரையின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் t-ஐச்சார்ந்த சமன்பாடுகள் (5.40), (5.41) முற்றொருமைகள் ஆகின்றன.

அதாவது,

$$\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a)) = 0. \qquad \dots \quad (5{\cdot}43)$$

$$\frac{\partial \Phi(x(t), y(t)\ a, b(a)}{\partial a} + \frac{\partial \Phi(x(t), y(t), z(t), a. b(a)}{\partial b} b'(a) = 0 \qquad \dots \quad (5.43)$$

ஆனாலும் இந்தச் சமன்பாடுகளிலிருந்து $b = b(a)$ எனும் சார்பலன் காண்பது எளிதல்ல.

(5.42)-ல் உள்ள தொகுதியிலிருந்தும்

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'(t) = 0 \qquad \dots \quad (5.44)$$

என்பதிலிருந்து எளிது அல்லது சுருக்கக் குறியீட்டில் காண்பது

$$(\mathbf{N}.\ \mathbf{t}) = 0$$

இங்கு **t** என்பது $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. ... (5.39) எனும் வரைக்கு வெக்டர் தொடுகோடு ஆகும். **N** என்பது $\Phi = 0$ எனும் தலத்திற்குச் செங்கோட்டு வெக்டராகும். ஆகவே ஏற்றபுள்ளியில் கோடும் தழுவலுக்கும் செங்கோடாகும், (5.44)-ல் உள்ள நியதி வரைகணித நோக்கில் எளிதாக அறியலாம். ஏனெனில் கோரிய தலம் கொடுக்கப்பட்ட வரைவழிச் செல்ல வேண்டும். ஆகவே வரையின் தொடுகோடு, இந்தத் தலத்தின் தொடுதளத்தில் அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

$$z = px + qy + \frac{pq}{4},$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுதலம் $y = 0$, $z = x^2$ எனும் வரைவழிச் செல்லுமாறு காண்க.

இதன் முழுத் தீர்வு (பக்கம் 278-ல் 4-வது வகை காண்க).

$z = ax + by + \dfrac{ab}{4}$ எனும் வடிவில் உள்ளது. தரப்பட்டுள்ள வரையின் சமன்பாட்டைத் துணை அலகில் சொல்லவருவது

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = t^2,$$

$b = b(a)$ எனும் சார்பலன் காண

(5.42), (5.44)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியை அமைப்போம். இங்கு அவை

$$t^2 = at + \frac{ab}{4}, \; 2t = a \text{ ஆகும்,}$$

இங்கு $b = -a_1$, $z = a(x-y) - \dfrac{a^2}{4}$

இந்தத் தொகுதியின் தழுவலைத் தரும் சமன்பாடுகள்

$$z = a(x-y) - \frac{a^2}{4},$$

$$x - y - \frac{a}{2} = 0,$$

a-ஐ நீக்க வருவது $z = (x-y)^2$

(5·36)-ல் உள்ள தொகுதியின் (பக்கம் 276) தொகை காண்பதெளிதானால் தன்மைகாட்டி முறை (காஷி முறை-கீழ்ப் பார்க்கவும்) என்பது விஸ்தரிக்கப்பட்ட காஷிப் பிரச்சினையின் தீர்வு காண்பதற்குப் பயன்படும்.

$x_0 = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$ எனும் வரைவழிச் செல்லும் $F(x, y, z, p, q) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுதலம் $z = z(x, y)$

[பகுதி ஒருபடித்தான சமன்பாட்டு வகையைப்போல் (பக்கம் 256) பார்க்கவும்] என்பது

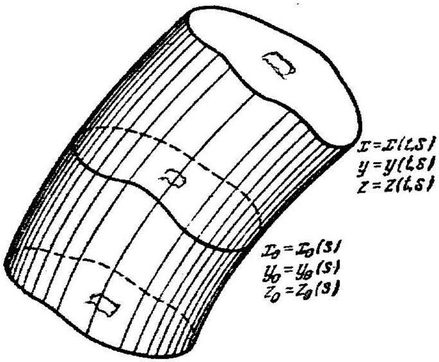
$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s)$$

எனும் ஓரலகு வரைத் தொகுதியிலுள்ள புள்ளிகளால் ஆனது எனக் கருதலாம். இங்கு s என்பது தன்மைகாட்டி எனப்படுவதன் துணை அலகு ஆகும்.

முதலில் பல துணை அலகைச் சார்ந்துள்ள தன்மைகாட்டித் தொகுதியைக் காண்கிறோம். பிறகு $x_0 = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$ எனும் வரைகள் வழியுள்ள தன்மைகாட்டிகளை அமைக்கிறோம். இன்னும் மற்ற நியதிகட்கும் பொருந்த,

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s),$$

எனும் ஒரு துணை அலகு வரைத்தொகுதியை இதனின்று தேர்ந்தெடுக்கிறோம். (படம் 5·4) இந்த வரைகளில் அமையும் புள்ளித் தொகுதியே கோரிய தீர்வுத் தலமாகும். காஷி முறையின் அடிப்படைக் கருத்து சுருக்கமாக இதுவாகும்.



படம் 5–4.

$z = z(x, y)$ என்பது,

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \ldots \quad (5{\cdot}45)$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுதலமாகுக.

x-ஐச் சார்ந்தும், y-ஐச் சார்ந்தும் (5·45)-ல் உள்ள முற்றொருமையை வகையிட,

$$F_x + F_z p\, F_p, \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$F_y + F_z q + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

அல்லது $\dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial y}$ ஆனதால்,

$$\left.\begin{aligned} F_x + F_z p + F_n \frac{\partial P}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_y + F_z q + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (5{\cdot}46)$$

(5.46)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதி p, q, z-ல் பகுதி ஒருபடித்தானவை. இதன் தன்மை காட்டிகள் (x, y)-ல் அறியப் பட்ட சார்பலன்களாகும். (பக்கம் 264 பார்க்கவும்).

அதாவது,

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{Fq} = -\frac{dP}{F_x + yF_x} = -\frac{dq}{F_y + pF_x} = dt. \quad \dots (5{\cdot}47)$$

$$dz = pdx + qdy \quad \dots (5{\cdot}48)$$

என்பதால் தன்மைகாட்டி வழியே

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q$$

அல்லது $\dfrac{dz}{PF_p + qF_q} = dt. \quad \dots (5{\cdot}49)$

ஆகவே (5.47)-ல் உள்ள தொகுதியுடன் இன்னுமொரு தொகுதி (5.49) சேர்க்க முடிகிறது.

இவ்வாறாக $z = z(x, y)$ என்பது (5.45)-ன் தொகுதியின் தீர்வு எனக் கொண்டால் நமக்குக் கிடைப்பது

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt \quad \dots (5.50)$$

(5·50)-லிருந்து (5·45)-ன் சமன்பாட்டின் $z = z(x, y)$ எனும் தீர்வைக் காணுமலேயே $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$, $q = q(t)$ எனும் சார்பலன்களைக் காணமுடியும். அதாவது தன்மைகாட்டி எனப்படும்.

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ என்பதை அறியலாம். தன்மைகாட்டியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்,

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

எனும் தலத்தின் திசையைத் தரும் எண்கள் $p = p(t)$, $q = q(t)$ என்பனவற்றையும் காணலாம்.

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுதலத்தை தன்மைகாட்டியிலிருந்து காண இயலும். என்பதை இங்கு நாம் காட்டுவோம். முதலில்,

$$F(x, y, z, p, q) = c.$$

எனும் (5 50)-ன் தீர்வுவரை வழி F என்பது நிலையானது. என்பதைக் கவனிக்கவும்.

ஏன், (5·50)-ன் தீர்வுவரை வழி)

$$\frac{d}{dt} F(x, y, z, p, q) = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} +$$

$$+ F_p \frac{dp}{dt} + F_q \frac{dq}{dt} = F_xF_p + F_yF_q + F_z(pF_p + qF_q) -$$

$$- F_p (F_x + pF_z) - F_q (F_y + qF_z) = 0.$$

ஆகவே, (5·50)-ன் தீர்வு வரை வழி

$F(x, y, z, p, q) = 0$. இங்கு

$c = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$

(5.50)-ன் தீர்வுவரை வழியே சமன்பாடு)

$F(x, y, z, p, q) = 0$

பொருந்த துவக்க மதிப்புக்கள்

$x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ என்பனவற்றை

$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ எனும்படிக் கொள்ளவேண்டும்.

$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$

எனும்படியுள்ள துவக்க மதிப்புக்கள்

$x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$, $p_0 = p_0(s)$, $q_0 = q_0(s)$

என்பவற்றைக்கொண்டு (5.50)-ன் தொகுதியின் தீர்வு காண நாம் அடைவது

$x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $z = z(t,s)$, $p = p(t,s)$, $q = q(t,s)$

என்பதாம்.

s-ன் ஒருநிலை மதிப்புக்கு ஒருதன்மைகாட்டி

$x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $z = z(t,s)$

என்பதைப் பெறுகிறோம். s-ஐ மாறச்செய்ய, ஒரு தலம் வருகிறது. இதன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $p = p(t,s)$, $q = q(t,s)$ என்பதற்குச் சமன்பாடு $F(x, y, z, p, q) = 0$ பொருந்துகிறது. ஆனால் அப்போது

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

என்று பொருந்துகிறதா என்றும்—அதாவது

$dz = p\,dx + q\,dy$ அல்லது

$$dz = p\left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt\right) + q\left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

அல்லது இதற்குச் சமமான இரண்டு நியதிகள்,

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=0. \qquad \dots (5\cdot52)$$

$$p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}=0. \qquad \dots (5\cdot53)$$

பொருந்துகின்றன என்பதைக் காணவேண்டும். பின்னர் உள்ள சமன்பாடுகள் முற்றொருமையாகின்றன. ஏனெனில் (5·50)-ன் தொகுதி அமைக்கும்போது தன்மைகாட்டி வழி $pz = pdx + qdy$ என இருக்க வேண்டும். ஏற்கெனவே திட்டப்படுத்தியுள்ளோம். இது நேரடியாகப் பார்க்கும்போதும் (5·50)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியால்,

$$\frac{\partial x}{\partial t}=F_p,\ \frac{\partial y}{\partial t}=F_q,\ \frac{dz}{dt}=pF_p+qF_q,$$

(5·50)-ல் $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ -க்குப் பதில், s நிலைஎண் எனக் கொண்டதால், $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ என எழுதினோம் என்பதால், தெரிய வருகிறது.

(5·52)-ல் சமன்பாடுகள் பொருந்த $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது சில கட்டுப்பாடுகளை ஏற்படுத்தவேண்டும். ஏன்,

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=U, \qquad \dots (5\cdot54)$$

என இடுக. $U|_{t=0}=0$ எனும் துவக்க மதிப்பால் $U\equiv0$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து வருவது.

$x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ எனும் சார்பலன்களை $p_0(s)\,x'_0(s)+q'_0(s)\,y'_0(s)-z'_0(s)=0$ எனக் கொண்டால் எல்லா t-ன் மதிப்புக்களுக்கும் $U\equiv0$.

(5.54)-ஐ tஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}=p\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}+q\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial}-\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial s}$$

(5.53)-ல் உள்ள முற்றொருமையை s-ஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்து முடிவைப் பயன்படுத்த

$$\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+p\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+q\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=0.$$

நாம் அடைவது

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}$$

அல்லது (5,50)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளினால்

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -(F_x + pF_z)\frac{\partial x}{\partial s} - (F_y + qF_z)\frac{\partial y}{\partial s} - F_p\frac{\partial q}{\partial s}$$

$$- F_y\frac{\partial q}{\partial s} = -\left(F_x\frac{\partial x}{\partial s} + F_y\frac{\partial y}{\partial s} + F_z\frac{\partial p}{\partial s} - F_p\frac{\partial p}{\partial s} + F_q\frac{\partial q}{\partial s}\right) - Fz\left(p\frac{\partial x}{\partial s} + p\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

$$= -\frac{q\partial}{\partial s}F\}$$

$$- F_zU = F_zU$$

ஏனெனில் $F \equiv 0$ ஆகவே $\frac{\partial}{\partial s}\{F = 0.$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -F_zU \qquad \dots \quad (5.55)$$

$$-\int_0^t F_z\, dt$$

எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து $U = U_0e$ எனக் காண்கிறோம். ஆகவே $U_0 = 0$ என்றால் $U \equiv 0$. இது $U|_{t=0} = 0$ எனும் நியதிக்குட்பட்ட (5.55)-ன் ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வு $U \equiv 0$ என்பதன் தனித்தன்மையிலிருந்தும் புலனாகிறது.

இவ்வாறு,

$$F(x, y, z\ p, q) = 0. \qquad \dots \quad (5\cdot45)$$

எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வை $x_0 = x_0(s), y_0 = y_0(s), z_0 = z_0(s)$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களுடன் காணும்போது,

$$F(x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0.$$

$$p_0(s), x'_0(s) + (q_0(s), y'_0(s) - z'_0(s) = 0.$$

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து காஷிமுறையைப் பின்பற்றி $p_0 = p_0(s), q_0 = q_0(s)$ எனும் சார்பலன்களைக்கண்டு பின்னர்,

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt \quad (5\cdot50)$$

எனும் சமன்பாடுகளின் தீர்வை,

$t = 0$ எனும்போது $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$. $p = p_0(s)$.

$q = q_0(s)$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களுடன் காண்கிறோம்.

$x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$. $z = z,(t, s)$ எனும் மூன்று சார்புலன்கள் (5·50)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (5.45)-ல் உள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுத்தலத்தைத் துணை அலகுச் சமன்பாடுகளில் தருகின்றன.

மேற்கூறியனவற்றை ஒருப்படித்தான பகுதி வகை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குப் பல தனிமாறிகளைக் கொண்டவைகளுக்கு புகுத்தலாம். அத்தகைய சமன்பாடு

$$P(x_1, x_2, x \ldots x_n, z_1, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \quad \ldots \quad (5\cdot56)$$

இங்கு

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \, (i = 1, 2, \ldots n).$$

(5.56)-ன் n பரிமாண தீர்வுத்தலம் $z = z(x_1, x_2, \ldots x_n)$ காணவேண்டும். இது

$$x_{i_0} = x_{i_0}(s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \, (i = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (5\cdot57)$$
$$z_0 = z_0(s_1, s_2, \ldots s_{n-1}).$$

எனும் $(n-1)$ பரிமாண வரை வழிச் செல்லவேண்டும் தற்போதுக்கு,

$$p_{i_0} = p_{i_0}(s_1 \; s_2, \ldots s_{n-1}) \, (i = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (5\cdot58)$$

எனும் துவக்க மதிப்புக்களை அறிவோம் எனக் கொள்வோம்) துணைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண,

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{F_{pn}} = \frac{dz}{\sum_{i=1}^{n} p_i F_i}$$

$$= -\frac{dp_1}{F_{x_1} + p_1 F_z} = \ldots = \frac{dp_n}{F_{x_n} + p_n F_z} = dt. \ldots (5\cdot59)$$

(5·57, 5·58-ன் துவக்க மதிப்புக்களுடன்) நாம் அடைவது,

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(t, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \\ z &= z(t, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \\ p_i &= p_i(t, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots (5\cdot60)$$

$s_1, s_2, \dots s_{n-1}$ எனும் நிலை மதிப்புக்களுக்கு $(x_1, x_2 \dots x_n, z)$ எனும் கூறுகளுடைய வெளியில் (5·60)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் தன்மை காட்டிகளைத் தருகின்றன. இதன் ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமென,

$$Z - z = \sum_{i=1}^{n} p_i (X_i - x_i). \qquad \dots (5\cdot 61)$$

எனும் தலங்களின் திசையைத் திட்டப்படுத்தும் எண்கள் $p_i = p_i (t, s, \dots s_{n-1})$ உள்ளன. தன்மைகாட்டியும் (5·61)-ல் உள்ள தலங்களும் சேர்ந்து தன்மைகாட்டித் துண்டுகள் (Characteristic strips) எனப்படும். $(s_1, s_2, \dots s_{n-1})$ எனும் துணை அலகுகள் மாற, $(n-1)$ துணை அலகுத் தன்மைகாட்டித் தொகுதி,

$$x_i = x_i (t, s, \dots s_{n-1})\ z = z (t, s, \dots s_{n-1}).$$

(5·57)-ல் உள்ள $(n-1)$ பரிமாண வெளி வரை வழிச் செல்லும் தன்மைகாட்டித் தொகுதி வருகிறது.

இப்போது (5·60)-ல் உள்ள தன்மைகாட்டித் தொகுதியில் அமையும் புள்ளிகள் தக்கபடி சார்பலன்கள் $p_{i_0} = p_{i_0} (s_1, s_2, \dots s_{n-1}) (i = 1, 2, \dots n-1)$ இவற்றைக் கொள்ள கோரிய n பரிமாணத் தீர்வுதலத்தைத் தருகின்றன என நிறுவுவோம். ஆகவே $p_{i_0} (s_1, s_2, \dots s_{n-1})$ எனத் திட்டமானச் சார்பலன்களைத் தேர்ந்தெடுத்தால்,

$$(1) \quad F (x, t, s_1, s_2, \dots s_{n-1}) \dots x_n (t, s_1, s_2 \dots s_{n-1})$$
$$z (t, s, \dots s_{n-1})\, p_1 (t, s_1, s_2, \dots s_{n-1}),$$
$$p_n (t, s_1, s_2, \dots s_{n-1}) \equiv 0.$$

(2) $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i} (i = 1, 2, \dots n)$. அல்லது இதையே வேறு விதமாகக் கூற,

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i.$$

$F (x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n)$ என்பது (5·59)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் முதல் தொகை என எளிதில் சரி பார்க்க முடியும். ஏன் (5·59)-ல் உள்ள தீர்வுவரைத் தொகுதிவழி

$$\frac{d}{dt} F (x_1, x_2, \dots x_n, z\, p_1, p_2, \dots p_n) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{dx_i}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{dp_i}{dt} \equiv .$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} F_{p_i} + F_z \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}$$

$$(F_{x_i} + p_i F_z) \equiv 0$$

ஆகவே, (5·59)-ல் உள்ள தொகுதியின் தீர்வுவரை வழி,

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) = c.$$

இங்கு c என்பது நிலையெண்; $F(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \dots p_{n0})$-க்குச் சமம்.

(5·59)-ல் உள்ள தொகுதியின் தீர்வுவரை வழி (5·56)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளுக்குப் பொருத்தமாக (5·60)-ன் சார்பலன்கள் இருக்க, $p_{i0}(s_1, s_2, \dots s_{n-1})$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களை

$$(1)\ F(x_{i0}(s_1, \dots s_{n-1}) \dots x_n(s_1, s_2, \dots s_{n-1}), z(s_1, \dots s_{n-1})$$

$$p_1(s_1, \dots s_{n-1}) \dots p_n(s_1, \dots s_{n-1})) = 0,$$

எனும்படிக் கொள்ளவேண்டும்.

இனிமேல் செய்யவேண்டியது,

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i \quad \text{அல்லது}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}\, dt + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial s_i}\, ds_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{\partial x^i}{\partial t}\, dt + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\, ds_j . \right)$$

என்பதைச் சரிபார்க்கவேண்டும்.

இந்த முற்றொருமை கீழ்க்கண்டதற்குச் சமம்.

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_1 \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0. \qquad \dots (5{\cdot}62)$$

இதனுடன்,

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0\ (j=1, 2, \dots n-1) \dots (5{\cdot}63)$$

(5·62)-ல் உள்ள முற்றொருமையின் உண்மை எளிதில் புலனாகிறது. ஏனெனில், (5·59)-ன் தொகுதியைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} \text{ அல்லாமலும் } \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i} (i = 1, 2, \dots n).$$

$\left(\frac{dz}{dt}, \frac{dx_i}{dt}\right)$ என்பதற்குப் பதிலாகப் பகுதி வகைக்கெழுக்களை நாம் பயன்படுத்துகிறோம். ஏனெனில், (5·59)-ல் உள்ள தொகுதியில் s_j-க்கள் நிலை எனக் கொள்ளப்பட்டது.)

குறிப்பிட்ட $p_{i_0} (s_1, s_2, \dots s_{n-1})$ எனும் துவக்க மதிப்புகளுக்கு மட்டும் உண்மையான (5·62)-ன் தொகுதி சரியென நிறுவ நாம் இடுவது,

$$U_j = \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, \dots n - 1).$$

t-ஐச் சார்ந்து U_j-ன் வகைக்கெழு காண நாம் அடைவது

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \quad \dots \quad (5·64)$$

(5.62)-ல் உள்ள முற்றொருமையை s_j-ஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்த முற்றொருமையைப் பயன்படுத்த

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s_j} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0.$$

(5·64)-ல் உள்ள சமன்பாட்டை வேறுவிதமாக எழுத

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial p_i x_i}{\partial s_j} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_i}$$

(5·59)-ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியைப் பயன்படுத்த நாம் அடைவது

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial s_i} Fp_i + \sum_{i=1}^{n} (Fx_i + p_i F_z) \frac{\partial x_i}{\partial s_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial s_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_j}$$

$$- \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x}{\partial s_j} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_j} \{ F \} - F_z U_j.$$

முற்று பகுதி வகைக்கெழு $\frac{\partial}{\partial s_j} \{ F \} = 0$. ஏனெனில் $F = 0$ ஆகவே U_j எனும் சார்பலன்கள் $U_j \Big|_{i=0} \equiv 0$, என ஆனால் $U_j \equiv 0$ எனும் தனித்தன்மை வாய்ந்த தீர்வுடைவ $\frac{\partial U_j}{\partial t} = - F_z U_j$ எனும் சமபடித்தான ஒருபடித்தான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் ஆகும்.

ஆகவே, $U_j \Big|_{t=0} = 0$. அல்லது $\left(\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_1 \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{t=0} = 0.$

எனும்படி p_{i_0} $(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவற்றைத் துவக்க மதிப்புக்களாகக் கொண்டால் அப்போது

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0. \; (j = 1, 2, \ldots n-1)$$

ஆகவே (5·56)-ல் உள்ள தலத்தின் மீது

$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i$. அதாவது $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$

இவ்வாறு

$$x_{i_0} = x_{i_0} (s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$z_0 = z_0 (s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$ எனும் $(n-1)$ பரிமாண தலம் வழிச் செல்லும் $F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுதலத்தைக் காண $p_{i_0} (s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$ எனும் துவக்க மதிப்புக்களை

$$\left. \begin{aligned} & F(x_{10}, x_{20}, \ldots z, p_{10}, p_{20} \ldots p_{n_0}) = 0, \\ & \frac{\partial z_0}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_{i_0} \frac{\partial x_{i_0}}{\partial s_j} = 0 \; (j = 1, 2, \ldots n-1). \end{aligned} \right\} (5\cdot 65)$$

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து திட்டப்படுத்தி பிறகு,

$$x_{i_0} = x_{i_0}(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$$
$$z_0 = z_0(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$$
$$p_{i_0} = p_{i_0}(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$$

எனும் துவக்க மதிப்புக்களுடன் (5·59)-ன் தொகுதியின் தீர்வு காண நாம் அடைவது,

$$x_i = x_i(t_1, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

$$z = z(t, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}). \qquad \ldots (5.66)$$

$$p_i = p_i(t_1, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad \ldots (5·67)$$

5·66, 5.67-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் கோரிய தீர்வுதலத்தின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகளாகும்.

குறிப்பு: நாம் (5·65)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து p_{i_0}-ன் தீர்வு காணலாம் எனவும் (5·59)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் உள்ளமை தேற்ற நியதிகட்குட்பட்டவை எனக் கொண்டுள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு : 1

$x = 1, z = y$ வழிச் செல்லும் $z=pq$-ன் தீர்வுத்தலம் காண்க.

$x = 1, z = y$ எனும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை துணை அலகு வடிவத்தில் எழுத. $x_0 = 1, y_0 = s, z_0 = s.$

(5.65)-லிருந்து $p_0(s), q_0(s)$ காண $s=p_0, q_0, 1 - q_0 = 0$ ஆகவே, $p_0 = s, q_0 = 1$ (5.59)-ன் தொகை காண

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = dt.$$

$$p = c_1 e^t, q = c_2 e^t, x = c_2 e^t + c_3, y = c_1 e^t + c_4$$

$$z = c_1 c_2 c^{2t} + c_5.$$

$t = 0$ எனும்போது $x = 1, y = s, p = s, q = 1$

என்பதால் $p = se^t, q = e^t, x = e^t, y = sc^t, z = se^{2t}.$

ஆகவே கோரிய தீர்வுதலம்

$$x = e^t, \quad y = se^t, \quad z = se^{2t}$$

அல்லது $z = xy$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2 \text{ என்பதன் தீர்வு காண்க.}$$

$x = 0$ எனும்போது $z = y$ என துணை அலகில் $x_0 = 0$

$y_0 = s_1, z_0 = s$ எனும்படி இருத்தல்வேண்டும்,

$p_0(s)$, $q_0(s)$ என்பனவற்றைத் திட்டப்படுத்துக.

$p_0^2 + q_0^2 = 2, \quad 1 - q_0 = 0.$

ஆகவே, $q_0 = 1 \quad p_0 = \pm 1.$

(5.59)-ல் உள்ள தொகுதியின் தொகை காண

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{4} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt.$$

$p = c_1, q = c_2, x = 2c_1 t + c_3, y = 2c_2 t + c_4, z = 4t + c_5$

துவக்க மதிப்புக்கள் $p_0 = \pm 1, q_0 = 1$

$x_0 = 0, y_0 = s, z_0 = s.$ இவற்றைப் பயன்படுத்த

$p = \pm 1, q = 1, x = \pm 2t, y = 2t + s, z = 4t + s.$

கடை மூன்று சமன்பாடுகள் நமக்கு வேண்டிய தீர்வுதலத்தின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகளாகும். t, s எனும் துணை அலகுகளை நீக்க $z = y \pm x$.

இயக்கவியல் பிரச்சினைகளில்

$$\frac{\partial v}{dt} + H + (t, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \quad \ldots (5.68)$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கு $\left(pi = \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ காஷிப் பிரச்சினை தீர்க்க வேண்டிவரும். இது (5·56)-ன் ஒரு தனிப்பட்ட வகையாகும். (5.68)-ல் உள்ள சமன்பாட்டிற்குப் பயன்படுத்தும்போது காஷி முறை—இதனை ஜேகோபியின் முதல் முறை என்றும் கூறுவர்—கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைத் தருகின்றன.

$$dt = \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = -\frac{dP_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} =$$

$$-\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{dv}{\sum_{i=0}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial t}}$$

ஆகவே

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}(i=1,2,...n) \quad ... \quad (5\cdot69)$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=0}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

அல்லது

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p^i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \quad ... \quad (5\cdot70)$$

(5·69)-ல் உள்ள $2n$ சமன்பாட்டுத் தொகுதியில் v இல்லை.

(5·70)-ன் உதவியில்லாமலே இவற்றின் தொகை காண முடியும். பிறகு (5.70)லிருந்து v-ஐ நுண்தொகை கண்டு காண முடியும். இதில்தான் (5·68-ல்) உள்ள தொகுதிக்குக் காஷி முறையைப் பயன்படுத்துவதில் ஒரு தனிச் சிறப்பு இருக்கிறது. அல்லாமலும் (5.50)-ல் துணை அலகு புகுத்தவேண்டிய தேவையு மில்லை. ஏனெனில் துணை அலகிற்குப் பதில் தனி மாறியாகிய t-ஐயே பயன்படுத்தலாம்.

உத்திக் கணக்குகள்

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$ (2) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

(3) $x \frac{\partial z}{\partial y} = z$ (4) $z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

(5) $x \frac{\partial z}{\partial x} = z$ ($x = 2$, எனின் $z = y$.)

(6) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, $y = 1$ எனின் $z = 3x$

7. $yz \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $x = 0$ எனின் $z = y^3$.

8. $z = axy$ எனும் தலத்தொகுதிக்குச் செங்குத்தாக அமையும் தலங்களைக் காண்க.

9. $xyz = a$ எனும் தலங்களுக்குச் செங்குத்தாக அமையும் தலங்களைக் காண்க.

10. $\frac{x}{3} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{5} \frac{\partial z}{\partial y} = z - 5.$

11. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

12. $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 4u.$

13. $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 0.$

14. $\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, [$x = 1$ எனின் $z = y^2$].

15. $(y^2 + z^2 - x^2)\,dx + xzdy + xydz = 0.$ என்பதன் தீர்வை, ஒரு தொடர்பினால் மட்டும் காணமுடியுமா?

16. $(y + 3z^2)dx + (x + y)dy + 6xzdz = 0.$ என்பதன் தீர்வை ஒரு தொடர்பால் மட்டும் காண்க.

17. $pq = x^2y^2$ என்பதன் முழுத் தீர்வையும் காண்க.

18. $z = px + qy + p^3q^3$ என்பதன் முழுத்தீர்வையும் காண்க.

19. $pq = 9z^2$ என்பதன் முழுத்தீர்வையும் காண்க.

20. $p = \sin q$ என்பதன் முழுத்தீர்வையும் காண்க.

21. $\mathbf{F} = (2xy - 3yz)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3xz)\,\mathbf{j} - 3xy\,\mathbf{k}$. எனும் களத்தின் வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தான தலத்தைக் காண்க.

22. $\mathbf{F} = (2x-y)\,\mathbf{i} + (3y-z)\,\mathbf{j} + (x-2y)\,\mathbf{k}$ எனும் வெக்டர் களத்தின் வெக்டர் வரைகளுக்குக் குத்தாகவுள்ள தலத்தொகுதியைக் காண்க.

23. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, எனும் களத்தின் வெக்டர்வரைக்குக் குத்தாகவுள்ள வெக்டர் வரைகள், தலங்கள் இவற்றைக் காண்க.

24. $z = pq + 1$, $y = 2$ எனின், $z = 2x + 1$.

25. $2z = pq - 3xy$, $x = 5$ எனின், $z = 15y$.

26. $4z = p^2 + q^2$, $x = 0$ எனின், $z = y^2$.

இரண்டாம் பாகம்

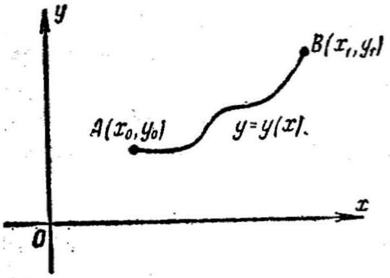
மாறுபடு கணிதம்

(Calculus of Variations)

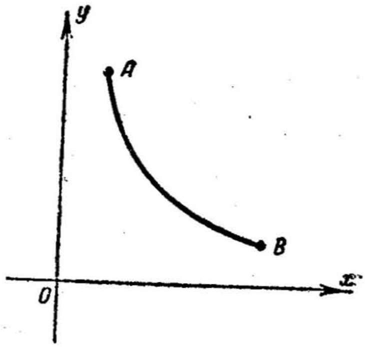
முன்னுரை

பௌதிக வியலின் பல தீர்வமைவுகளில், $z = f(x)$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் கணக்கிடத் தேவை இருப்பதோடல்லாமல், பல சமயங்களில், சார்பரம் எனப்படும் சில சிறப்பு அளவுகளின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களையும் காண வேண்டியிருக்கும்.

சார்பரங்கள் (Functionals) மாறிகளாகும்; அவற்றின் மதிப்பை ஒன்று அல்லது பல சார்புகளைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கிறோம்.



படம் A



படம் B

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தளத்தில் (அல்லது வெளியில்) $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் வளைவரையின் வில்லின் நீளமான l, ஒரு சார்பரம் ஆகும். வளைவரையின் சமன்பாடு $y = y(x)$, கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், l எனும் அளவை,

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

என்பதிலிருந்து கணக்கிடலாம்.

ஒரு மேற்பரப்பின் பரப்பு S-ம் ஒரு சார்பரம் ஆகும்; ஏனெனில் இது நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் மேற்பரப்பைப் பொருத்தது. அதாவது மேற்பரப்பின் சமன்பாடான $z = z(x, y)$-ல் நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் $z(x, y)$ என்ற சார்பின் அமைப்பைப் பொருத்தது. மேற்பரப்பு S-ன் வீழ்ச்சி xy-தளத்தில் D எனில் தளத்தின் பரப்பு,

$$S[z(x,y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

ஆகும்,

நிலைமத் திருப்புத்திறன், நிலையியல் திருப்புத்திறன், ஒரு சீரான வளைவரை அல்லது மேற்பரப்பின் புவி ஈர்ப்புமையத்தின் அச்சுக்கூறுகள் இவை யாவுமே சார்பரங்கள் ஆகும்; ஏனெனில் இவற்றின் மதிப்புக்கள் நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் வளைவரையையோ அல்லது மேற்பரப்பையோ, அதாவது அவ்வளைவரை அல்லது மேற்பரப்புக்காக எடுத்துக்கொள்ளப்படும் சார்புகளைப் பொருத்தே இருக்கும்.

பொதுவாக $z = f(x)$ என்ற ஒரு சார்பில், ஒவ்வோர் எண் மதிப்புக்கும் ஏற்ப மற்றோர் எண் மதிப்பு கிடைக்கும். ஆனால் ஒரு சார்பரத்தில், ஒவ்வோர் சார்புக்கும் (அல்லது வெக்டர்சார்புக்கும். ஏற்ப ஒரு எண் மதிப்பு கிடைக்கின்றது. சார்பரங்களுக்கு உரித்தான இப்பண்பை மேற் கூறிய எல்லா எடுத்துக்காட்டு களிலும் காண்கிறோம்.

சார்பரங்களின் மீப்பெரு, மீச்சிறு, மதிப்புக்களைக் காண பயன் படும் வழிமுறைகளை மாறு நுண் கணிதத்தில் காண்கிறோம். ஒரு சார்பின் பெருமத்தையோ அல்லது சிறுமத்தையோ கணக்கிட வேண்டிய தீர்வமைவுகளை, மாறுபடு தீர்வுவமைவுகள் என்கிறோம்.

இயக்கவியலிலும், பௌதிகவியலிலும் காணப்படும் பல்வேறு விதிகளும் ஒரு நிலையில், அச்சூழ்நிலையில் கிடைக்கப்பெறும் ஒரு சார்பரம் அதன் பெருமத்தையோ அல்லது சிறுமத்தையோ எய்த வேண்டும் என்ற நிலையிலேயே அமைகின்றன. இவ்வாறு முடிவுறும் அவ்விதிகளை சந்தர்ப்பத்திற்கு ஏற்றவாறு, இயக்க அல்லது பௌதிக மாறுபடு கோட்பாடுகள் என்கிறோம். எடுத்துக் காட்டாக மீச்சிறு வினைக்கோட்பாடு, ஆற்றல் காப்பு விதி உந்தக் காப்பு விதி, சுழலுந்தக் காப்புவிதி, முதுபழங் கொள்கை களிலும், சார்ச்சிக்களத் தத்துவக் கொள்கையிலும் காணப்

பெறும் பல்வேறு மாறுபாடு கோட்பாடுகள் ஒளியியலில் ஃபெர்மாட்டின் தத்துவம் போன்றவையும், இன்னும் பற்பல மாறுபாடு கோட்பாடுகள் அல்லது அவற்றிலிருந்து எளிதில் கிடைக்கப் பெறுபவையே ஆகும்.

1696-ல் முதன் முதலாக வளர ஆரம்பித்த மாறுநுண் கணிதவியல் ஆய்லர் (1707—1783) செய்த சில அடிப்படை ஆராய்ச்சிகளுக்குப் பிறகு, தனக்கென ஒரு தனிப்பாதையை வகுத்துக்கொண்டு கணித உலகில் ஒரு தனி இயலாகவே ஆகிவிட்டது; ஆய்லரை (Euler) இவ்வியலுக்கு அடிகோலியவர் என்று சொன்னாலும் மிகையாகாது.

மாறு நுண் கணிதவியல் வளர்ச்சி அடைய மூன்று தீர்வமைவுகள் பெரிதும் காரணமாயிருந்தன:

விரைவு வளைவரைத் தீர்வமைவு (The problem of the brachistochrone):

1969-ல் ஜான் பெர்னேலி, ஒரு துகள் விரைவில் இறங்கும் பாதையைக் கணக்கிட முற்படும் கடிதம் ஒன்றை வெளியிட்டார். இதில் ஒரு நிலைக்கோட்டில் அமையாத A, B என்ற புள்ளிகளில் A-யிலிருந்து புறப்படும் துகள் B–ஐ மிகக் குறுகிய காலத்தில் வந்தடைய எடுத்துக்கொள்ளும் A, B–ஐச் சேர்க்கும் பாதையைக் கணக்கிடுதல் நிலைக்களமாக அமைந்தது (படம். ஆ).

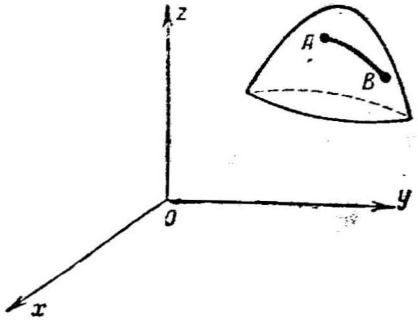
A-யிலிருந்து B–க்கு இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரம் A, B-ஐச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடே எனினும், துகளின் திசைவேகம் இந் நேர்க்கோட்டு இயக்கத்தில், ஒப்புநோக்குங்கால், மெதுவாகவே அதிகரிப்பதால், விரைவில் துகள் இறங்கும் பாதை இந் நேர்க்கோடாக இருக்கமுடியாது என்று எளிதில் காணலாம். A-யின் அருகில் துகளின் பாதை செங்குத்துச் சரிவாக அமையுமேயானல், பாதையின் நீளம் அதிகமானபோதிலும், பாதையின் கணிசமான அளவு அதிகவேகத்தில் கடக்கப்பட்டுவிடுமாதலால் இவ்வாறான ஒரு வளைவரையே ஏற்றமிகுந்ததாகும் எனப் புலனாகின்றது. இத் தீர்வமைவை ஜான் பெர்னேலியும், ஜேகப் பெர்னேலி, லெய்ப்னிட்ச் (Leibnitz), நியூட்டன், லே ஆஸ்பிடல் (L' Hospital) போன்ற பலரும் ஆராய்ந்து முடிவு கண்டனர். இவ்விரைவுப் பாதை A, B-ஐச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடாக இல்லாமல், இவ்விரு புள்ளிகள் வழியே அமையும் ஓர் உருள் வளையே ஆகும் என முடிவு கட்டப்பட்டது.

புவிக்குறைத் தொலைவு வரைத் தீர்வமைவு (The problem of Geo-desics) :

$\varphi(x, y, z) = 0$ என்ற தளத்தின்மேல் அமைந்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் குறைந்த தூரமுடைய கோட்டினை காண்போம். இவ்வாறான மிகக் குறைந்த நீளமுடைய கோடுகளை, புவிக்குறைத் தொலைவு வரைகள் (geodesics) என்கிறோம். இணைக்கப்பட்ட அல்லது கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்ட எல்லையம் கொண்ட மாறுபடு தீர்வமைவுக்கு இது ஒரு சிறந்த எடுத்துக்காட்டாகும். இங்கு

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx,$$

என்ற சார்பரத்தின் சிறுமம் காணவேண்டும். இதில் காணப் பெறும் $y(x)$, $z(x)$ என்ற இரு சார்புகளும் $\varphi(x, y, z) = 0$. என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கு இணங்கியவை என்பது குறிப்பிடத்



படம் C.

தக்கது. இத் தீர்வமைவுக்கு 1698-ல் ஜேகப் பெர்னோலி ஒரு தீர்வு கண்டாரெனினும், பொதுவாக இதுபோன்ற தீர்வமைவுகளைத் தீர்க்கும் முறையினை ஆயிலர், லெக்ராஞ்ச் பெர்னோரின் நூல்களிலேயே காணமுடியும்.

சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவு (The isoperimetric problem) :

l நீளச் சுற்றளவுடன், அதிகபட்ச பரப்பை அடக்கும் வளை வரையைக் காண்பதே இத் தீர்வமைவு ஆகும். பண்டையகாலக் கிரேக்கர்களே அறிந்திருந்த இது ஒரு வட்டமே ஆகும். இங்கு பரப்பை S எனக் குறிப்பிட, வளைவரையின் நீளம் கொடுக்கப் பட்ட l என்ற துணை நிபந்தனையுடன், S என்ற சார்பரத்தின் எல்லையம் காணவேண்டும்.

அதாவது,

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt,$$

என்ற l எனும் சார்பரம் ஒரு நிலையான மதிப்புடையது இவ்வாறான நிபந்தனைகளை சமச்சுற்றளவு நிபந்தனைகள் என்கிறோம். சமச்சுற்றளவு நிபந்தனைகளை கொண்ட தீர்வமைவின் முடிவுகளைக் காண பொதுவான முறைகளை ஆயிலர் விரிவாக விளக்கியுள்ளார்.

இனி, பலவிதமான மாறுபடு தீர்வமைவுகளின் தீர்வுகாணும் முறைகளைக் கண்டறிவோம்; முக்கியமாக பயன் முறையில் அடிக்கடிக் காணப்பெறும் கீழ்வரும் சார்பரங்களுக்கு எல்லையங்கள் காணும் முறைகளைப் பார்ப்போம்:

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left\{x, y(x), y'(x)\right\} dx\,,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left\{x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right\} dx\,,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left\{x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x) \ldots \ldots, y'_n(x)\right\} dx\,,$$

$$\iint_D F\left\{x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\} dx, dy.$$

இவை எல்லாவற்றிலும் சார்பு F கொடுக்கப்பட்டுள்ளது;

$y(x), y_1(x), \ldots y_n(x), z(x, y)$ என்ற சார்புகள்

சார்பரங்களின் மாறிகளாகும்.

6. நிலையான வரம்புடைய தீர்வமைவு களில் மாறல் முறைகள்

1. மாறல்களும், அதன் பண்புகளும்

மாறுபடு தீர்வமைவுகளின் தீர்வைக் காணும் முறைகள்: அதாவது, சார்பரங்களின் பெரும, சிறும மதிப்புகளைக் கண்டறியும் முறைகள் பெரும்பாலும் சார்புகளின் பெரும, சிறும மதிப்புகளைக் கண்டறியும் முறைகளையே ஒத்திருக்கின்றன. எனவே, சார்புகளின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காணும் அறிமுறைகளைச் சுருக்கமாகக் கூறி அவற்றிற்கு இணையாக சார்பரங்களுக்கான தேற்றங்களைக் காண்போம்.

1. ஓர் இடைவெளியில், i^x எனும் மாறியின் ஒவ்வோர் மதிப்புக்கும், z எனும் மாறியின் மதிப்பைக் காணமுடியும். எனில். அதாவது x எனும் ஒரு எண்ணுக்கு z எனும் ஒரு எண் இயைந்து இருக்குமெனில், z எனும் மாறியை, x எனும் மாறியின் 'சார்பு' எனக் கூறுகிறோம். [$z = f(x)$ என எழுதுவது மரபு.] பல மாறிகளைச் சார்ந்த சார்புகளையும் இவ்வாறே வரையறுக்கிறோம்.

$y(x)$ எனும் அமைப்புடைய ஒரு சார்பு இனத்தின் ஒவ்வோர் சார்பு $y(x)$-க்கும், v எனும் மாறியின் மதிப்பைக் காணமுடியும். எனில், அதாவது $y(x)$ எனும் ஒரு சார்புக்கு v எனும் ஓர் எண் இயைந்து இருக்குமெனில், v எனும் மாறியை (y, x) எனும் சார்பைச் சார்ந்த 'சார்பரம்' என்கிறோம். [$v=v[y(x)]$ என எழுதுவது மரபு. பல சார்புகளைச் சார்ந்த சார்பரங்களையும், பல சார்பிலா மாறிகளினுலான சார்புகளைச் சார்த சார்பரங்களையும் இவ்வாறே வரையறுக்கிறோம்.

2. $f(x)$ எனும் சார்பின் மாறி x-ன் ஏற்றம் Δx, மாறியின் இரு மதிப்புகளின் வித்தியாசம் ஆகும். $\Delta x = x - x_1$. சாராமாறி x எனில், x-ன் வகையீடும், ஏற்றமும் ஒன்றுகும். $dx = \Delta x$.

$v[y(x)]$ எனும் சார்பரத்தின் மாறி $y(x)$-ன் ஏற்றம் அல்லது மாறல், இரு சார்புகளின் வித்தியாசம் ஆகும். $\delta y = y(x) - y_1(x)$. இங்கு $y(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பு இனத்தில் ஏதோ ஒரு சார்பு எனக் கொள்கிறோம்.

3. x-ன் ஒரு சிறிய மாறுதலுக்கு இயைந்து, சார்பு $f(x)$-ன் மாறுதலும் சிறிது எனில், $f(x)$-ஐ தொடர்ச்சியான சார்பு என் கிறோம்.	$y(x)$-ன் ஒரு சிறிய மாறுதலுக்கு இசைந்து, சார்பரம் $v[y(x)]$-ன் மாறுதலும் சிறிது எனில், $v[y(x)]$-ஐச் தொடர்ச்சியான சார்பரம் என்கிறோம்.

தொடர்ச்சியான சார்பரத்தை வரையறுக்கும்பொழுது சற்று விளக்கம் தேவைப்படுகின்றது. சார்பரத்தின் மாறியான $y(x)$-ன் எவ்வளவு மாற்றத்தைச் சிறியது எனக் குறிப்பிட முடியும் என்ற ஐயம் ஏற்பட இடமுண்டு. அதாவது, $y = y(x)$, $y = y_1(x)$. என்ற சமன்பாடுகள் குறிப்பிடும் வளைவரைகளை எப்போது அருகருகே இருக்கின்றன. அல்லது எப்போது சற்றே மாறு பட்டன என்கிறோம், என்ற ஐயம் ஏற்படும்.

x-ன் எந்த மதிப்புகளுக்கெல்லாம் $y(x)$-ம், $y_1(x)$-ம் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா அங்கெல்லாம் அவற்றின் வித்தியாசமான $[y(x) - y_1(x)]$-ன் தனிப் பெருமானம் சிறியதாக இருந்தால், $y(x)$-ம், $y_1(x)$-ம் அருகருகே உள்ளன எனக் கொள்ளலாம்; அதாவது அவ் வளைவரைகளின் நிலைத் தூரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று எவ்வளவு அருகாமையில் உள்ளதோ, அந்த அளவு அவ் வளை வரைகள் அருகில் இருக்கின்றன எனக் கொள்ளலாம்.

இவ்வாறு இரு வளைவரைகள் நெருங்கியுள்ள தன்மையை வரையறுப்பதால், பயன்முறையில் அடிக்கடி வரும்.

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_1} F(x, y, y')\, dx,$$

என்பதனைப் போன்ற சார்பரங்கள். தொகைப்படுத்தப்படும் சார்பில் y' என்ற மாறி இருப்பதன் காரணத்தால் மட்டுமே தொடர்ச்சியாக இருக்கும் எனக் காணமுடியும். இக் காரணத்தால், பல நிலைகளில், இரு வளைவரைகளின் நிலைத்தூரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று அருகாமையில் இருப்பதோடல்லாமல், அப்புள்ளி களில் வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் திசைகளும் ஒன்றை யொன்று நெருங்கி இருந்தால் மட்டுமே அவ் வளைவரைகள் அருகில் உள்ளன எனக் கொள்வது நலம். அதாவது, ஒன்றுக் கொன்று அருகில் இருக்கும் வளைவரைகளுக்கு $[y(x) - y_1(x)]$-ன் தனிப்பெருமானம் மட்டுமன்றி, $[y'(x) - y'_1(x)]$-ன் தனிப் பெருமானமும் சிறியதாக இருக்கவேண்டும்.

சில சமயங்களில்,

$$y(x) - y_1(x),$$
$$y'(x) - y'_1(x),$$
$$y''(x) - y''_1(x)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x).$$

இவை எல்லாவற்றின் தனிப்பெறுமானமும் சிறியதாக இருந்தால் மட்டுமே அவ்விரு சார்புகளும் அருகருகே உள்ளன எனக் கொள்ள வேண்டியிருக்கும். எனவே, $y = y(x)$, $y = y_1(x)$ என்ற இரு வளைவரைகளும் ஒன்றுக்கொன்று நெருங்கியுள்ளமைக்கு கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுத்துக் கொள்வது நலம் பயக்கும்.

$[y(x) - y_1(x)]$-ன் தனிப்பெறுமானம் சிறியதாக இருந்தால் வளைவரைகள் $y = y(x)$-ம், $y = y_1(x)$-ம் பூச்சிய வரிசை நெருக்கத்தில் உள்ளன எனலாம்.

$[y(x) - y_1(x)]$, $[y'(x) - y'_1(x)]$ இவற்றின் தனிப் பெறுமானங்கள் சிறியதாக இருந்தால், வளைவரைகள் $y = y(x)$-ம் $y = y_1(x)$-ம் முதல்-வரிசை நெருக்கத்தில் உள்ளன எனலாம்.

இதேபோல்,

$$[y(x) - y_1(x)]$$
$$[y'(x) - y'_1(x)]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)]$$

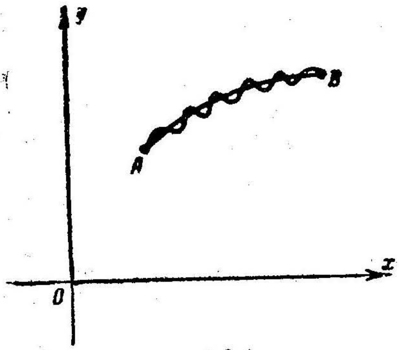
என்ற வித்தியாசங்களின் தனிப் பெறுமானங்கள் சிறுயதாக இருந்தால்,

$$y = y(x), \quad y = y_1(x),$$

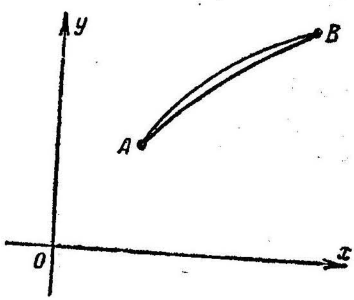
என்ற வளைவரைகள் k-வரிசை நெருக்கத்தில் உள்ளன எனலாம்.

படம் 6·1-ல் பூச்சிய-வரிசை நெருக்கத்தில் இருந்துகொண்டு முதல் வரிசை நெருக்கத்தில் இல்லாத இரு வளைவரைகளைக் காணலாம். இங்கு வளைவரைகளின் நிலைத்தூரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று அருகாமையில் இருந்ததையும், ஆனால் அதேசமயம் அவற்றின் தொடுகோடுகளின் திசைகள் நெருங்கி இல்லாததை

காண்கிறோம். படம் 6·2-ல் முதல்-வரிசை நெருக்கத்தில் உள்ள இரு வளைவரைகளைக் காண்கிறோம்.



படம் 6-1.



படம் 6-2.

இவ்வரையறைகளில் இருந்து, வளைவரைகள் k வரிசை நெருக்கத்தில் இருந்தால் நிச்சயமாக அவை k-ஐ விடக் குறைந்த எல்லாவித நெருக்கத்திலும் உள்ளன என அறிகிறோம்.

இப்போது நாம் ஒரு சார்பரத்தின் தொடர்ச்சியை செம்மைப் படுத்தி வரையறுக்கலாம்.

3. கொடுக்கப்பட்ட எந்த மிகை எண் $\in$-க்கும், $|x - x_0| < \delta$ எனும்போது,

$$|f(x) - f(x_0)| < \in$$

என்றவாறுகுமாறு ஒரு $\delta > 0$ காணமுடியும் எனில், $f(x)$ எனும் சார்பு $x = x_0$-ல் தொடர்ச்சியானது என்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட எந்த மிகை எண் $\in$-க்கும்,

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta$$
$$|y'(x) - y'_0(x)| < \delta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| < \delta$$

எனும்போது,

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \in$$

என்ற வாறுகுமாறு ஒரு $\delta > 0$ காணமுடியுமெனில், $v[y(x)]$ எனும் சார்பரம், k-வரிசை நெருக்கத்தில் தொடர்ச்சியானது என்கிறோம்.

இங்கு x-ன் எந்த மதிப்புக்களுக்கெல்லாம் $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதோ அம் மதிப்புக்களையே x எடுத்துக்கொள்ளும் எனக் கொள்கிறோம்.

இங்கு $v[y(x)]$ என்ற சார்பரம் எந்த சார்புக் குடும்பத்தில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதோ, அக் குடும்பத்தைச் சேர்ந்தது $y(x)$ என்ற சார்பு எனக் கொள்கிறோம்.

$y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $(x_0 \leq x \leq x_1)$ என்ற இரு வளைவரைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை $[\rho(y_1, y_2)]$ ஒரு முறையில் வரையறுத்தால், அம்முறையில் சிறிய இடைவெளியேயுள்ள வளைவரைகளை நெருக்கத்தில் உள்ளன எனலாம்.

$\rho(y_1, y_2) = |y_1(x) - y_2(x)|$ ன் உச்ச மதிப்பு $(x_0 \leq x \leq x_1)$ எனக் கொண்டால், அதாவது C_0 எனும் வெளியின் அளவு முறையைக் கொண்டால், பூச்சிய வரிசை நெருக்கத்தின் கருத்தினைக் காணலாம்.

$$\rho(y_1, y_2) = \sum_{p=1}^{k} \left| y_1^{(p)}(x) - y_2^{(p)}(x) \right| \text{-ன் உச்சமதிப்பு } (x_0 \leq x \leq x_1)$$

எனக் கொண்டால் (y_1, y_2-க்கு k வரிசை வரை, k வரிசை உட்பட, தொடர்ச்சியான வகைக் கெழுக்கள் உள்ளன எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது), வளைவரைகளின் நெருக்கம், k-வரிசை நெருக்கத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்கிறோம்.

4. கீழ்க்கண்ட பண்புகளையுடைய $l(x)$ எனும் சார்பை நேரிய சார்பு என்கிறோம்:

c ஏதேனும் ஒரு மாறிலி எனில்,

$$l(cx) = cl(x)$$
$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$$

k ஒரு மாறிலி எனக் கொள்ள, ஒரு மாறியில் ஆன நேரிய சார்பு

$$l(x) = kx$$

எனும் அமைப்புடையதாகும்.

கீழ்க்கண்ட பண்புகளையுடைய $L[y(x)]$ எனும் சார்பரத்தை நேரிய சார்பரம் என்கிறோம்:

c ஏதேனுமொரு மாறிலி எனில்

$$L[cy(x)] = cL[y(x)].$$
$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

நேரிய சார்பரத்துக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு,

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ p(x)y + q(x)y' \right\} dx.$$

ஆகும்.

5. ஒரு சார்பின் ஏற்றம்,

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$-ஐ, $A(x)$ என்பது Δx-ஐச் சார்ந்திராதவாறும், $\Delta x \to 0$ எனில் $\beta(x, \Delta x) \to 0$ என்றவாறும் உள்ளன.

ஒரு சார்பரத்தின் ஏற்றம்,

$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$-ஐ $L[y(x), \delta y]$ என்பது δy-ல் ஓர் நேரிய சார்பரமாகவும், பெறுமம் $|\delta y|$-ன் உச்ச மதிப்பைக் குறிப்பிட, பெருமம் $|\delta y| \to 0$ எனில், $\beta\{y(x), \delta y\} \to 0$ என்றவாறும் உள்ள,

$$\Delta f = A(x)\cdot\Delta x + \beta(x, \Delta x)\cdot\Delta x$$

என்ற அமைப்பில் எழுத முடியுமெனில், சார்பு வகையிடத்தக்கது என்கிறோம். ஏற்றத்தின் ஒரு பகுதியாக இருந்து, Δx-ல் நேரியதாக இருக்கும். $A(x)\cdot\Delta x$ -ஐ சார்பின் வகையீடு எனக் கூறி அதை df எனக் குறிப்பிடுகிறோம். Δx-ஆல் வகுத்து பின் $\Delta x \to 0$ எனக்கொள்ள, $A(x) = f'(x)$; எனவே,

$$df = f'(x)\,\Delta x.$$

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta\{y(x), \delta y\}$$

. பெருமம் $|\delta y|$ என்ற அமைப்பில் எழுத முடியுமெனில், சார்பரத்தின் ஏற்றத்தின் ஒரு பகுதியாக இருந்து, δy-ல் நேரியதாக இருக்கும்,

$$L[y(x), \delta y]\text{-ஐ}$$

சார்பரத்தின் மாறல் எனக் கூறி அதை δv எனக்குறிப்பிடுகிறோம்.

இவ்வாறு, δy-ல் நேரியதாகவுள்ள சார்பரத்தின் ஏற்றத்தின் தலையாய பகுதியை, சார்பரத்தின் மாறல் என்கிறோம்.

சார்புகளைப் பற்றிப் படிக்கும்போது வகையீடு எந்த அளவு பயன்படுகின்றதோ, அதே அளவு சார்பரங்களைப் பற்றிப் படிக்கும்போது மாறல் பயன்படுகின்றது.

சார்புகளின் வகையீடுகளுக்கும், சார்பரங்களின் மாறலுக்கும் இவ்வரையறைக்கு ஏறக்குறைய சரிசமமான மற்றோர் முறையிலும் வரையறுக்கலாம். $f(x + \alpha\cdot\Delta x)$ என்ற சார்பில் x-ம் Δx-ம் நிலையானதாகக் கொண்டு, துணையலகு α-ன் மாறுபட்ட மதிப்புகளுக்கு சார்பின் மதிப்புகளைக் காண்போம், $\alpha = 0$ எனில், சார்பின் தொடக்க மதிப்பான $f(x)$ கிடைக்கும்; $\alpha = 1$ எனில், சார்புக்கு $f(x + \Delta x)$ என்ற அதிக மதிப்பு கிடைக்கிறது, $\alpha = 0$ என்ற மதிப்புக்கு, $f(x + \alpha\Delta x)$ என்ற சார்பின் α-ஐப் பொருத்த வகைக் கெழுவும், x-எனும் புள்ளியில் $f(x)$ என்ற சார்பின் வகையீடும் சமமாகும் எனக் காணலாம். ஒரு தொகுப்புச் சார்பை வகைப்படுத்தும் விதிப்படி,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x + \alpha\cdot\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha\cdot\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x)\,\Delta x = df(x).$$

இதேபோல்,

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

என்ற பலமாறிச் சார்புக்கு,

$f(x_1 + \alpha\cdot\Delta x_1, x_2 + \alpha\cdot\Delta x_2, \ldots, x_n + \alpha\cdot\Delta x_n)$-ஐ α-ஐப் பொருத்து வகையிட்டு, $\alpha = 0$ எனக்கொள்ள, வகையீடு கிடைக்கும்.

பார்க்கப்போனால்,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1+\alpha\cdot\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_1, \ldots x_n+\alpha\cdot\Delta x_n \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = df.$$

இதேபோல், $v[y(x)]$ என்ற அமைப்புடைய சார்பரங்களுக்கோ அல்லது பல சார்புகளைச் சார்ந்த அல்லது பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளைச் சார்ந்த கடினமான சார்பரங்களுக்கோ, $v[y(x)+\alpha\,\delta y]$ என்ற சார்பரத்தின் α-ஐப் பொருத்த வகையீடு கண்டு, $\alpha=0$ என ஈடு செய்து மாறலைக் காணலாம். சார்பரத்தின் மாறல், ஏற்றத்தின் தலையாய நேரிய பகுதியைப் பொருத்து இருந்தால், அதன் ஏற்றம்,

$$\Delta v = [y(x)+\alpha\,\delta y] - v[y(x)],$$

$$= L(y, \alpha\,\delta y) + \beta(y, \alpha\cdot\delta y)\,|\alpha|\text{ பெருமம் }|\delta y|.$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும் எனலாம்.

$v[y+\alpha\,\delta y]$-ன் α-ஐப் பொருத்த வகைக்கெழுவில், $\alpha=0$ என ஈடு செய்ய

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\Delta v}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \frac{L(y, \alpha\,\delta y) + \beta[y(x), \alpha\,\delta y]\;|\alpha|\text{ பெருமம் }|\delta y|}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \frac{L(y, \alpha\,\delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0} \frac{\beta(y(x), \alpha\,\delta y]\,|\alpha|\text{ பெருமம் }|\delta y|}{\alpha}$$

$$= L(y, \delta y).$$

∴ நேரிய பண்பாட்டால்,

$$L(y, \alpha\,\delta y) = \alpha\,L(y, \delta y)$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\beta[y(x), \alpha\,\delta v]\;|\alpha|\text{ பெருமம் }|\delta y|}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \beta[y(x), \alpha\,\delta y]\text{ பெருமம் }|\delta y| = 0.$$

$(\alpha\to 0$ எனில், $\beta[y(x), \alpha\,\delta y]\to 0).$

இவ்வாறு, சார்பரத்தின் ஏற்றத்தின் தலையாய நேரிய பகுதியைப் பொருத்து ஒரு மாறல் இருந்தால் துணை அலகைப் பொருத்து வகையிட்டு, துணை அலகின் தொடக்க மதிப்பைச் கொடுத்துக் கிடைக்கும் வகையிலும் ஒரு மாறல் இருக்கும்; இவ் விருவித வரையறைகளும் சமமானதாகும், மாறலின் பிந்திய வரையறை முந்தியதைக் காட்டிலும் பரவலானதாகும். சில சார்பரங்களின் ஏற்றங்களிலிருந்து தலையாய பகுதியை தனித்துக் கூறமுடியாமற் போகலாம்; அவற்றிற்கு முன்னர் கூறப்பட்ட வகையில் மாறல் காணமுடியாத நிலையிலிருந்தபோதிலும். பின்னர் கூறப்பட்டுள்ள வகையில் மாறல் காண முடியும்.

6. சார்பு $f(x)$-ன் வகையீடு, $-\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x+\alpha\cdot\delta x)\Big|_{\alpha=0}$ ஆகும்.

சார்பரம் $v(y(x))$-ன் மாறல், $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$ ஆகும்.

வரையறை :

ஒரு சார்பரம் $v[y(x)]$-ன் மதிப்பு, $y=y_0(x)$-க்கு அருகே யுள்ள எந்த வளைவரைமீதும் $v[y_0(x)]$-ஐ விட அதிகமில்லை எனில் சார்பரம் $v[y(x)]$, $y=y_0(x)$ என்ற வளைவரைமீது பெருமத்தை, அடைகிறது என்கிறோம். அதாவது $\Delta v=v[v(x)]-v[y_0(x)]\leqslant 0$ $\Delta v\leqslant 0$ ஆக இருந்து, $y(x)=y_0(x)$ எனில் மட்டுமே $\Delta v=0$. எனில், $y=y_0(x)$ மீது தட்டுத் தளர்வற்ற பெருமம் அடையப் பெறுகிறது என்கிறோம். இதுபோலவே, $y=y_0(x)$ என்ற வளை வரைமீது சிறுமம் அடையப்படுவதையும் வரையறுக்கிறோம். இதில் $y=y_0(x)$-க்கு அருகேயுள்ள எல்லா வளைவரைகள் மீதும் $\Delta v\geqslant 0$.

7. ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பு $f(x)$. அது வரையறுக் கப்பட்டுள்ள அரங்கத்தி னுள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளி $x=x_0$-ல் பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ எய்தினால், அப்புள்ளியில்,

$$df=0.$$

மாறல் உடைத்த ஒரு சார்பரம் $v[y(x)]$, அது வரையறுக்கப் பட்டுள்ள அரங்கத்தினுள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளி $y=y_0(x)$-ல் பெருமத்தையோ, சிறுமத் தையோ எய்தினால், $y=y_0(x)$-ல்,

$$\delta v=0.$$

சார்பரங்களுக்கான தேற்றத்தின் நிரூபணம் : ஒரு நிலையான $y_0(x)$-க்கு, $\delta y=v[y_0(x)+\alpha\delta y]=\varphi(\alpha)$, என்பது α-ல் ஒரு சார்பு ஆகும். கொள்கைப்படி, இது $\alpha=0$ மதிப்புக்கு பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ அடைகிறது.

எனவே, $\phi'(0) = 0$*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\,[y_0(x) + \alpha \delta y]\Big|_{\alpha = 0} = 0,$$

அதாவது $\delta v = 0$. இவ்வாறு, எவ்வளைவரைகளின்மீது சார்பரம் எல்லையம் எய்துகின்றதோ, அவ்வளைவரைகள்மீது சார்பரத்தின் மாறல் பூச்சியமாகும்.

சார்பரத்தின் எல்லையம் என்ற கருத்தினை இன்னும் சிறிது குறிப்பாகக் கூறுவது நலம். பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ பற்றிக் குறிப்பிடும்போது. குறிப்பாக சொல்லப்போனால் சார்ந்த பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ பற்றிக் குறிப்பிடும்போது, அருகருகே உள்ள வளைவரைகள் மீது சார்பரத்தின் மதிப்புகளின் அதிகபட்ச, குறைந்தபட்ச மதிப்புகளைக் கொள்கிறோம். முன்னரே குறிப்பிட்டமாதிரி, வளைவரைகள் அருகருகே உள்ளன என்பது பலவிதமாகக் கருத இடமளிக்கக் கூடியது; இதற்காக, பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ வரையறுக்கும்போது வளைவரைகளின் நெருக்கத்தின் வரிசையையும் பற்றிக் குறிப்பிடுவது அவசியமானதாகும்.

$y = y_0(x)$ என்பதன் அருகே, $y(x) - y_0(x)$-ன் எண் மதிப்பு சிறியதாக உள்ளவாறு ஆன எல்லா வளைவரைகள் மீதும் உள்ள மதிப்பைச் சார்ந்து $y = y_0(x)$ மீது சார்பரம் பெரும மதிப்பையோ அல்லது சிறும மதிப்பையோ எய்துமானால் அதாவது, $y = y_0(x)$-க்கு பூச்சிய நெருக்கத்தில் உள்ள எல்லா வளைவரைகளின் மீதான மதிப்புகளைப் பொருத்து, $y = y_0(x)$ மீது பெரும மதிப்பையோ, சிறும மதிப்பையோ அடையுமானால், அப் பெருமத்தையும், சிறுமத்தையும் உறுதியானது என்கிறோம்.

அல்லாமல், $y = y_0(x)$ என்பதன் அருகே முதல் வரிசை நெருக்கத்தில் உள்ள $y = y(x)$ என்ற எல்லா வளைவரைகள் மீதும் உள்ள மதிப்பைச் சார்ந்து $y = y_0(x)$ மீது சார்பரம் பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ எய்துமானால்—அதாவது $y = y_0(x)$க்கு நிலைத் தூரங்களைப் பொருத்தும், தொடுகோடுகளின் திசைகளைப் பொருத்தும், அருகாமையில் உள்ள எல்லா வளைவரைகளின் மீதான மதிப்புக்களைப் பொருத்து, $y = y_0(x)$மீது பெரும மதிப்பையோ, சிறும மதிப்பையோ அமையுமானால், அப் பெருமத்தையும் சிறுமத்தையும் உறுதியற்றது என்கிறோம்.

---

* $y_0(x)$ என்பது, சார்பரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அரங்கத்தின் உள்ள இருப்பதால், $\alpha = 0$ என்பதன் சுற்றுப்புறத்தில் α மிகை அல்லது குறை மதிப்புகளைக் கொள்ளலாம்.

$y = y_0(x)$ என்ற வளைவரைமீது ஓர் உறுதியான பெருமம் (அல்லது சிறுமம்) அடையப்பட்டது எனில், நிச்சயமாக ஒரு உறுதியற்ற பெருமமும் அடையப்பட்டிருக்கும் என்பது தெளிவு; ஏனெனில் ஒரு வளைவரை, $y = y_0(x)$-க்கு முதல் வரிசை நெருக்கத்தில் இருந்தால் அது பூச்சிய வரிசை நெருக்கத்திலும் இருக்கும். எனினும் $y=y_0(x)$மீது உறுதியற்ற பெருமம் (அல்லது சிறுமம்) அடையப்பட்டு அதேசமயம், உறுதியான பெருமம் அடையப்படாமல் இருக்கக்கூடும். விரிவாகக் கூற, $y=y_0(x)$-க்கு நிலைத்தூரங்களைப் பொருத்தும், தொடுகோடுகளின் திசைகளைப் பொருத்தும் அருகாமையில் உள்ள $y = y(x)$ வளைவரைகளில் எதன்மீதும் $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ என இல்லாமல் இருக்கலாம்; [சிறுமத்திற்கு $v[y(x)] < v[y_0(x)]$ நிலைத் தூரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று அருகாமையில் இருந்து, ஆனால் அதேசமயம் தொடுகோடுகளின் திசைகள் நெருங்கி இல்லாத $y = y(x)$ வளைவரைகளில் $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ உள்ளவாறு சில இருக்கலாம்; (சிறுமம் எனில் $v[y(x)] < v[y_0(x)]$ உள்ளவாறு சில இருக்கலாம்). எல்லையத்திற்கான அடிப்படைத் தேவையான நிபந்தனை பெற உறுதியானதும், உறுதியற்றதுமான எல்லையங்களுக்கான இவ் வேற்றுமை முக்கியம் வாய்ந்தது அல்ல; ஆனால் 8-வது அத்தியாயத்தில், எல்லையம் காணப் போதுமான நிபந்தனை பெற இவற்றிற்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் கருத்தில் கொள்ளவேண்டியது ஆகும்.

$y = y_0(x)$ என்ற வளைவரைமீது எல்லையம் கிடைக்கப் பெற்றால்,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\,[y_0(x) + \alpha\,\delta y]\Big|_{\alpha=0} = 0 \text{ மட்டும் அல்லாது}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v\,[y_0(x,\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $y(x, \alpha)$ என்பது

ஏற்கத்தக்க வளைவரைகளைக் கொண்ட ஏதோ ஒரு குடும்பம் $y(x, \alpha)$ எனும் சார்பு, $\alpha = 0$ எனில், $y_0(x)$ என்றும், $\alpha = 1$ எனில், $y_0(x) + \delta y$ என்றும் மாற்றம் அடைகிறது. α-ஐக் குறிப்பிட, $y = y(x, \alpha)$ என்ற குடும்பத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவரை கிடைக்கும்;

ஆகவே, $v[y(x, \alpha)]$ என்ற சார்பரத்தின் மதிப்பும் வரையறுக்கப்படுகிறது;

எனவே, $v[y(x, \alpha)]$-ஐ α-ன் சார்பு எனலாம்.

இச் சார்பு $\alpha = 0$-ல் எல்லையம் அடைவதாகக் கொண்டிருப்பதால், இச் சார்பின் வகைக்கெழு $\alpha = 0$-ல் பூச்சிய மாகிறது.*

$$\text{இவ்வாறு,} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} v\,[y\,(x, \alpha)\,\Big|_{\alpha=0} = 0$$

முன்னர் கண்டவாறு, சார்பரம் எல்லையம் எய்தும் எல்லா வளை வரை மீதும் இந்த வகைக் கெழுவும், δv-ம் ஒருங்கே பூச்சியமா கின்றன எனினும், பொதுவாக, இவ்வகைக் கெழுவும், மாறலும் ஒன்றுவதில்லை.

இங்கு கூறப்பட்டிருக்கும் எல்லா வரையறைகளும், அடிப் படைத் தேற்றமும் ஏறக்குறைய மாறுபாடில்லாமல்,

$$v\,[y_1\,(x\ ,\, y_2\,(x),\, \ldots,\, y_n\,(x)]$$

என்ற பல சார்புகளைச் சார்ந்த சார்பரங்களுக்கும்

$$v\,[z\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)],$$

$$v\,[z_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n),\, z_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n),\, \ldots\, z_n\,\,(x_1, x_2, \ldots x_n)]$$

போன்ற பலமாறிகளைக்கொண்ட ஒன்று அல்லது பல சார்புகளைச் சார்ந்த சார்பரங்களுக்கும், விரிவுபடுத்தக் கூடியன. எடுத்துக் காட்டாக, $v\,[z\,(x, y)]$ என்ற சார்பரத்தின் மாறல் δv-ஐ, ஏற்றம்.

$\Delta v = v\,[z\,(x, y) + \delta z] - v\,[z, x, y)]$-ன் தலையாய δz-ல் நேரிய பகுதி எனவோ, அல்லது துணையலகுகளைப் பொருத்த வகைக்கெழுவில், தொடக்க மதிப்பைக் கொடுத்து கிடைப்பவை,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\, v\,[z\,(x, y) + \alpha\,\delta z]\,\Big|_{\alpha = 0}$$

எனவோ கொள்ளலாம். $z = z\,(x, y)$-க்கு சார்பரம் v எல்லையம் எய்துகிறது. எனில், $z = z\,(x, y)$ -க்கு மாறல் $\delta v = 0$, ஏனெனில் $v\,[z\,(x, y) + \alpha\,\delta z]$ என்பது α-ல் ஒரு சார்பு; கொள்கைப்படி $\alpha = 0$ எனில் எல்லையம் கிடைக்கும்; எனவே, α-ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழுவில், $\alpha = 0$ என இட, அது பூச்சியமாகிறது.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\, v\,[z\,(x, y) + \alpha\,\delta z]\,\Big|_{\alpha=0} = 0 \text{ அல்லது } \delta v = 0.$$

---

*$\alpha = 0$-க்கு அருகே, α எந்த மதிப்பையும் கொள்ளலாமென்றும், $\dfrac{\partial v\,[y\,(x, \alpha)]}{\partial \alpha}\,\Big|_{\alpha=0}$ உள்ளது என்றும் கொள்கிறோம்.

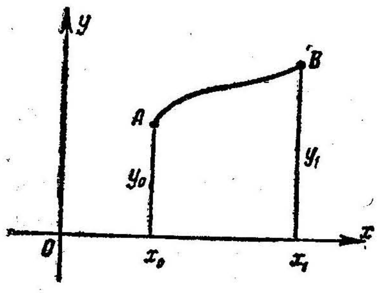
2. ஆய்வரின் சமன்பாடு

ஏற்கத்தக்க வளைவரைகளின் வரம்புப் புள்ளிகள் $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ நிலையானதாகவுள்ளவாறுள்ள சார்பரம்

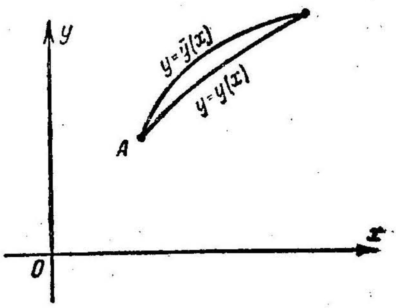
$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\{x, y(x), y'(x)\} \; dx\text{-ன்} \qquad \dots (6.1)$$

பெரும, சிறும மதிப்புகளைக் காண்போம், $F(x, y, y')$ என்ற சார்பு மும்முறை வகையிடத்தக்கது எனக் கொள்வோம்.

எல்லையம் காணத் தேவையான நிபந்தனை, சார்பரத்தின் மாறல் பூச்சியமாவதே என முன்னர் கண்டோம். எவ்வாறு இந்த அடிப்படைத் தேற்றம் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட சார்பரத்திற்கு பயன்படுத்தப்படுகின்றது என்று காண்போம். முன்னர் கண்ட வழிமுறைகளையே சார்பரம் 6·1-க்கு பொருந்துமாறு கூறுவோம். இருமுறை வகையிடத்தக்க $y = y(x)$ என்ற வளைவரையின்மீது எல்லையம் எய்தப்படுகின்றது எனக் கொள்வோம். (ஏற்கத்தக்க வளைவரைகளுக்கு முதல் வரிசை வகைக்கெழு இருப்பதாகக் கொண்டாலே, எல்லையம் அடையப்பெறும் வளைவரைக்கு இரண்டாவது வகைக்கெழு இருப்பதைக் காண முடியும்).



படம் 6–3.



படம் 6–4.

$y = y(x)$ என்ற வளைவரைக்கருகே, $y = \bar{y}(x)$ என்ற ஏற்கத்தக்க வளைவரையை எடுத்துக்கொண்டு,

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\,[\bar{y}(x) - y(x)],$$

என்ற ஒரு-துணையலகு வளைவரைக் குடும்பத்தில் $y = y(x)$-ம், $y = \bar{y}(x)$-ம் சேர்த்துக்கொள்வோம்; $\alpha = 0$ எனில் $y = y(x)$-ம், $\alpha = 1$ எனில் $y = \bar{y}(x)$-ம் கிடைக்கப்பெறுகிறோம். [படம் 6·4].

நாம் முன்னர் கூறியவாறு, $\bar{y}(x) - y(x)$ என்ற வித்தியாசத்தை, δy எனக் குறித்து, அதைச் சார்பு $y(x)$-ன் மாறல் என்கிறோம்.

$f(x)$ என்ற சார்பின் எல்லைய மதிப்புகளைக் காண்பதில் சாரா மாறியின் கூடுதல் Δx எவ்வாறு துணை நிற்கின்றதோ அவ்வாறே மாறுபடு தீர்வமைவுகளில், மாறல் δy துணை நிற்கின்றது. சார்பின் மாறலான $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$, x-ன் ஒரு சார்பு ஆகும். இச் சார்பை ஒன்று அல்லது பலமுறை வகையிடலாம்;

$$(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x)$$

அதாவது மாறலின் வகைக்கெழு, வகைக்கெழுக்களின் மாறல் ஆகும்.

இதேபோல்,

$$(\delta y)'' = \bar{y}''(x) - y''(x) = \delta y'',$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(\delta y)^{(k)} = \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}.$$

$\alpha = 0$ எனில், எல்லைய மதிப்பு எய்தப்பெறும் வளைவரையை கொண்டிருக்குமாறும், $\alpha = 1$ எனில் 'ஒப்புமை வளைவரை' என வழங்கப்படும். அதற்கருகிலுள்ள வளைவரையைக் கொண்டிருக்கு மாறும் உள்ள $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\, \delta y$ என்ற $y = y(x, \alpha)$ என்ற குடும்பத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx,$$ என்ற சார்பரத்தின் மதிப்பு

களை $y = y(x, \alpha)$ என்ற குடும்பத்தின் வளைவரைகள் மீதே காண்பதாகக் கொள்வோம்; துணையலகு α-ன் மதிப்பு $y = y(x, \alpha)$ என்ற குடும்பத்தின் வளைவரையை நிச்சயிக்கிறது. எனவே, இது சார்பரம் $v[y(x, \alpha)]$-ன் மதிப்பையும் நிச்சயிக்கிறது. இவ்வாறு சார்பரம்,

$$v[\, y(x, \alpha)\,] = \phi(\alpha),$$

என்று α-ன் ஒரு சார்பாக ஆகின்றது. இச் சார்பு $\phi(\alpha)$-க்கு $\alpha = 0$ என்ற மதிப்புக்கு $y = y(x)$; மேலும், ஏற்கத்தக்க அருகேயுள்ள எந்த வளைவரைக்கும் ஒப்ப, குறிப்பாக அருகே யுள்ள $y = y(x, \alpha)$ என்ற குடும்பத்தைச் சேர்ந்த எந்த வளை வரைக்கும் ஒப்ப, சார்பரம் எல்லையத்தை எய்தியதாகக்

கொண்டுள்ளோம். $\alpha = 0$ என்ற மதிப்புக்கு $\phi(\alpha)$ என்ற சார்பு எல்லையம் எய்தத் தேவையான நிபந்தனை,

$$\phi'(0) = 0,$$

என அறிவோம்.

$$\phi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F\left\{x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)\right\} dx.$$

ஆதலால்,

$$\phi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha) + F_{y'}\frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x,\alpha)\right] dx.$$

இங்கு,

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F\left\{x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\right\},$$

$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F\left\{x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y(x) + \alpha\,\delta y] = \delta y,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y'(x) + \alpha\,\delta y'] = \delta y'.$$

ஆதலால்,

$$\phi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [Fy\,\{x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\}\,\delta y$$
$$+ Fy'\,\{x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\}\,\delta y']\,dx.$$

$$\phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [Fy\,\{x, y(x), y'(x)\}\,\delta y + Fy,$$
$$\{x, y(x), y'(x)\}\,\delta y']\,dx.$$

நாம் முன்பு குறிப்பிட்டுள்ளவாறே, $\phi'(0)$-ஐ சார்பரத்தின் மாறல் எனக் கூறி அதை δv எனக் குறிப்பிடுகிறோம். சார்பரம் v, எல்லையம் எய்தத் தேவையான நிபந்தனை அதன் மாறல் δv பூச்சியமாவதாகும்: $\delta v = 0$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

என்ற சார்பரத்திற்கு இந்த நிபந்தனை

$$\int_{x_0}^{x_1} [Fy\, \delta y + Fy'\, \delta y']\, dx = 0,$$

என ஆகின்றது. $\delta y' = (\delta y)'$ என்பதை மனதில் கொண்டு, இரண்டாவது உறுப்பைப் பகுதிப்படுத்தி தொகை காண,

$$\delta v = \Big[Fy'\, \delta y \Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(Fy - \frac{d}{dx}\, Fy' \right) \delta y\, dx$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இப்போது எடுத்துக்கொண்டிருக்கும் இவ்வெளிய தீர்வமையில், ஏற்கத்தக்க எல்லா வளைவரைகளும் நிலையான வரம்புப் புள்ளிகள் வழியே செல்வதால்,

$$\delta y \Big|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0,$$

$$\delta y \Big|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

எனவே,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}\, F_{y'} \right) \delta y\, dx.$$

இவ்வாறு, எல்லையம் காணத்தேவையான நிபந்தனை,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dz}\, F_{y'} \right) \delta y\, dx = 0. \qquad \dots \quad (6{\cdot}2)$$

என்று அமைகிறது. இதில் முதல் சினையான $\left(F_y - \frac{d}{dx}\, F_y' \right)$, எல்லைய வளைவரை $y = y(x)$-ல் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பாகும். இரண்டாவது சினையான δy, ஒப்புமை வளைவரை $y = \bar{y}(x)$-ஐ ஏதோ ஒன்றாக எடுத்துக்கொள்ளும் காரணத்தால் கீழ்க்கூறிய பொதுவான நிபந்தனைகளை மட்டுமே கொண்ட ஏதோ ஒரு சார்பாகும்; அந் நிபந்தனைகள்: வரம்புப் புள்ளிகள் $x = x_0$, $x = x_1$-ல் சார்பு δy பூச்சியமாகிறது; அது தொடர்ச்சியானது மட்டுமல்லாமல், ஒன்று அல்லது பலமுறை வகையிடத்தக்கது; மேலும் எண்மதிப்பில் δy-யோ அல்லது δy-யும், $\delta y'$-யும் மிகச் சிறியன.

. கிடைக்கப் பெற்ற நிபந்தனை 6-2-2 எளிதாக்க, கீழ்க்காணும் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

மாறு நுண் கணிதத்தில் அடிப்படைத் துணைத் தேற்றம்

$\phi(x)$ எனும் சார்பு $[x_0, x_1]$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்போது, $\eta(x)$ எனும் ஒவ்வோர் தொடர்ச்சியான சார்புக்கும்

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x)\,\eta(x)\,dx = 0,$$

எனில், அவ்விடைவெளியில்

$$\phi(x) \equiv 0,$$

ஆகும்.

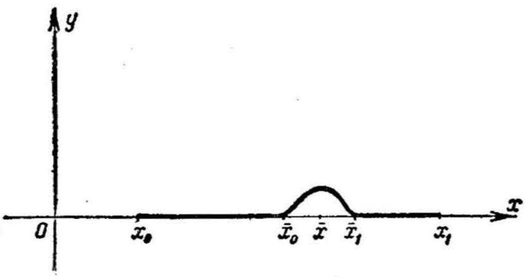
குறிப்பு : சார்புகளின் மீது.

$$\eta(x_0) - \eta(x_1) = 0 ;$$

$\eta(x)$ என்ற சார்பு p வரிசை தொடர்ச்சியான வகைக்கெழு உடையது

$$|\eta^{(s)}(x)| < \epsilon \; (s = 0, 1, \ldots q, q \leqslant p)$$

எனக் கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டாலும், இத்துணைத் தேற்றத்தின் கூற்றோடு அதன் நிரூபணமோ மாற்றமில்லாமல் ஏற்கத்தக்கது.



படம் 6–5.

நிரூபணம் : $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ இடைவெளியில் உள்ள $x = \bar{x}$ என்ற புள்ளியில், $\phi(x) \neq 0$ எனக் கொள்ள ஒரு முரண்பாடான முடிவு கிடைக்கும். $\phi(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனக் கொண்டுள்ளோம் ஆதலால், $\bar{x}$ என்ற புள்ளியின் ஒரு சுற்றுப்புறத்தில் $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$, $\phi(x) \neq 0$ எனில், $\phi(x)$ ஒரே குறி

உடைத்தது எனக் கொள்ளலாம், இப்போது $\eta(x)$ என எடுத்துக் கொள்ளப்படும் சார்பும் இவ்விடைவெளியில் ஒரே குறியுடையது ஆதலால். இவ்விடைவெளிக்கு வெளியே $\eta(x) = 0$ எனக் கொள்ள (படம் 6·5)

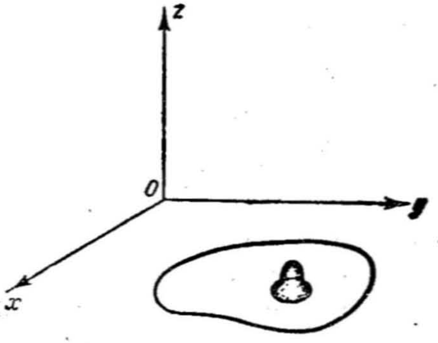
$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \phi(x)\,\eta(x)\,dx \neq 0.$$

(ஏனெனில், $\phi(x)\,\eta(x)$ என்ற பெருக்குத் தொகை, $\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1$ என்ற இடைவெளியில் குறிமாற்றம் இல்லாததுமன்றி இவ்விடைவெளிக்கு வெளியே பூச்சியமாகும். இவ்வாறு நாம் முரண்பாடான ஒரு முடிவுக்கு வந்துள்ளோம். எனவே $\phi(x) \equiv 0$ $\eta(x$ எனும் சார்பை கீழ்க்கண்டவாறு எடுத்துக்கொள்ளலாம் : n ஒரு மிகை முழு எண். k ஒரு மாரு குணகம் எனக்கொண்டு, $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$ இடைவெளிக்கு வெளியே $\eta(x) = 0$; $(\bar{x}_0 < x < \bar{x}_1)$ இடைவெளியில் $\eta(x) = k(x - \bar{x}_0)^{2n}\,(x - \bar{x}_1)^{2n}$ இவ்வாருன சார்பு $\eta(x)$ மேற்கூறிய நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டது என்பதை எளிதில் காணலாம் : அது தொடர்ச்சியானது; $(2n-1)$ வரிசைவரை தொடர்ச்சியான வகைக்கெழு உடையது ; x_0, x_1 என்ற புள்ளிகளில் பூச்சியமாகின்றது. மாரு எண் k-ன் மதிப்பை குறைவாகக்கொள்ள, அதன் மதிப்பையும் வகைக்கெழுக்களின் மதிப்பையும் எண் அளவில் தேவையான அளவு சிறியதாகக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு: முந்திய வாதத்தை வார்த்தைக்கு வார்த்தை திருப்பிக்கூற $\phi(x,y)$ என்ற சார்பு, $(x.y)$ தளத்தில் உள்ள D-எனும் பரப்பிடத்தில் தொடர்ச்சியானது $\iint_D \phi(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy = 0$

என்பது பொதுவான சில நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட ஏதாமொரு சார்பு $\eta(x, y)$-க்கு [தொடர்ச்சியானது, ஒன்றல்லது பன்முறை வகைப்படுத்தக் கூடியது, D எனும் பரப்பிடத்தின் வரப்பில் பூச்சிய மதிப்புடையது, $|\eta| < \epsilon$, $|\eta''x| < \epsilon$, $|\eta'y| < \epsilon$] உண்மையெனில் D எனும் பரப்பிடத்தில், $\phi(x.y) \equiv 0$. இந்த அடிப்படைத் துணைத் தேற்றத்தை நிறுவும்போது, $\eta(x.y)$ எனும் சார்பை கீழ்க்கண்டவாறும் கொள்ளலாம். $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியின் ϵ, எனும் சிறிய ஆரமுள்ள வட்டமான சுற்றுப்புறத்தின் வெளியே $\eta(x.y) \equiv 0$, $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, $(\bar{x}, \bar{y})$-ன் இச்சுற்றுப்புறத்தில், $\eta(x, y) = k[(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 - \epsilon,^2]^{2n}$ (படம் 6·6)-ஐ பின் பார்க்கவும்.

இதேபோன்று ஒரு துணைத் தேற்றத்தை n-மடங்கு தொகையீட்டுக்கும் நிறுவலாம்.



படம் 6–6.

இனி (6·1)-ல் கூறப்பட்ட எளிதான சார்பரத்தின் எல்லையத்திற்கான நிபந்தனை (6·2)-ஐ இவ்வடிப்படைத் துணைத் தேற்றம் கொண்டு எளிதாக்கலாம்.

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx = 0, \qquad \ldots \quad (6\cdot 2)$$

துணைத் தேற்றத்தின் எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளும் பொருத்தமாகின்றன. எல்லைய வளைவரையில் $\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right)$ என்றசினை ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு; மாறல் δy, துணைத் தேற்றத்தில் கூறப்பட்ட பொதுவான கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டதே; எனவே சார்பரத்தை எல்லைய மதிப்புக்குக் கொணரும் $y = y(x)$ வளைவரைமேல் $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$. அதாவது,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

என்ற இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வே $y = y(x)$

அதாவது,

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} - F_{y'y'} y'' = 0,$$

என்பதன் தீர்வு $y = y(x)$. இச்சமன்பாட்டை ஆய்லரின் சமன்பாடு என்கிறோம். (174)–ல் முதன்முறையாக வெளியிடப்

பட்டது). ஆய்லர் சமன்பாட்டின் வரையறு வளைவரைகளை $y = y(x, C_1, C_2)$ எல்லையவரை (extremals) என்கிறோம்.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

என்ற சார்பரத்திற்கு எல்லைய வரைகள் மீதுதான் எல்லையம் காண முடியும். ஆய்லர் சமன்பாட்டிற்குத் தொகை கண்டு, வரம்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ நிபந்தனைகளைக் கொண்டு பொதுத் தீர்வில் காணப்பெறும் இரு மாறிலிகளின் மதிப்பைக் காண, சார்பரத்தை எல்லையத்திற்கு கொணரும் வளைவரையைக் காண்கிறோம். இந்நிபந்தனைகளைச் சரிசெய்யும் எல்லையவரைகள்மீதுதான் சார்பரத்திற்கு எல்லையம்காணமுடியும். எனினும், அத்தியாயம் 8-ல் கூறப்படும் போதுமான நிபந்தனைகளைக் கொண்டு மட்டுமே, எல்லைய வரைமீது எல்லையம் எய்தப் பெறுகிறதா (அவ்வாறெனில் அது பெருமமா, சிறுமமா) எனத் திட்டவட்டமாகக் கூற இயலும்.

இங்கு,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1,$$

என்ற வரம்பு-மதிப்பு தீர்வமைக்கு எப்போதும் ஒரு தீர்வு இருக்க வேண்டுவதில்லை என்பதும். அவ்வாறு தீர்வு இருந்தபோதிலும் அது ஒன்றுமட்டுமே தீர்வு எனக் கூற இயலாது என்பதும் நினைவு கூறத்தக்கது.

பல மாறுபடு தீர்வமைவுகளில், அத்தீர்வமைவின் இயற்பியல் அல்லாது வடிவ கணித பண்புகளைக் கொண்டே தீர்வு அமையும் என எளிதில் கணிக்க முடியும்; வரம்பு மதிப்புகளை சரிசெய்யுமாறு ஆய்லரின் சமன்பாட்டுக்கு தனியொரு தீர்வு உண்டெனில், இத்தனி எல்லையவரையே கொடுக்கப்பட்ட மாறுபடு தீர்வமைவின் தீர்வு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2]\, dx;$$

$$y(0) = 0, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

என்ற சார்பரத்திற்கு. எவ்வளைவரைகளுக்கு எல்லையம் உண்டு எனக் காண்க.

ஆய்லரின் சமன்பாடு $y'' + y = 0$ ஆகும்.

இதன் பொதுத் தீர்வு $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

வரம்பு மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி, $C_1 = 0$. $C_2 = 1$ என அமையலாம்.

எனவே $y = \sin x$ என்ற வளைவரைமீது மட்டுமே எல்லையம் எய்தக் கூடும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$v\,[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy]\,dx\ ;$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

என்ற சார்பரத்திற்கு, எவ்வளைவரைகளுக்கு எல்லையம் காணக் கூடும் எனக் காண்க.

ஆய்லரின் சமன்பாடு $y'' - 6x = 0$

எனவே பொதுத் தீர்வு $y = x^3 + C_1 x + C_2$

வரம்பு மதிப்புகளைப் பயன்படுத்த, $C_1 = 0$; $C_2 = 0$.

எனவே $y = x^3$ என்ற வளைவரைமீது மட்டுமே எல்லையம் எய்தக் கூடும்.

இவ்விரு உதாரணங்களிலும் ஆய்லரின் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை எளிதில் காண முடிந்தது. ஆனால், ஒரு இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்குச் சில சமயங்களில் மட்டுமே இவ்வாறு தொகை காணக்கூடும்; அதாவது ஆய்லர் சமன்பாட்டிற்கு எப்போதுமே தீர்வு அமையத் தேவையில்லை. ஆய்லர் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு அமையக்கூடிய சிலவற்றைக் காண்போம்.

F என்பது y'-ஐச் சார்ந்திராத பொழுது :

$$F = F(x, y).$$

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் அமைப்பு $F_y(x, y) = 0$ ($\because F_{y'} \equiv 0$)
இங்கு காணப்பெறும் முடிவுள்ள சமன்பாடு $F_y(x, y) = 0$-ன் தீர்வில் கணக்கிடவேண்டிய ஏதாமொரு உறுப்புகள் இல்லை. எனவே பொதுவாக அத்தீர்வு, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ என்ற வரம்பு–மதிப்புகளுக்கு ஏற்றமுடையதாக இருப்பதில்லை.

இவ்வாருக, இம்மாறுபடு தீர்வமைவுக்கு பொதுவாகத் தீர்வு அமைவதில்லே. $F_y(x,y)=0$ என்ற வளைவரை, வரம்புப் புள்ளிகளான (x_0, y_0), (x_1, y_1) வழியே செல்லும்போது மட்டுமே. எல்லேயம் எய்தப்பெறக்கூடிய வளைவரையைக் காணமுடிகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx;$$

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1.$$

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் அமைப்பு

$F_y = 0$ அல்லது $y = 0$

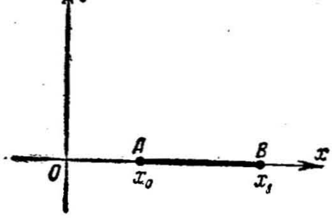
$y_0 = 0, y_1 = 0$ என்ருல் மட்டுமே, $y = 0$ என்ற எல்லேய வரை வரம்புப் புள்ளிகள் வழியே செல்கின்றது. (படம் 6·7).

$y_0 = 0$, $y_1 = 0$ எனில், $y = 0$ எனும் சார்பு, $v = \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx$

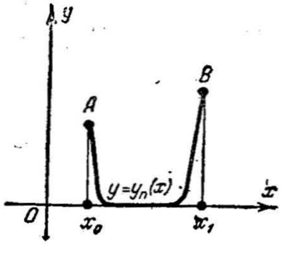
என்ற சார்பரத்தை சிறுமத்தை எய்தச் செய்கிறது.

$(\therefore \; v[y(x)] \geqslant 0, \; y = 0$ எனில் $v = 0.)$

ஆனல், y_0, y_1 இவற்றில் ஏதாவது ஒன்று பூச்சியமில்லே எனில். சார்பரம் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் மீது சிறுமம் அடைவதில்லே, கீழ்க்காணும் விளக்கத்தை ஒட்டி எளிதில் அறியக்கூடியதே. (x_0, y_0) என்ற புள்ளியில் இருந்து கிடை அச்சுவரை மிகவும் சரியாக இறங்கும் வில்லேயும், (x_0, x_1) பகுதியுடன் கிடை அச்சின் மேல் ஏறக்குறைய படியும் ஒரு துண்டுப் பகுதியும், x_1 அருகே (x_1, y_1) என்ற புள்ளிக்கு செங்குத்தாக



படம் 6·7



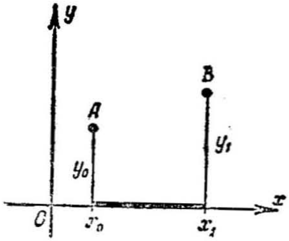
படம் 6·8

ஏறும் விற்பகுதியையும் கொண்ட வரைபடத்தையுடைய $y_n(x)$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்புகளின் ஒரு தொடர் முறையைக் கொள்ளலாம். (படம் 6·8)

இவ்வாறான தொடர் முறையின் வளைவரைகள் மீது, சார்பரத்தின் மதிப்பு பூச்சியத்தில் இருந்து மிகவும் சிறிதே வித்தியாசம் கொண்டது ஆதலால், சார்பர மதிப்புகளின் கீழ் வரம்பு பூச்சிய மாகும். $y = y(x)$ என்ற பூச்சியத்துடன் சர்வசம மதிப்பற்ற, எந்த தொடர்ச்சியான வளைவரை மீதும் $\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx > 0$ ஆதலால் இக் கீழ் வரம்பை எந்தத் தொடர்ச்சியான வளைவரை மீதும் அடைய முடியாது, சார்பரத்தின் மதிப்புகளின் இந்தக் கீழ் வரம்பை,

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y(x) = 0 \quad (x_0 < x < x_1)$$
$$y(x_1) = y_1,$$

என்ற தொடர்ச்சியற்ற சார்பின்மீதே அடைய முடியும். (படம் 6·9)



படம் 6–9.

F எனும் சார்பு y'-ஐ நேரியதாகச் சார்ந்தது :

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)\,y';$$

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} \right] dx.$$

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் அமைப்பு

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\,y' - \frac{d}{dx}N(x, y) = 0,$$

அல்லது

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\,y' - \frac{dN}{dx} - \frac{\partial N}{\partial y}\,y' = 0,$$

அல்லது

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0\;;$$

ஆனால், முன்னர் மாதிரியே, இதுவும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடல்ல, ஒரு முடிவுள்ள சமன்பாடே. பொதுவாக,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

எனும் வளைவரை வரம்பு மதிப்புகளுக்கு ஒத்துப்போவதில்லை; எனவே, இவ்வாறான மாறுபடு தீர்வமைவுக்கும், தொடர்ச்சியான சார்புகளின் குழுவில் உள்ள ஒரு தீர்வுகாண முடியாது. ஆனால், $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$ எனில், $Mdx + Ndy$ ஒரு பொருத்தமான வகைக் கெழு.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left(M + N \frac{dy}{dx} \right) dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (M\,dx + N\,dy).$$

இத்தொகை, எடுத்துக்கொள்ளும் பாதையைச் சார்ந்திராதது; எனவே ஏற்கத்தக்க எல்லா வளைவரை மீதும். v எனும் சார்பரத்தின் மதிப்பு நிலையானது; மாறுபடு தீர்வமைவே அர்த்த மற்றதாகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')\,dx.$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = a,$$

ஆய்லர் சமன்பாடு $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$; அதாவது $y - x = 0.$

$y(0) = 0$ என்ற வரம்பு மதிப்பு சரியானதாக இருக்கின்றது; ஆனால் $a = 1$ என்றால் மட்டுமே இரண்டாவது வரம்பு மதிப்பு பொருந்தும். $a \neq 1$ எனில், வரம்பு மதிப்புகளுக்கேற்ற எல்லைய வரை காண இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y + xy')\,dx,$$

அல்லது

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y\,dx + x\,dy),$$

$$y(x_0) = y_0,\ \ y(x_1) = y_1.$$

ஆய்லரின் சமன்பாடு $1 \equiv 1$ என ஆகின்றது. தொகைச் சார்பு ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழு ; தொகை எடுத்துக்கொள்ளும் பாதையைப் பொருத்து அமையவில்லை :

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} d(xy) = x_1 y_1 - x_0 y_0$$

(பாதை ஏதாக இருந்தாலும்). எனவே மாறுபடு தீர்வமைவு அர்த்தமற்றதாகின்றது.

(3) F எனும் சார்பு y'–ஐ மட்டுமே சார்ந்தது.
$F = F(y')$

$Fy = Fxy' = Fyy' = 0$ ஆதலால், ஆய்லர் சமன்பாடு

$$Fy'y'\, y'' = 0,$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. எனவே, $y'' = 0$ அல்லது $Fy'\,y'_i = 0$ $y'' = 0$ எனில் $y = C_1 x + C_2$; இது ஒரு இரு துணை அலகுநேர், கோட்டுக் குடும்பம். $Fy'y'\,(y') = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $y'=k$ என்ற ஒன்று அல்லது பல மெய்த் தீர்வுகள் இருந்தால், $y = k_i + C$ இது ஓர், ஒரு துணையலகு நேர்கோட்டுக் குடும்பம். இக் குடும்பம் முன்னர் கண்ட $y = C_1x + C_2$ என்ற இரு துணையலகுக் குடும்பத்தில் அடங்கியுள்ளதாகும். எனவே, $F = F(y')$ எனில் $y = C_1x + C_2$ என்ற நேர்கோடுகள் எல்லாம் எல்லைய வரைகளாக இருக்கக் கூடியனவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

ஒரு வளைவரையின் வில் நீளமானது,

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

என்பதற்கு எல்லைய வரைகள் $y = C_1x + C_2$ என்ற நேர்கோடுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

திசைவேகம், y'-ஐ மட்டுமே சார்ந்தது, $\frac{ds}{dt} \doteq v(y')$ எனில், $y = y(x)$ என்ற வளைவரையின் மீது $A(x_0, y_0)$ என்ற புள்ளியில்

இருந்து $B(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிவரை ஒரு துகள் நகர எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமானது $t[y(x\ ]$,

$$t[y(x)] = \int_{x^0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}\, dx,$$

$$\left(\frac{ds}{dt} = v(y')\,;\ dt = \frac{ds}{v(y')}\right.$$

$$\left. = \frac{\sqrt{1+y'^2}\, dx}{v(y')}\,;\ t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}\, dx\right)$$

இச்சார்பரத்தின் எல்லைய வரைகள் நேர் கோடுகள் ஆகும்.

(4) F எனும் சார்பு x-ஐயும், y'-ஐயும் மட்டும் சார்ந்தது.

$$F = F(x, \bar{y}')$$

ஆய்லரின் சமன்பாடு $\dfrac{d}{dx} Fy'(x, y') = 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது, இதன் முதல் தொகை $Fy'(x, y') = C_1$; இவ்வாறு கிடைக்கப்பெறும் முதல் வரிசைச் சமன்பாடு $Fy(x, y') = C_1$-ல y இல்லாததால், y'-ஐக் கண்டு தொகைப்படுத்தியோ அல்லது பொருத்தமாக எடுத்துக்கொள்ளப்படும் துணை அலகைக் கொண்டோ இச்சமன்பாட்டின் தொகை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

சார்பரம்

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx,$$

[இயக்க வேகம் $v = x$ எனில்,

$$\frac{ds}{dt} = x \leftrightarrow dt = \frac{ds}{x}$$

$$\therefore\ t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\, dx\,;$$

இவ்வாறு $y = y(x)$ வளைவரைமீது ஒரு புள்ளியில் இருந்து மற்றொரு புள்ளிக்குச் செல்ல எடுத்துக்கொள்ளப்படும் நேரம் t].

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் முதல் தொகை $F_{y}' = C_1$; அதாவது

$\dfrac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1$, $y' = \tan t$ என ஈடு செய்வதன் மூலம் t எனும் துணை அலகைக்கொணர இச்சமன்பாட்டின் தொகையை எளிதில் காணலாம்.

$$x = \frac{1}{C_1}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}\sin t.$$

$\bar{C}_1 = \dfrac{1}{C_1}$ எனக் கொள்ள $x = C_1 \sin t$

$\dfrac{dy}{dx}$ tan t; $dy = \tan t\, dx = \tan t.\ C_1 \cos t\, dt = C_1 \sin t\, dt$

தொகை காண, $y = -C_1 \cos t + C_2$

இவ்வாறு, $x = C_1 \sin t$, $y - C_2 = C_1 \cos t$

t-ன் நீக்கற்பலன் காண,

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^{\,2}$$

இச்சமன்பாடு, நிலை அச்சின்மேல் மையங்களையுடைய ஓர் வட்டக் குடும்பத்தைக் குறிக்கின்றது.

(5) F எனும் சார்பு y-யும், y'-ம் மட்டுமே சார்ந்தது.

$$F = F(y, y')$$

ஆய்லர் சமன்பாடு

$$F_y - F_{yy'}\, y' - F_{y'y'}\, y'' = 0 \quad [\because \quad F_{xy'} = 0]$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. இச்சமன்பாட்டில் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் y'-ஆல் பெருக்க இடப்பக்கமுள்ளது $\dfrac{d}{dx}\ (F - y'F_{y'})$ என்ற திருத்தமான வகைக்கெழுவாகின்றது.

$$\left[\frac{d}{dx}(F - y'\cdot F_{y}') = F_y\cdot y' + Fy'\cdot y'' - y''\cdot F_{y}' - F_{yy}'\cdot y'' - Fy'_{y'}\cdot_{y'}\, y'' \right.$$

$$\left. = y^2\,(Fy - F_{yy}'\cdot y' - F_{y}'{}_{y}'\cdot y''). \right]$$

எனவே, ஆய்லர் சமன்பாட்டின் முதல் தொகை

$$F - y'\, F_{y}' = c_1$$

ஆகும். இம்முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டில், x வெளிப்படையாக இல்லாததால், y'–ஐக் கண்டு, மாறிகள் பிரித்தல் முறையிலோ அல்லது துணை அலகு ஒன்றை ஈடு செய்வதன் மூலமோ தொகை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

சுற்றின் மேற்பரப்பு—சிறுமத் தீர்வமைவு : குறிப்பிடப்பட்ட வரம்புப் புள்ளிகளையுடைய வளைவரை கிடை அச்சைப் பற்றிச் சுழலுவதால் கிடைக்கப்பெறும் மேற்பரப்பு சிறுமம் எனில், அவ் வளைவரையைக் காண—

சுற்றின் மேற்பரப்பின் பரப்பு

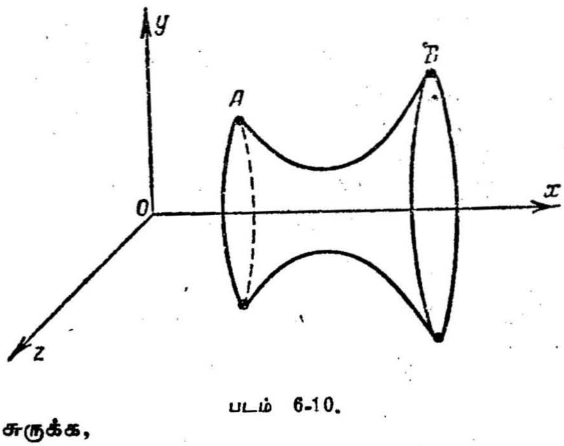
$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

தொகைச் சார்பு, y-யும், y'-யும் மட்டுமே சார்ந்துள்ளது. எனவே ஆய்லர் சமன்பாட்டின் முதல் தொகை

$$F - y' F_y' = C_1$$

எனும் அமைப்பில் இருக்கும். இங்கு

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$



படம் 6-10.

இதைச் சுருக்க,

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} - C_1$$

$y' = \sinh t$ எனஈடு செய்து, இச்சமன்பாட்டின் தொகையை எளிதில் காணலாம், அப்போது $y = C_1 \cosh t$.

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sinh t\, dt}{\sinh t} = C_1\, dt.$$

$$\therefore x = C_1 t + C_2$$

எனவே, தேவையான மேற்பரப்பு ஒரு கோட்டின் சுழற்சியினுல் கிடைக்கும்; அதன் சமன்பாட்டை, t எனும் துணை அலகைக் கொண்டு,

$$x = C_1 t + C_2$$
$$y = C_1 \cosh t$$

எனப் பெறுகிறோம். t-ன் நீக்கற்பலன் காண,

$$y = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1}$$

இது ஒரு சங்கிலியக் குடும்பம் ஆகும். இதன் சுழற்சியினுல் கிடைக்கப்பெறும் மேற்பரப்பை கன சங்கிலியம் (catenoids) என்கிறோம். தேவையானவரை கொடுக்கப்பட்ட வரம்புப் புள்ளிகள் வழியே செல்கின்றது என்ற நிபந்தனையை ஒட்டி C_1, C_2 என்ற மாறிலிகளின் மதிப்பைக் காண்கிறோம். (கொடுக்கப்பட்ட A, B-புள்ளிகளின் நிலையைப் பொருத்து ஒன்று, இரண்டு அல்லது பூச்சிய எண்ணிக்கையுள்ள *தீர்*வுகள் கிடைக்கும்.)

எடுத்துக்காட்டு 10 :

விரைவு வளைவரைத் தீர்வமைவு : A என்ற புள்ளியிலிருந்து B என்ற புள்ளிக்கு ஒரு துகள் குறைந்த நேரத்தில் நழுவி விழ எடுத்துக்கொள்ளும் பாதை (ஊடகத்தின் உராய்வையும், தடையையும் கணக்கில் கொள்ளாமல்) காண .

ஆயத் தொலைகளின் ஆதியை A என்ற புள்ளியில் கொள்வோம்; கிடை அச்சை x அச்சாகவும், நிலை அச்சை y அச்சாகவும் கொள்வோம். துகளின் வேகம் $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$. எனவே, $A(0, 0)$-ல் இருந்து $B(x_1, y_1)$ வரை நழுவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் :

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx,$$

$$y(0) = O,\ y(x_1) = y_1.$$

இங்கு தொகை நிறைவற்றதெனினும், முன்னர் கூறப்பட்ட கோட்பாட்டை இங்கு நன்கு பயன்படுத்தலாம் என எளிதில் காண முடியும். இந்தச் சார்பரமும் எளியதே ; தொகைச் சார்பு x-ஐ வெளிப்படையாக உடைத்ததாக இல்லையாதலால், ஆய்லரின் சமன்பாடு $F - y' F_{y'} = C$-ஐ முதல்; தொகையாகக் கொண்டது

இங்கு

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

சுருக்கிய பின்,

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

அல்லது, $y(1+y'^2) = C_1$

$y' = \cot t$ என ஈடு செய்ய,

$$y = \frac{C_1}{1+\cot^2 t} C_1, \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t \, dt}{\cot t}$$

$$= 2C_1 \sin^2 t \, dt$$

$$= (C_1 \, 1 - \cos 2t) \, dt$$

$$x = C_1\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2$$

$$= \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

எனவே, தேவையான வரையின் துணை அலகுச் சமன்பாடு,

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t),$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t).$$

துணையலகு t-ஐ $t_1 = 2t$ என ஈடு செய்து மாற்றி, $x = 0$ எனில் $y = 0$ ஆதலால் $C_2 = 0$ எனவும் கண்டு,

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1),$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1),$$

என்ற உருள்வளைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கும். உருள் வளை $B(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லவேண்டும் என்ற நிபந்தனையை ஒட்டி, உருளும் வட்டத்தின் ஆரம் $\frac{C_1}{2}$ எனக்

காண்கிறோம். இவ்வாறு, விரைவு வளையரை ஓர் உருள்வளை எனக் காண்கிறோம்.

$$3. \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots \dots y_n, y_1', y_2' \dots \dots y_n')\, dx.$$

என்ற அமைப்புடைய சார்பரங்கள்

முன்னர் கூறப்பட்டதைவிட பொதுவான அமைப்பையுடைய

$$v[y_1, y_2, \dots \dots y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots y_n, y'_1, y_1' \dots, y'_n)\, dx$$

சார்பரத்தின் எல்லையத்திற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளைப்பெற எல்லாச் சார்புகளுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட வரம்பு நிபந்தனைகளில்,

$$y_1(x_0) = y_{10},\quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots y_n(x_0) = y_{n0},$$
$$y_1(x_1) = y_{11},\quad y_2(x_1) = y_{21} \dots y_n(x_1) = y_{n1},$$

மற்றெல்லாவற்றையும் மாற்றாமல், ஒன்றே ஒன்றை மட்டும்,

அதாவது, $y_j(x)$-ஐ $(j = 1, 2, \dots, n)$,

மாற்றலாம். அப்போது $\bar{v}[y_1, y_2, \dots y_n]$ என்ற சார்பரம், ஒரு மாறுபடும் சார்பு ஒன்றை மட்டும் சார்ந்திருக்கின்றது; உதாரணமாக $y_i(x)$-ஐ எனில்

$$v[y_1, y_2, \dots, y_n] = v[y_i].$$

இவ்வமைப்பு நாம் பகுதி 2-ல் முன்னர் கண்டதாகும். எனவே எல்லையப்படுத்தும் சார்பு, ஆய்லர் சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும்.

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0.$$

இம்மாதிரி y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ என்ற எந்த சார்புக்கும் செயலாம் ஆதலின், ஒரு இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி கிடைக்கின்றது,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad [i = 1, 2, \dots, n].$$

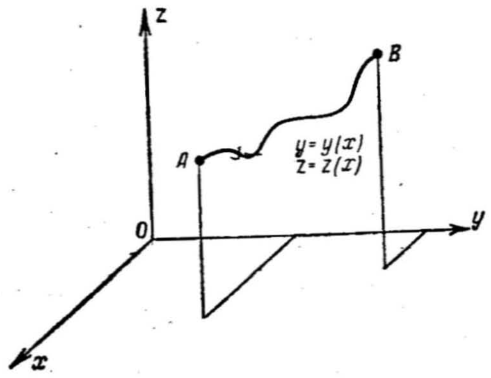
பொதுவாக இவை $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ வெளியில் ஒரு $2n$-அலகு தொகை வரைக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும்—இவை கொடுக்கப்பட்ட மாறுபடு தீர்வின் எல்லைவரைக் குடும்பமாகும்,

எடுத்துக்காட்டாக, சார்பரம், $y(x), z(x)$ என்ற இரு சார்புகளை மட்டும் சார்ந்திருந்தால்:

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx;$$

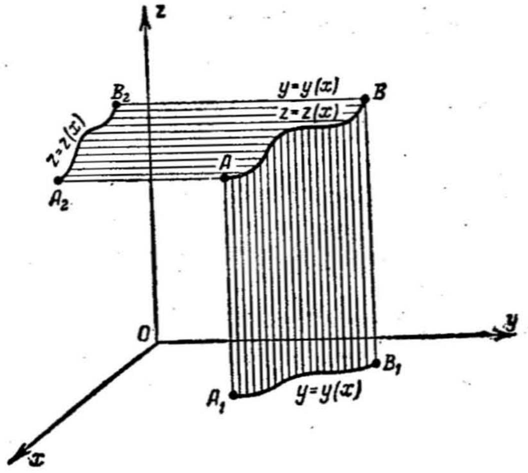
$$y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0,\ y(x_1) = y_1,\ z(x_1) = z_1.$$

அதாவது அது வெளிவரை $y = y(x)$, $z = z(x)$-ஐ எவ்வாறு எடுத்துக் கொள்கிறேமோ அவற்ருல் வரையறுக்கப்படுகிறது.



படம் 6-11.

(படம் 6.11) $z(x)$-ஐ நிலையானதாகக் கொண்டு, $y(x)$-ஐ மட்டும் மாற்ற xz — தளத்தில் வீழல் மாருக அளவில் நம் வளைவரை மாறுகின்றது. அதாவது வளைவரை உந்தியிருக்கும் உருளை $z = z_1(x)$-ன் மேல் படிந்திருக்கின்றது (படம் 6.12).



படம் 6-12.

இதே போல், $y(x)$-ஐ நிலையானதாகக் கொண்டு $z(x)$-ஐ மாற்ற, உந்தியிருக்கும் உருளை $y = y(x)$-ன் மேல் எப்போதும்

படிந்திருக்குமாறு வளைவரைகளைப் பெறுகிறோம். அப்போது ஆய்லர் சமன்பாட்டு அமைப்புகள் இரண்டு கிடைக்கின்றன :

$$F_y - \frac{d}{} F_{y'} = 0.$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கீழ்க்கண்ட சார்பரத்தின் எல்லையம் காண்க.

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} [y'^2 + z'^2 + 2yz]\, dx,$$

$$y(0) = 0; \quad y(\pi/2) = 1.$$
$$z(0) = 0; \quad z(\pi/2) = -1.$$

ஆய்லர் சமன்பாடுகளின் அமைப்புகள்

$$y'' - z = 0.$$
$$z'' - y = 0.$$

ஆகும். இவ்விரண்டு சார்புகளில் ஒன்றின் நீக்கற் பலன் காண z-ன் நீக்கற் பலன் காண, $p^{IV} - y = 0$ எனக் கிடைக்கும். இந் நேரிய சமன்பாட்டின் தொகை காண,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x + C_4 \sin x$$
$$z = y''$$
$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

வரம்பு மதிப்புகளைப் பயன்படுத்த,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1,$$

எனவே, $y = \sin x$, $z = -\sin x$,

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z')\, dx,$$

சார்பரத்தின் எல்லையம் காண்க.

ஆய்லர் சமன்பாடுகளின் அமைப்புகள்

$$F_{y'y'}\ y'' + F_{y'z'}\ z'' = 0.$$

$$F_{y'z'}y'' + F_{z'z'}\ z'' = 0.$$

$F_{y'y'}\ F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$ எனக் கொள்ள, $y'' = 0,\ z'' = 0$

எனக் காண்கிறோம். எனவே $y = C_1 x + C_2,\ z = C_3 x + C_4,$ இவை வெளியில் நேர்கோடுகளின் குடும்பங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒளித்தளப் பல்படித்தான ஊடகத்தில் ஒளியின் வேகம் $v\ (x, y, z)$ எனில், ஒளி சிதறும் கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பெர்மாட்டின் கொள்கைப்படி, $A\ (x_0, y_0)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, $B\ (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிக்கு ஒளிபாய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் T மீச்சிறு மதிப்புள்ளதாக அமையும் பாதையில் ஒளி செல்கின்றது. தேவையான வளைவரையின் சமன்பாடு $y = y\ (x),\ z = z\ (x)$ எனில்,

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v\ (x, y, z)}\, dx.$$

இச் சார்பரத்திற்கு, ஆய்லர் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

இத்தொகுப்புகள், ஒளி சிதறும் பாதைகளை வரையறுக்கின்றன.

4. பல-வரிசை வகைக்கெழுக்களைச் சார்ந்த சார்பகங்கள்

$$v\ [y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\ \{\ x, y\ (x), y'\ (x), \dots\ y^n\ (x)\ \}\ dx,$$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லைய மதிப்புகளைக் காணப் புகுவோம். இங்கு F எனும் சார்பு எல்லா மாறிகளைப் பொருத்தும் $(n + 2)$

முறை வகையிடத் தக்கது எனக் கொள்வோம்; வரம்பு நிபந்தனைகள் கீழ்க்காணும் அமைப்பையுடையன எனவும் கொள்வோம்.

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \dots\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$
$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1',\ \dots\ y^{n-1}(x_1) = y_1^{(n-1)}.$$

அதாவது வரம்புப் புள்ளிகளில், சார்பின் மதிப்புமட்டுமல்லாது, $(n-1)$ வரிசை உட்பட இவ்வரிசை வரை அதன் வகைக்கெழுக்களின் மதிப்புகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $2n$ முறை வகையிடத் தக்க $y = \bar{y}(x)$, என்ற சார்பின் வளைவரையின் மீது எல்லையம் எய்தப்படுவதாகக் கொள்வோம்., $y = \dot{y}(x)$ என்பதும் $2n$ தடவை வகையிடத்தக்க சார்பு என்றும் அதன் வளைவரை ஒப்புமை வளைவரை எனவும் கொள்வோம்.

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\,[\dot{y}(x) - y(x)].$$

அல்லது,

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y.$$

என்னும் ஒரு துணையலகு சார்புக் குடும்பத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\alpha = 0 \text{ எனில், } \quad y(x, \alpha) = y(x).$$
$$\alpha = 1 \text{ எனில், } \quad y(x, \alpha) = \bar{y}(x).$$

$v[y(x)]$ என்ற சார்பரத்தின் மதிப்புகளை, $y = y(x, \alpha)$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் மீது மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால், சார்பரம் துணை அலகு α-ஐ மட்டும் சார்ந்ததாகின்றது ; $\alpha = 0$-க்கு இதன் எல்லைய மதிப்பு கிடைக்கின்றது. எனவே $\left.\frac{d}{d\alpha} v[y(x, \alpha)]\right|_{\alpha=0} = 0$. பகுதி 1–ல் குறிப்பிட்டவாறு இவ்வகைக்கெழுவை. சார்பரம் v–ன் மாறல் எனக் கூறி δv எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$\delta v = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F\,\{x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha), \dots y^{n}(x,\alpha)\}\,dx\right]_{\alpha=0} = 0,$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \{F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y' + F_{y''}\,\delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}}\,\delta y^{(n)}\}\,dx.$$

வலக்கைப்புறமுள்ள தொகைச் சார்பில் இரண்டாவது உறுப்பைத் தொகைப்படுத்த,

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\, \delta y'\, dx = [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'}\, \delta y\, dx.$$

மூன்றாவது உறுப்பை இருமுறை தொகைப்படுத்த;

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\delta y''\, dx = [F_{y''}\, \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}\delta y\, dx.$$

இவ்வாறே தொடர்ந்து, கடைசி உறுப்பை n முறை தொகைப் படுத்த :

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}}\, \delta y^{(n)}\, dx = [F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1}$$

$$- \left[\frac{d}{dx} F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-2)}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\, \delta y\, dx.$$

வரம்பு மதிப்புகளைக் கணக்கில்கொள்ள, $x = x_0$, $x = x_1$ மதிப்புகளுக்கு $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \ldots = \delta y^{(n-1)} = 0$. இவ்வாறாக,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \ldots$$

$$+ (-)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y(n)} \} \delta y\, dx.$$

என்ருகும். எல்லையம் அடையப் பெறும் வளைவரை மீது, δy-ஐ எவ்வாறு கொண்டாலும்,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y(n)} \right\} \delta y \, dx = 0.$$

தொகைச் சார்பில் முதல் சினை அதே வரை $y = y(x)$ — மீது ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆதலால், அடிப்படைத் துணைத் தேற்றத்தின்படி அது பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும்.

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

எனவே,

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots y^n) \, dx.$$

சார்பரத்தை எல்லையப்படுத்தும் $y = y(x)$ சார்பு

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

$2n$ வரிசையுள்ள இவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை ஆய்லர் பாய்ஸான் சமன்பாடு என்கிருேம். இதன் தொகை வரைகளை, இம்மாறுபாடு தீர்வமைவின் எல்லைய வரைகள் என்கிருேம். இச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு $2n$ மாறிலிகளைக் கொண்டது. பொதுவாக இவற்றை கொடுக்கப்பட்ட.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \quad \dots \quad y^{n-1}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

என்ற $2n$ எண்ணிக்கையுள்ள வரப்பு நிபந்தனைகளிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கீழ்க்காணும் சார்பரத்தின் எல்லையவரை காண்க,

$$v[y(x)] = \int_0^1 (1 + y''^2) \, dx,$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y(1) = 1, \; y'(1) = 1$$

ஆய்லர் பாய்சான் சமன்பாடு

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0 \text{ அல்லது } y^{(iv)} = 0$$

இதன் பொதுத் தீர்வு,

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

வரம்பு நிபந்தனைகள்படி,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0$$

எனவே எல்லையம் $y = x$ என்ற நேர்கோட்டின் மீதே அடையப்படும்,

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

எனும் நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)\, dx$$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

ஆய்லர் பாய்சான் சமன்பாடு,

$$y^{(iv)} - y = 0 ;$$

இதன் பொதுத் தீர்வு,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

வரப்பு நிபந்தனைப்படி,

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0.$$

எனவே எல்லயம் $y = \cos x$ என்ற வளைவரை மீதே அடையப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$$y(-l) = 0, y'(-l) = 0, y(l) = 0, y'(l) = 0$$

எனும் நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட

$$v[y(x)] = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y\right) dx$$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

முனைகள் நிலையானதாக உள்ள நெகிழ்ச்சியான உருளை வடிவமான, வளைந்த உத்தரத்தின் அச்சைக் கண்டுபிடிக்கும் தீர்வமைவு, இம்மாறுபடு தீர்வமைவாக ஆகின்றது. உத்தரம் சீரானது எனில், ρ-ம், μ-ம் மாறிலிகள். எனவே ஆய்லர்-பாய்சன் சமன்பாடு,

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(\mu y'') = 0$$

அதாவது, $$y^{IV} = -\frac{\rho}{\mu}.$$

எனவே,

$$y = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

வரப்பு நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்த,

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^4 - 2l^2x^2 + l^4).$$

அல்லது.

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2,$$

v என்ற சார்பரம்,

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, z, z', \ldots z^{(m)})\, dx.$$

என்ற அமைப்புடையதெனில், $z(x)$-ஐ நிலையானதாகக் கொண்டு $y(x)$-ஐ மட்டும் மாற்றி அமைக்க, எல்லயப்படுத்தும் சார்புகளான $y(x)$-ம், $z(x)$-ம்,

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} - + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

எனும் ஆய்லர்-பாய்சன் சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும், $y(x)$-ஐ நிலையானதாகக்கொண்டு, $z(x)$-ஐ மாற்ற இதே சார்புகள்,

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0,$$

எனும் சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யும்.

இவ்வாறு $z(x)$, $y(x)$ சார்புகள் கீழ்க்காணும் இரு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைச் சரிசெய்யும்.

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0.$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^m} = 0.$$

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)})\, dx$$

எனும் பல சார்புகளைச் சார்ந்த சார்பரத்தின் எல்லையம் காணவும் இந்த முறையைப் பின்பற்றலாம். $y_i(x)$ எனும் சார்பை மட்டும் மாற்றி, ஏனையவற்றை நிலையானவையாகக் கொள்ள, எல்லயத்திற்கான அடிப்படைத் தேவையாக

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

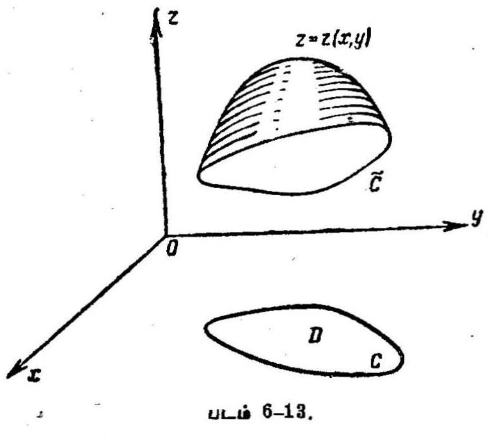
என்ற நிபந்தனையைப் பெறுகிறோம்.

5. பலசாரா மாறிகளைச் சார்ந்த சார்புகளைச் சார்ந்த சார்பரங்கள்

கீழ்க்காணும் சார்பரத்தின் எல்லயம் காண்போம்.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left(F(x,y,z) \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy} \right) dx\, dy ;$$

D எனும் அரங்கத்தின் வரம்பு C-ன் மேல் $z(x, y)$ சார்பின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன; அதாவது C எனும் ஒரு வெளிப்பாதை (அல்லது வளைவரை) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது;



படம் 6–13.

அதன் வழியே ஏற்கத்தக்க எல்லா மேற்பரப்புகளும் செல்கின்றன (படம் 6·13). குறியீடுகளை சுருக்கமாகத்

கொள்ள $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ எனக் கொள்வோம். F எனும் சார்பமும்முறை வகையிடத்தக்கது எனக் கொள்வோம். எல்லயப் படுத்தும் மேற்பரப்பு $z = z(x, y)$ இருமுறை வகையிடத்தக்கது எனவும் கொள்வோம்.

$z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha\, \delta x$ எனும் ஒரு துணை அலகு மேற்பரப்பு குடும்பத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $\delta z = z(x, \bar{y}) - z(x, y)$; இதில் $\alpha = 0$ எனில் எல்லயம் அடையப்பெறும் $z = z(x, y)$ என்ற மேற்பரப்பும், $\alpha = 1$ எனில் ஏற்கத்தக்க ஒரு மேற்பரப்பு $z = z(x, y)$-ம் அடங்கியுள்ளன. $z(x, y, \alpha)$ என்ற குடும்பத்தின் சார்புகளின்மீது, v எனும் சார்பம் α எனும் சார்பாக ஆகின்றது ; $\alpha = 0$-க்கு இது எல்லயம் அடைய வேண்டும். எனவே,

$$\left.\frac{\partial}{\partial \alpha} v\,[z\,(x, y, \alpha)]\right|_{\alpha = 0} = 0 .$$

பகுதி 1-ல் கண்டதற்கு ஏற்ப, $\alpha = 0$க்கு, $v\,[z\,(x,y,\alpha)]$-ன் α-ஐப் பொருத்த வகைக்கெழுவை δv எனக் குறிப்பிட்டு, அதைச் சார்பரத்தின் மாறல் எனில்,

$$\delta v = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint_D F[x,y,z\,(x,y,\alpha), p(x,y,\alpha), q(x,y,\alpha)]\, dx\, dy \right\}_{\alpha = 0}$$

$$\ldots = \iint_D [F_z\, \delta z + F_p\, \delta p + F_q\, \delta q]\, dx\, dy;$$

இங்கு,

$$z\,(x,y,\alpha) = z\,(x,y) + \alpha\, \delta z,$$

$$p\,(x,y,\alpha) = \frac{\partial z\,(x, y, \alpha)}{\partial x} = p\,(x, y) + \alpha\, \delta p,$$

$$q\,(x,y,\alpha) = \frac{\partial z\,(x, y, \alpha)}{\partial y} = q\,(x, y) + \alpha\, \delta q.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{ F_p\, \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x}\{ F_p \}\, \delta z + F_p\, \delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{ F_q\, \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y}\{ F_q \}\, \delta z + F_q\, \delta q,$$

ஆதலால்

$$\iint_D (F_p\, \delta p + F_q\, \delta q)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\, \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\, \delta z\} \right] dx\, dy$$

$$- \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z\, dx\, dy;$$

இதில் $\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ என்பது x-ஐச் சார்ந்த மொத்த பகுதி வகைக்கெழு ஆகும். இதைக் கணக்கிடும்போது, y-ஐ நிலையானதாகக் கொண்டாலும், z, p, q என்பன x-ஐச் சார்ந்தது என்பதைக் கணக்கில் கொள்கிறோம்.

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x};$$

இதேபோல்

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y};$$

நாம் அறிந்த

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_C (Ndy - Mdx)$$

கிரீன் சார்பு கொண்டு

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\, \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\, \partial z\} \right] \delta\, x\, dy$$

$$= \int_C (F_p\, dy - F_q\, dx)\, \delta z = 0,$$

எனப் பெறுகிறோம். ஏற்கத்தக்க எல்லா மேற்பரப்புகளும் C எனும் வெளிவரை வழியே செல்வதால், δz எனும் மாறல் C எனும் வளை கோடு மீது பூச்சியமாகும்; எனவே கடைசியில் காணப்படும் தொகை பூச்சியமாகும். எனவே,

$$\iint_D [F_p\, \delta p + F_q \delta q]\, dx\, dy$$

$$= - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy.$$

எல்லையத்திற்குத் தேவையான நிபந்தனையான

$$\iint_D (F_z\, \delta z + F_p\, \delta p + F_q\, \delta q)\, dx\, dy = 0$$

என்பது

$$\iint_D \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right) \delta z\, dx\, dy = 0$$

என்னும் உருவை அடைகின்றது. மாறலான δz யாதாமொன்று ஆதலாலும் (δz மீது தொடர்ச்சி, வகைபடுதன்மை வரைவரை C மேல் பூச்சியமாதல் போன்ற பொதுப்படையான நிபந்தனைகளே உள்ளன), முதல் கிளை தொடர்ச்சியானது ஆதலாலும். அடிப் படைத் துணைத் தேற்றப்படி, எல்லயப்படுத்தும் $z = z(x, y)$ மேற் பரப்பின் மீது,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} \equiv 0.$$

எனவே,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0.$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு $z(x, y)$ ஒரு தீர்வு ஆகும். எல்லயப் படுத்தும் சார்பு $z(x, y)$ தீர்வாக அமையும் இந்த இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை 'ஆஸ்ட்ரோ க்ராட்ஸ்கி சமன்பாடு' என்கிறோம். புகழ்வாய்ந்த ரஷிய கணித மேதை ஆஸ்ட்ரோ க்ராட்ஸ்கி 1834-ல் முதன் முதலாக இச் சமன்பாட்டைக் கண்டார். (செவ்வக வடிவ அரங்கம் D-க்கு இதற்கு முன்னரே ஆய்லர் கண்டிருந்தார்.)

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

சார்பு z-ன் மதிப்புகள், அரங்கம் D-ன் வரப்பு C-ன் மேல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது : $z = f(x, y)$. இங்கு ஆஸ்ட்ரோ கிராட்ஸ்கியின் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ஆகும். சுருக்கமாகக் கூற

$$\Delta z = 0.$$

ஆகும்; இது நாம் அறிந்த லாப்லசின் சமன்பாடு D-ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், அரங்கம் D-ன் வரப்பில் குறிப்பிடப்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டதாகவும் ஆன தீர்வைக் காணவேண்டும். கணித பௌதிகவியலில் அடிப்படைத் தீர்வமைவுகளில் ஒன்றான இது டிரிஷ்லேயின் தீர்வமைவு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx\, dy.$$

அரங்கம் D-ன் வரப்பில் சார்பு z கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, இங்கு ஆஸ்ட்ரோ கிராட்ஸ்கியின் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. சுருக்கமாக,

$$\Delta z = f(x, y)$$

எனலாம். இதை பாய்சான் சமன்பாடு என்கிறோம், இதுவும் கணித-பௌதிகவியலில் அடிக்கடி காணப்பெறுவதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை C-ன் மேல் அமைந்த சிறுமப் பரப்பையுடைய மேற்பரப்பு காண்பது

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dx\, dy$$

என்ற சார்பரத்தின் சிறுமம் காணும் தீர்வமைவாக முடிகின்றது. இங்கு ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கியின் சமன்பாடு

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{b}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right\} = 0$$

என்றாகின்றது. மாறாக,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$$

அதாவது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சராசரி வளைவு பூச்சியமாகும். கொடுக்கப்பட்ட C எனும் வளைவரை மீது படியவைக்கப்பட்ட சோப்புக் குமிழ்கள், இச்சிறும மேற்பரப்புக்கு கண்கூடான ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்,

$$v\,[z\,(x_1, x_2, \dots x_n)] =$$
$$= \int\int \dots \underset{D}{\dots} \int F\,(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n)\;\; dx_1, dx_2 \dots dx_n$$

என்ற சார்பரத்திற்கு, $\left(p_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}\right)$ முன்னர் மாதிரியே, $\delta v = 0$ என்ற எல்லயத்திற்குத் தேவையான அடிப்படை நிபந்தனை கொண்டு, கீழ்க்காணும் ஆஸ்ட்ரோ கிராட்ஸ்கியின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\;\{ F_{p_i} \} = 0.$$

சார்பரம் v-ஐ எல்லயப்படுத்தும் $z = z\,(x_1, x_2, \dots x_n)$ எனும் சார்பு இச்சமன்பாட்டைச் சரிசெய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$v = \iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy\, dz.$$

என்ற சார்பரத்திற்கு, ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கியின் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

சார்பரம் v-ன் தொகைச் சார்பு பல—வரிசை வகைக்கெழுக்களைச் சார்ந்திருந்தால், ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கியின் சமன்பாட்டை அடையப் பயன்படுத்திய மாற்றங்களை பல முறை பயன்படுத்தி, எல்லயத்திற்குத் தேவையான நிபந்தனையாக, எல்லயப்படுத்தும் சார்பு, ஆய்லர்—பாய்சான் சமன்பாட்டைப் போன்ற ஒரு சமன்பாட்டைச் சரி செய்யவேண்டும், எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$v\,[z\,(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

என்ற சார்பரத்திற்கு,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_q\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{F_r\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left\{F_s\right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{F_t\right\} = 0.$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இங்கு,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

இந்த நான்காம்-வரிசை பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை v எனும் சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்தும் சார்பு சரிசெய்கிறது.

எடுத்துககாட்டாக,

$$v = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx\ dy.$$

என்ற சார்பரத்திற்கு, எல்லயப்படுத்தும் சார்பு z, இருவகைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டைச் சுருக்கமாக $\triangle\,\Delta z = 0$, எனக் குறிக்கலாம்.

$$v = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2z f(x, y)\right] dx\ dy$$

என்ற சார்பரத்திற்கு, எல்லயப்படுத்தும் சார்பு $z(x,y)$, $\triangle\,\Delta z = f(x, y)$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆக ஆகின்றது.

$$v = \iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dx\ dy$$

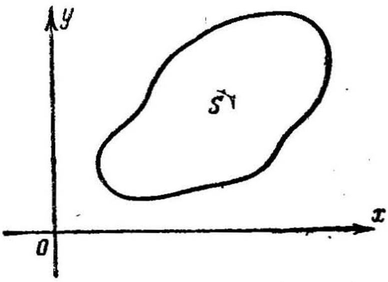
என்ற சார்பரத்தின் எல்லயத் தீர்வமைவுகளிலும், அதைவிடப் பொதுவான சார்பரமான

$$= \iint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\ dy,$$

(μ ஒரு துணை அலகு) என்பதன் தீர்வமைவிலும், இந இசைச் சமன்பாடு பங்கேற்கின்றது.

6. துணை அலகு அமைப்பில் மாறுபடு தீர்வமைவுகள்

பல மாறுபடு தீர்வமைவுகளில், தீர்வை துணை அலகுகள் மூலம் காண்பது எளிதாக இருக்கும். உதாரணமாக l நீளச் சுற்றளவுடன், அதிகபட்சபரப்பு S ஐ அடைக்கும் வளைவரையைக் காணும், சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவில், தீர்வை $y = y(x)$ என்ற அமைப்பில் காண முயல்வது இக்கட்டானது. தீர்வமைவின் அமைப்பே, சார்பு $y(x)$ தெளிவற்றதாகும் எனச் சுட்டிக் காட்டுகின்றது. (படம் 6.14)



படம் 6.14.

எனவே, இத்தீர்வமைவில், தீர்வை $x = x(t)$, $y = y(t)$ எனத் துணை அலகுகொண்டு காண முயல்வது நலம் பயக்கும். எனவே, இங்கு

$$S[x(t), y(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt$$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லையம் காண முற்படுகிறோம். இங்கு

$$l = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$ l ஒரு மாறிலியாக இருக்க வேண்டும்.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$ என்ற ஒரு சார்பரத்தின் எல்லையம் காண முற்படும்போது, $x = x(t)$, $y = y(t)$ எனத்

துணை அலகுகள் கொண்டு தீர்வுகாண்பது நலம் பயக்கும் எனில், சார்பரத்தை கீழ்க்கண்ட உருவில் காணலாம்:

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left\{ x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right\} \dot{x}(t)\, dt.$$

இவ்வாறுன, மாறிகளின் உருமாற்றத்திற்குப் பிறகு, தொகைச் சார்பு, t-ஐ வெளிப்படையாகக் கொண்டிருக்கவில்லை என்பதும், $\dot{x}, \dot{y}$ மாறிகளைப் பொருத்து முதல்படி ஒருபடித்தான சார்பு என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது.

இவ்வாறு சார்பரம் $v[x(t), y(t)]$ என்பது,

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi\{t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\}\, dt,$$

அமைப்பைக் கொண்ட $x(t), y(t)$ சார்புகளைச் சார்ந்த ஏதாவது ஒரு சார்பரம் ஆகாது என்றும், அவ்வகையான சார்பரங்களில் குறிப்பிடத்தக்கதான—தொகைச் சார்பு t-ஐ வெளிப்படையாகக் கொண்டிராததும், $\dot{x}, \dot{y}$ மாறிகளில் முதல்படி ஒருபடித்தானதும் ஆன—ஒன்றாகும்.

தேவையான வளைவரையின் மற்றொரு துணை அலகுச் சமன்பாட்டை $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$,— கொண்டால், சார்பரம்,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau} \right) \dot{x}_\tau \; d_\tau.$$

என்ற அமைப்பைக் கொண்டதாகின்றது. எனவே வளைவரையின் துணை அலகுச் சமன்பாட்டை மாற்றிட சார்பரம் v-ன் தொகைச் சார்பு வேறு அமைப்பைப் பெறுவதில்லை. இவ்வாறு சார்பரம் v, வளைவரையின் வகையைப் பொருத்ததே அன்றி, அதன் துணை அலகுக் குறியீட்டைப் பொருத்தது அல்ல.

கீழ்க்கண்ட கூற்று உண்மை என்பதை எளிதில் காணலாம்:

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi\{t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\}\, dt,$$

என்ற சார்பரத்தின் தொகைச் சார்பு, t-ஐ வெளிப்படையாகக் கொண்டிராமலும், $\dot{x}, \dot{y}$-ல் முதல்படி ஒரு படித்தானதும் ஆக

இருந்தால், சார்பரம் $v[x(t), y(t)]$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ என்ற வளைவரையின் வகையைப் பொருத்ததே அன்றி அதன் துணை அலகுக் குறியீட்டைப் பொருத்தது அல்ல.

$$\Phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\,\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

எனக் கொண்டு,

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi\{x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\}\, dt$$

என்ற சார்பரத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\tau = \Phi(t), [\Phi(t) \neq 0], x = x(\tau), y = y(\tau)$$

எனக் கொண்டு ஒரு புதிய துணை அலகு குறியீட்டுக்கு மாற்ற,

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi\{x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\}\, dt$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi\{x(\tau), y(\tau), \dot{x}_{\tau}(\tau)\,\dot{\Phi}(t), \dot{y}_{\tau}(\tau)\,\dot{\Phi}(t)\}\, \frac{d\tau}{\dot{\Phi}(t)}.$$

Φ என்பது $\dot{x}, \dot{y}$-ல் முதல் படியில் படித்தானது ஆதலால்,

$$\Phi(x, y, \dot{x}_{\tau}\dot{\phi}, \dot{y}_{\tau}\dot{\phi}) = \dot{\phi}\,\Phi(x, y, \dot{x}_{\tau}, \dot{y}_{\tau});$$

எனவே,

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}_t, \dot{y}_t)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}_{\tau}, \dot{y}_{\tau})\, d\tau,$$

அதாவது, துணை அலகை மாற்றி அமைப்பதால், தொகைச் சார்பு மாற்றமுறவில்லை.

ஒரு வில்லின் நீளம் $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$*-ம், ஒரு குறிப்பிட்ட

---

* $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ என்ற சார்பு, முதல் படியில் ஒருபடித்தானதும் மிகையானதும் ஆகும். அதாவது $F(kx, ky) = k\,F(x, y)$. இங்கு மாறியை $\tau = \phi(t)$ என மாற்ற, $\dot{\phi}(t) > 0$ எனக் கொள்ளலாம். ஆதலால், இப் பகுதியில் விலக்கப் பட்டமுறைக்கு இது போதுமானது.

வளைவரை அடைக்கும் பரப்பு, $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})dt$-ம் இவ் வகைச் சார்பரங்களுக்கு உதாரணங்களாகும்.

Φ என்ற சார்பு $\dot{x}, \dot{y}$-ல் ஒருபடித்தானதாக உள்ள,

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

எனும் அமைப்புடைய சார்பரங்களின் எல்லயம் காணவும், தொகைச் சார்பு $\Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ யாதாமொன்ருகவும் உள்ள சார்பரங்களுக்கும்,

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0,$$

$$\Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}} = 0;$$

எனும் ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுகள் கண்டால் போதுமானது. எனினும், இங்கு கொண்டுள்ளதில், இச் சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவை எனக் கொள்ள முடியாது; $x = x(t),\ y = y(t)$ என்பது ஒரு தீர்வு; அதே வளைவரையை குறிக்கும் மற்ெருரு துணை அலகின் குறியீட்டை உடைய வேருெரு ஜோடிச் சார்புகளும் தீர்வு; ஆய்லர் சமன்பாட்டில் இவை ஒன்றையொன்று சாராததால், வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வின் அமைவுறு தன்மைக்கும், அருந்தனிப் பண்புக்கும் முரண்பாடானதாக ஆகும். இதிலிருந்து, $\dot{x}, \dot{y}$-ல் முதல்படி ஒருபடித்தான சார்பு Φ-ஐக் கொண்ட,

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

என்ற அமைப்புடைய சார்பரங்களுக்கு, ஆய்லர் சமன்பாடுகளில் ஒன்று மற்றதில் இருந்து பெறக்கூடியது என உணரலாம். எல்லய வரை காண, ஓர் ஆய்லர் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டு, துணை அலகை நிர்ணயிக்கும் சமன்பாட்டுடன் கூட தொகைப் படுத்த வேண்டும். உதாரணமாக, $\phi_x - \frac{d}{dt}\phi\dot{x} = 0$ என்ற சமன்பாட்டுடன், வில்லின் நீளம் ஒரு துணை அலகாகக் கொள்ளப் படுகிறது எனக் குறிக்கும் $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டை இணைக்கலாம்.

7. சில பயன்பாடுகள்

இயக்கவியலில் அடிப்படை மாறுபடு கோட்பாடு (Ostrogradsky–Hamilton)-ன் சிறுமச் செயல் கோட்பாடு ஆகும். பல துகள்களின் தொகுப்பின் பலவகையான இயக்கத்தில் (கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணைந்த), τ இயக்க ஆற்றல், U-நிலை ஆற்றல் எனக் குறிக்க, $\int_{t_0}^{t_1} (\tau - U)\, dt$ என்ற தொகையின் கணநிலைப் பெறுமானத்தை, (அதாவது சார்பின் மாறல் பூச்சியமாகுமாறு உள்ள ஒரு சாராமாறியின் மதிப்பு) அளிக்கும் இயக்கமே அவ்வியக்கமாகும்.

இக்கோட்பாட்டை இயக்கவியலின் சில தீர்வமைவுகளுக்குப் பயன்படுத்துவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

m_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் திணிவுகள் உள்ள துகள்கள், (x_i, y_i, z_i) என்ற அச்சு தூரங்களையுடைய புள்ளிகளில் இருந்து, அவற்றின்மேல் செயற்படும் விசைகள் $\mathbf{F}_i$ எனில், (விசைச் சார்பு அல்லது நிலைப் பண்பு U அச்சு தூரங்களை மட்டுமே சார்ந்தது).

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\ ; F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}\ ;\ F_{iz} = \frac{\partial U}{\partial z_i}\ ;$$

இங்கு F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} என்பன (x_i, y_i, z_i) புள்ளியில் செயல்படும் $\mathbf{F}_i$ வெக்டரின் கூறுகள். இவ்வமைப்பின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இங்கு இயக்க ஆற்றல்

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\text{ -ம்}$$

நிலை ஆற்றலும் U-க்கு சமம்.

$\int_{t_0}^{t_1} (\tau - U)\, dt$ தொகைக்கு ஆய்லரின் சமன்பாடுகள்

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{x}_i} = 0,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{y}_i} = 0,$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{z}_i}\text{, ஆகும்.}$$

அதாவது,

$$m_i \ddot{x}_i - F_i x = 0,\ m_i \ddot{y}_i - F_i y = 0\ m_i\ \ddot{z}_i - F_i z = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

இயக்கம்,

$$\Phi_j\,(t, x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_n) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots m, m < 3_n)$$

எனும் மற்றுமோர் கட்டுப்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு உட்பட்டதெனில், கட்டுப்பாட்டுச் சமன்பாடுகளில் இருந்து m மாறிகளையும் (t-ஐச் சேர்க்காமல்) $3n - m$ சாராமாறிகள் மூலம் கூறக் கூடும். அல்லது எல்லா $3n$ மாறிகளையும், புதிய $3n - m$ (ஏற்கெனவே சாராமாறிகளான) கூறுகளை,

$$q_1, q_2 \ldots q_{3n-m}$$

மூலம் கூறலாம். T-ஐயும், U-ஐயும் $q_1, q_2, \ldots q_{3n-m}, t$ இவற்றின் சார்பாகக் கருதலாம்;

$$T = T\,(q_1, q_2, \ldots q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_{3n-m}, t).$$
$$U = U\,(q_1, q_2, \ldots q_{3n-m}, t).$$

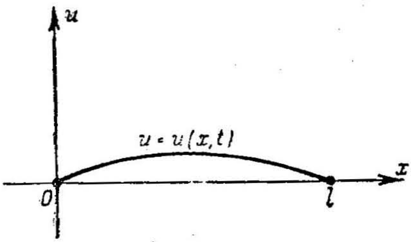
ஆய்லர் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$\frac{\partial\,(T - U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots 3_{n-m})$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : 2

தன்னிச்சையாக இயங்கும் கயிற்றின் அதிர்வியக்கத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.



படம் 6–15

கயிற்றின் ஒரு முனையில் ஆதியைக் கொள்வோம். இழுவிசையின் கீழ் ஓய்வில் இருக்கும்போது கயிறு ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளது. அதை x-அச்சாகக் கொள்வோம். சமநிலையில்

இருந்து மாறுபட்ட எந்த விலக்கமும். x, t இவற்றின் $u(x, t)$ என்ற ஒரு சார்பாகும்.

முழுவதும் நெகிழ்வான கயிற்றின் ஒரு சிறு பகுதியின் நிலை ஆற்றல் U, கயிற்றின் நீட்சியின் விகிதத்தில் இருக்கும். dx நீளமுள்ள ஒரு துண்டின் நீளம், சமநிலையில் இருந்து மாறுபட்ட நிலையில் ஏறத்தாழ $dx = \sqrt{1 + u''^2_x}\, dx$ நீளம் இருக்கும்; எனவே இத்துண்டின் நீட்சி $(\sqrt{1 + u'^2_x} - 1)\, dx$ ஆகும். டெய்லரின் சூத்திரப்படி $\sqrt{1 + u'^2_x} \approx 1 + \frac{1}{2} u'x^2$. u'_x-ஐ சிறியதாகக் கொண்டு, u'_x-ன் உயர்ந்த அடுக்குகளை ஒதுக்கிவிட, துண்டின் நிலை ஆற்றல் $\frac{1}{2} k\, u'^2_x\, dx$ ($\bar{k}$ ஒரு விகிதச் சினை);

முழு கயிற்றின் நிலை ஆற்றல்

$$\frac{1}{2} \int_0^l u'^2_x\, dx.$$

கயிற்றின் இயக்க ஆற்றல்

$$\frac{1}{2} \int_0^l P\, u'^2_t\, dx.$$

(ρ கயிற்றின் அடர்த்தி). எனவே $\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$, இங்கு

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho u'^2_t - \frac{1}{2} k u'^2_x \right] dx\, dt,$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். சார்பரம் v-க்கு கயிற்றின் இயக்கச் சமன்பாடு (Ostrogradsky) சமன்பாடாகும். இவ்வாறு, கயிற்றின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u'_t) - \frac{\partial}{\partial x} (k\, u'_x) = 0,$$

ஆகும், கயிறு சீரானது எனில். ρ-ம், k-ம் மாறிலிகள். எனவே அதிர்வுறும் கயிற்றின் சமன்பாடு

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

ஆகும்.

இனி, கயிறு சமநிலையில் இருக்கும்போது அதற்குச் செங்குத்தான திசையில் ஒரு புறவிசை, ஓர் அலகு திணிவுக்கு $f(t, x)$ இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்புறவிசையின், விசைச் சார்பு இச்சிறு துண்டின்மேல் $\rho f(t, x)\, u\, dx$ என எளிதில் காணலாம்; எனவே (Ostrogradsky Hamilton) தொகையான,

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{0}^{l} \left[\frac{1}{2} \rho\, u_t'^2 - \frac{1}{2} k\, u_x'^2 + \rho f(t,x)\, u \right] dx\, dt$$

ஆகும்.

புற விசையுடன் கூடிய கயிற்றின் அதிர்வியக்கச் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u'_t) - \frac{\partial}{\partial x} (k u'_x) - \rho f(t, x) = 0.$$

கயிறு சீரானதாக இருந்தால், சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$$

ஆகும். இதேபோல், அதிர்வுறும் சவ்வின் சமன்பாட்டையும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு நீள் சட்டத்தின் அதிர்வின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். சட்டம் சமநிலையில் இருக்கும் நிலையில் அதன் அச்சின் திசையில் x-அச்சை எடுத்துக்கொள்க. சமநிலையில் இருந்து அதன் விலக்கம் x, t இவற்றின் சார்பான $u(x, t)$ ஆகும். சட்டத்தின் நீளம் l எனில் அதன் இயக்க ஆற்றல்,

$$T = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \rho u_t'^2\, dx.$$

சட்டம் நீள்தன்மை அற்றது எனக் கொள்வோம், மீள் தன்மையுடைய நிலையான வளைவு உடைய சட்டத்தின் நிலை ஆற்றல்

வளைவின் வர்க்கத்திற்குச் சமம். இதன் விளைவாக, சட்டத்தின் நிலை ஆற்றலின் வகையீடு,

$$dU = \frac{1}{2} k \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}^2.$$

பொதுவாக அச்சின் வளைவு மாறுபடும் முழு சட்டத்தின் நிலை ஆற்றல்,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}^2 dx.$$

சமநிலையில் இருந்து சட்டத்தின் விலக்கம் சிறியது எனில்,

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - x$ கணக்கிலிடத் தேவையில்லை, அப்போது,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^t k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dx$$

Ostrogradsky Hamilton தொகை

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho\, u'^2_t - \frac{1}{2} k\, u''^2_{xx}\right] dx\, dt$$

எனவே, மீள் தன்மையுடைய சட்டத்தின் தன்னிச்சையான அதிர்வின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u'_t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u''_{xx}) = 0,$$

ஆகும். சட்டம் சீரானது எனில், ρ-ம், k-ம் மாறிலிகள்; எனவே, இயக்கச் சமன்பாடு,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

ஆகும். சட்டத்தின்மேல் ஒரு புற விசை $f(t, x)$ செயல்பட்டால், விசையின் நிலைப் பண்பையும் கணக்கில் கொள்ளவேண்டும் (முந்திய உதாரணம் காண்க).

சிறுமச் செயல் கோட்பாட்டை, களச் சமன்பாடுகள் பெறவும் பயன்படுத்தலாம்.

எண்கணிய அல்லது வெக்டர் அல்லது டென்சார் களம் $w = w(x, y, z. t)$ ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். பொதுவாக,

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$ எனும் தொகை, L எனும் ஒரு சார்பின், x, y, z, t கூறுகளைப் பொருத்த ஒரு நான்கு மடங்கு தொகைக்கு சமமாக இருக்கும். L-ஐ இலக்கிராஞ்ந் (Lagrange) சார்பின் அடர்த்தி அல்லது லாக்ராஞ்ஜியன் என்று கூறுகிறோம்.

சாதாரணமாக, லக்ராஞ்சியன், $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}$ இவற்றின் சார்பாக இருக்கும்.

$$L = L\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

எனவே செயலின் அமைப்பு,

$$\iiiint_D L\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx\, dy\, dz\, dt \quad \ldots (6\cdot3)$$

ஆகும். சிறுமச் செயல் கோட்பாட்டின்படி, களச் சமன்பாடு (6·3) சார்பரத்தின் ஆஸ்ட்டோகிராட்ஸ்கி சமன்பாடு ஆகும்.

$$L_w - \frac{\partial}{\partial x}\{L_{p_1}\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L_{p_2}\} - \frac{\partial}{\partial z}\{L_{p_3}\} - \frac{\partial}{\partial t}\{L_{p_4}\} = 0$$

இங்கு,

$$p_1 = \frac{\partial w}{\partial x},\ p_2 = \frac{\partial w}{\partial y},\ p_3 = \frac{\partial w}{\partial z},\ p_4 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

அத்தியாயம் 6.
பயிற்சி கணக்குகள்

1. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx$$

   எனும் சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

2. $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$ என்ற நிபந்தனையுடன் கூடிய,

   $$v[y(x)] = \int (y^2 + 2\,xyy')\, dx$$

   எனும் சார்பரத்தின் எல்லயத்திற்கான ஆய்வு செய்க.

3. $y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

எனும் நிபந்தனைகளுடன் கூடிய,

$$v[y(x)] = \int_{0}^{1} (xy + y^2 - 2y^2 y^1)\, dx$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயத்திற்கான ஆய்வு செய்க.

4. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y^1)\, dx,$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லையவரை காண்க.

5. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\, dx$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

6. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)\, dx$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

7. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1 + y^2}{y'^2}\, dx$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

8. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x)\, dx$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

9. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லய வரை காண்க.

10. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y'''^2)dx,$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

11. $$v[y(x, z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'_)^2 dx,$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

12. $$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

எனும் சார்பரத்தின் ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கி சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $$v[u(x, y, z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2uf(x,y,z)\right] dx, dy, dz.$$

எனும் சார்பரத்தின் ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கி சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}\, dx.$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

15. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2y\, e^x)dx.$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

16. $$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x)\, dx.$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க

17. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(y^2 + (y')^2 + \frac{2y}{\cos hx} \right) dx$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

18. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy]\, dx$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

19. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x]\, dx$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

20. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3]\, dx$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரை காண்க.

7. நகரும் வரம்புகளுடன் கூடிய மாறுபடு தீர்வமைவுகளுப், மற்றுப் சில தீர்வமைவுகளும்

1. நகரும் வரம்புகளுடன்கூடிய ஓர் எளிய தீர்வமைவு

அத்தியாயம் 6-ல்

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y. y')\, dx,$$

எனும் சார்பரத்தைப் பற்றிப் படிக்கும்போது வரம்புப் புள்ளிகளான (x_0, y_0)-ம் (x_1, y_1)-ம் நிலையானவை என மேற் கொண்டோம்: இனி இவற்றுள் ஒன்று அல்லது இரண்டுமே இடம் பெயரக்கூடியவை எனக் கொள்வோம். அப்போது ஏற்கத்தக்க வளைவரைகளின் இனம் இன்னமும் விரிவடைகின்றது; பிரச்சினையில் உள்ள வளைவரையின் வரம்பு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் ஒப்புமை வளைவரைகள் மட்டுமின்றி, இடம்பெயர்ந்த வரம்புப் புள்ளிகளை உடைய வளைவரைகளையும் ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

எனவே நகரும் வரம்பு புள்ளிகளுடைய தீர்வமைவில், $y = y(x)$ என்ற வளைவரை மீது எல்லயம் எய்தப்பட்டால், $y = y(x)$ என்ற வளைவரையுடன் பொதுவான வரம்பு புள்ளிகள் உள்ள இன்னமும் குறுகிய வளைவரை இனத்தைப் பொருத்து நிச்சயம் எல்லயம் எய்தப்படும், எனவே, நிலையான வரம்புப் புள்ளிகள் உள்ள தீர்வமைவுக்கு எல்லயத்திற்கு அடிப்படைத் தேவையான நிபந்தனை பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும். அதாவது $f(x)$ எனும் சார்பு

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

என்ற ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தீர்வாக இருக்க வேண்டும். எனவே நகரும்—வரம்பு தீர்வமைவிலும் எல்லயம் அடையப்

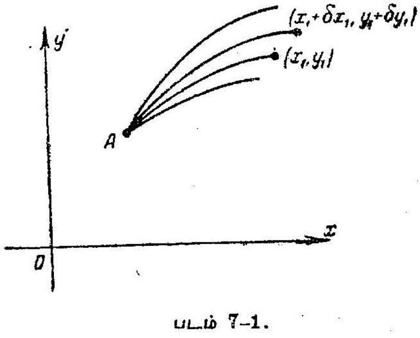
பெறும் $y = y\ (x)$ என்னும் வளைவரைகள் எல்லயவரைகளே யாகும்.

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வில் ஏதாமொரு இரு மாறிலிகள் உண்டு; அவற்றைக் காண இரு நிபந்தனைகள் தேவை, நிலையான வரம்புப் புள்ளிகள் உள்ள தீர்வமைவில் இந் நிபந்தனைகள்

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

என இருந்தன. நகரும் வரம்பு தீர்வமைவில் இவற்றின் ஒன்று அல்லது இரண்டுமே இருப்பதில்லை. ஆய்லர் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வில் உள்ள இந்த இரு மாறிலிகளைக்காண, இல்லாமல் போகும் நிபந்தனைகளுக்கு பதிலாக வேறு நிபந்தனைகளை, மாறல் δv பூச்சியத்திற்கு சமமாயிருக்க வேண்டும் என்ற எல்லயத்திற்கு அடிப்படைத் தேவையான நிபந்தனையைக் கொண்டு காண்கிறோம்.

நகரும் வரப்பு தீர்வமைவில், ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளான $y = y\,(x, C_1, C_2)$ மீதே எல்லயம் அடையப்படுவதால், இனி சார்பரத்தின் மதிப்புகளை இக்குடும்பத்தின் சார்புகள் மீதே எடுத்துக்கொள்வோம். இப்போது சார்பரம் $v\,[y\,(x, C_1, C_2)]$ என்பது, C_1, C_2 என்ற துணை அலகுகளின் சார்பாகவும், தொலகையின் எல்லைகளான x_0, x_1 இவற்றின் சார்பாகவும் உள்ளது. சார்பரத்தின் மாறலும், இச்சார்பின் வகையீடும் ஒன்றுகின்றது, தீர்வமைவை எளிதாக்க வரம்பு புள்ளிகளில்



படம் 7–1.

ஏதாவது ஒன்றுன (x_0, y_0) நிலையானதென்றும், மற்றொரு வரப்பு புள்ளி (x_1, y_1) நகர்ந்து $(x_1 + \triangle x_1, y_1 + \triangle y_1)$ என்ற புள்ளிக்கு செல்கின்றது என்றும் கொள்வோம். மாறல் நுண்கணிதத்தில் குறிக்கும் முறையில் இப்புள்ளியை $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

δy_0 $\delta y'$ என்ற மாறல்களின் எண் மதிப்பும், δx_1, δy_1 என்ற ஏற்றங்களின் எண் மதிப்பும் சிறியதாக இருந்தால், ஏற்கத்தக்க வளைவரைகள் $y = y(x)$, $y = y(x) + \delta y$-களை ஒன்றுக்கொன்று அருகாமையில் உள்ளன என்கிறோம். $(\delta x, \delta y)$ என்ற ஏற்றங்களை பொதுவாக எல்லை மதிப்புகள் x_1, y_1-ன் மாறல்கள் எனலாம்.

(x_0, y_0) வழியே செல்லும் எல்லய வளைவரைகள் $y=y(x,C_1)$ என்ற வளைவரைக் கற்றை ஆகும். $v[y(x, C_1)]$ என்ற சார்பரம் இக்கற்றையைச் சேர்ந்த வளைவரைகள்மீது. C_1, x_1 இவற்றின் சார்பாக ஆகின்றது, இப்போது எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டிருக்கும் எல்லயவரையின் அண்மையில் $y = y(x, C_1)$ என்ற கற்றையின் வளைவரைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாவிடில், x_1-ம் y_1-ம் கொடுக்கப்பட்டால் கற்றையைச் சேர்ந்த குறிப்பிட்ட எல்லயவரை பெற்று (படம் 7·1) அதனின்று சார்பரத்தின் மதிப்பை திட்டமாக அறிந்துகொள்ளலாம் ஆதலின், $v[y(x,C_1)]$ஐ x_1, y_1–ல் ஒரு மதிப்புடைச் சார்பாகக் கருதலாம்.

வரம்புபுள்ளி, (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் இருந்து $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ என்ற புள்ளிக்கு இடப்பெயர்ச்சி அடையும்போது, $y = y(x_1, C_1)$ என்ற கற்றையின் எல்லயவரைகள் மீது, $v[y(x, C_1)]$ என்ற சார்பரத்தின் மாறலைக் கணிப்போம். இக் கற்றையின் வளைவரைகள் மீது v எனும் சார்பரம். x_1 y_1 இவற்றின் சார்பாக ஆவதால் சார்பரத்தின மாறல் இச்சார்பின் வகையீடாக ஆகின்றது. δv எனும் ஏற்றத்தில் இருந்து, δx_1, δy_1-ல் நேரியதான தலையாய பகுதியை நீக்கிவிட :

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx,$$

$$= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx +$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\, dx. \quad (7\cdot 1)$$

இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி வலப்புறமுள்ளதில் முதல் உறுப்பை மாற்ற :

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\, dx = F\Big|_{x=x_1+\theta\delta x_1} \delta x_1 ; \quad (0<\theta<1)$$

F ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ஆதலால்,

$$F\Big|_{x = x_1 + \theta\,\delta x_1} = F(x, y, y')\Big|_{x = x_1} + \epsilon_1 ;$$

இங்கு $\delta x_1 \to 0$, $\delta y_1 \to 0$ எனும்போது $\epsilon_1 \to 0$.

இவ்வாறு,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y_i)\, dx = F(x, y, y')\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + E_1 \delta x_1 .$$

(7.1)-ல் வலக்கைப்புறமுள்ளதில் இரண்டாவது உறுப்பை, தொகைச் சார்பின் டெய்லர் விரிவைப் பயன்படுத்தி மாற்ற :

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\,\delta y + F_{y'}(x, y, y')\,\delta y']\, dx + R_1 ;$$

இங்கு R_1 என்பது δy அல்லது $\delta y'$-ஐ விட பன்மடங்கு நுண்ணியதாகும். இதனின்று நேரிய பகுதியான

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\, dx\text{-ன்}$$

தொகைச் சார்பின் இரண்டாம் உறுப்பை பகுதிப்படுத்தி தொகை கண்டு,

$$[F_{y'}\,\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y\, dx.$$

என மாற்றி அமைக்கலாம். சார்பரத்தின் மதிப்பு எல்லய வரைகள் மீது மட்டுமே கொள்ளப்படுகின்றது, எனவே,

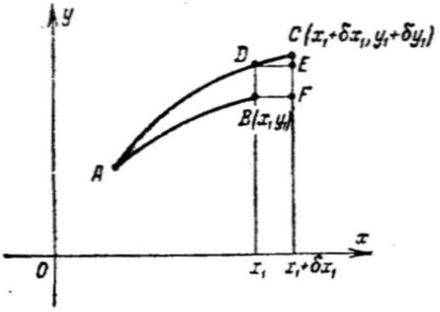
$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

(x_0, y_0) என்ற வரப்புப் புள்ளி நிலையானதாதலால், $\delta y \Big|_{x = x_0} = 0.$

எனவே,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \, \delta y + F_{y'} \, \delta y') \, dx = [F_{y'} \, \delta y]_{x = x_1},$$

δy_1 என்பது, வரப்புப் புள்ளி $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ என்ற புள்ளிக்கு இடம் பெயர்வதால் y_1-ல் உள்ள ஏற்றம்; $\delta y \Big|_{x = x_1}$ என்பது, x_1 என்ற புள்ளியில், (x_0, y_0), (x_1, y_1) வழியே செல்லும் எல்லயவரைக்கும், $x_0, y_0)$, $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ வழியே செல்லும் எல்லயவரைக்கும் இடையே உள்ள நிலைத்தூரத்தின் ஏற்றம் (படம் 7.2); எனவே $\delta y \Big|_{x = x_1}$ என்பதும். y_1-ன் ஏற்றமான δy_1-ம் சமமானவை அல்ல.



படம் 7–2.

படத்தில் இருந்து, $BD = \delta y \Big|_{x = x_1}$; $FC = \delta y_1$ என்பது தெளிவு.

$$EC \approx y'(x_1) \, \delta x_1 \; ; \quad BD = FC - EC$$

அல்லது,

$$\delta y \Big|_{x = x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1) \, \delta x_1.$$

இங்கு உயர்ந்த வரிசை நுண் எண்கள் அளவில், இச்சுமாரான சமத்துவம் பொருத்தமாக உள்ளது.

இவ்வாறு முடிவாக,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F dx \approx F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 ;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\, dx \approx$$

$$F_{y'} \Big|_{x=x_1} [\delta y_1, - y'(x_1)\,\delta x_1];$$

இங்கும் தோராயமான சமத்துவம் δx_1, δy_1, இவற்றின் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரிசை அளவில் உண்மையானது. எனவே, (7.1)-ல் இருந்து,

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} [\delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1]$$

$$= (F - y' F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + Fy \Big|_{x=x_1} \delta y_1 ;$$

அல்லது,

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y' F_{y'}) \Big|_{x=x_1} dx_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} dy_1$$

இங்கு $\bar{v}$ $x_1, y_1)$ என்ற சார்பு, v எனும் சார்பரம் $y = y\ (x, C_1)$ என்ற எல்லயவரை மீது அடைந்த மாற்றத்தின் விளைவாகும்; $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy, = \Delta y_1 = \delta y_1$ என்பன வரப்புப் புள்ளி களின் ஆயக் கூறுகளின் ஏற்றங்கள் ஆகும். எல்லயத்திற்கான அடிப்படைத் தேவையான நிபந்தனை $\delta v = 0$,

$$(F - y' F_{y'}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 = 0 \quad (7 \cdot 2)$$

என்ற அமைப்பைக் கொண்டதாகின்றது. மாறல்கள் δx_1, δy_1 இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று சார்ந்தன அல்ல எனில்,

$$(F - y' F_{y'}) \Big|_{x=x_1} = 0; \; F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0.$$

எனினும், அடிக்கடி δx_1-ம், δy-ம், ஒன்றை ஒன்று சார்ந்த நிலையையே நாம் கருத வேண்டியிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, வலது வரம்புப்புள்ளி (x_1, y_1), $y_1 = \phi(x_1)$ என்ற வளைவரைமீது நகருவதாகக் கொள்வோம்.

அப்போது,

$\delta y_1 = \phi'(x)\, \delta x_1$; எனவே நிபந்தனை ...(7-2)

$$[F + (\phi' - y')\, F_{y'}]\, \delta x_1 = 0$$

என்ற அமைப்பை அடைகின்றது; δx_1 தன்னிச்சையாக மாறுவதால்,

$[F + (\phi' - y')\, F_{y}']_{x = x_1} = 0$. இந்நிபந்தனை, வரம்புப் புள்ளியில் ϕ', y' இவற்றின் சரிவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை நிலைநிறுத்துகின்றது. இதை ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனை (Transversality condition) என்கிறோம்

பொதுவாக, ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனையும், $y_1 = \phi(x_1)$ என்ற நிபந்தனையும் கூட்டாக, எல்லயம் அடையப்படக்கூடிய, $y = y(x_1, C_1)$ கற்றையைச் சேர்ந்த, ஒன்றல்லது பல எல்லய வரைகளைக் காண உதவுகின்றன. வரம்பு புள்ளி (x_0, y_0), $y_0 = \psi(x_0)$ என்ற வளைவரை மீது நகரக்கூடும் எனில், முன்னர் மாதிரியே,

$$[F + (\psi' - y')\, F_{y}']_{x = x_0} = 0$$

என்ற ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனையைப் பெறுகிறோம். இது (x_0, y_0) என்ற புள்ளியிலும் பொருத்தமானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

என்ற சார்பரத்தின் ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனையை காண்க.

இங்கு ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனை $F + F_y'(\phi' - y') = 0$ என்பது.

$$A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x_0 y)\, y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(\phi' - y') = 0$$

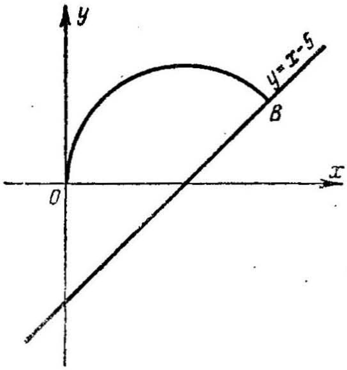
$$\frac{A(x, y)(1 + \phi' y')}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

வரம்பு புள்ளியில் $A(x, y) \neq 0$ எனக்கொள்ள $1 + y'\phi' = 0$ அல்லது $y' = -\dfrac{1}{\phi'}$ எனப் பெறுகிறோம். அதாவது இங்கு ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனை. செங்குத்து நிபந்தனை ஆகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

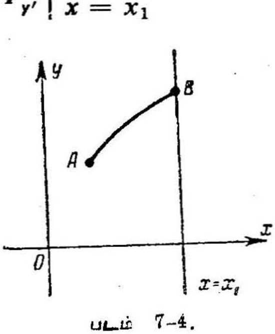
$y(0) = 0,\ y_1 = x_1 - 5$ என்ற நிபந்தனையுடன் கூடிய சார்பரம் $\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx$-ன் எல்லயம் காண்க.

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தொகை வளைவரைகள் $(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$ என்ற வட்டங்களாகும். முதல் வரம்பு நிபந்தனை $C_1 = C_2$ என்ற முடிவை அளிக்கும். கொடுக்கப்பட்ட சார்பரத்திற்கு. ஊடுவெட்டாண்மை நிபந்தனை, செங்குத்து நிபந்தனையாக ஆகிவிடுவதால் (முந்திய338-1எடுத்துக்காட்டைக் காண்க). $y_1 = x_1 - 5$ என்ற நேர் கோடு வட்டத்தின் விட்டமாகிறது. எனவே, தேவையான வட்டத்தின் மையம் (0· 5) என்ற புள்ளியில் அமைகிறது; அதாவது, $y_1 = x_1 - 5$ என்ற நேர்கோடு எங்கு கிடை ஆயத்தை சந்திக்கின்றதோ அங்கு அமைகின்றது. எனவே, $(x-5)^2 + y^2 = 25$ அல்லது $y = \pm\sqrt{10x - x^2}$ எனவே, $y = \sqrt{10x - x^2}$, $y = -\sqrt{10x - x^2}$ என்ற வட்டத்தின் வில்லின் மீதே எல்லயம் அடையப்படும்.



படம் 7–3.

வரம்பு புள்ளி (x_1, y_1) ஒரு நிலைக்குத்தான கோட்டின்மீது நகரும் எனில் (படம் 7-4), $\delta x_1 = 0$; நிபந்தனை (7·2) $F_{y'}\Big|_{x = x_1} = 0$ என ஆகின்றது.



படம் 7–4.

எடுத்துக்காட்டாக விரைவு வளைவரைத் தீர்வமைவில், இட வரம்பு புள்ளி நிலையானதென்றும், வல வரம்பு புள்ளி ஒரு நிலைக்குத்தான கோட்டின் மீது நகரும் எனவும் கொள்வோம். $v = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$ என்ற

சார்பரத்தின் எல்லய வரைகள் உருள்வளைகள் ஆகும் ; $y(0) = 0$ என்ற நிபந்தனையைக் கொண்டால்,

இவற்றின் சமன்பாடு,

$$x = C_1\,(t - \sin t),$$
$$y = C_1\,(1 - \cos t).$$

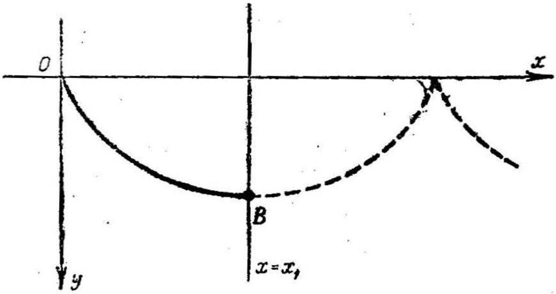
என்றாகும். C_1-ஐக் காண, $F_{y'}\Big|_{x = x_1} = 0$ என்ற நிபந்தனையைப் பயன்படுத்த இங்கு,

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y}\,\sqrt{1 + y'^2}}\right|_{x = x_1} = 0$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே $y'(x_1) = 0$; அதாவது தேவையான உருள் வளை, $x = x_1$ என்ற கோடும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ள வேண்டும். எனவே $x = x_1, y = y_1$ என்ற புள்ளி உருள் வளையின் ஒரு கூர் ஆகும். (படம் 7·5) உருள்வளையின் கூரில் $t = \pi$ ஆதலால்,

$$x_1 = C_1\,\pi,\ \ C_1 = \frac{x_1}{\pi}.$$

எனவே,



படம் 7,5

$$x = \frac{x_1}{\pi}\,(t - \sin t)\,,\ \ y = \frac{x_1}{\pi}\,(1 - \cos t)$$

என்ற உருள்வளை மீதே எல்லயம் அடையப்பெறும்.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$ என்ற சார்பரத்தின்

எல்லயத் தீர்வமைவில், வரம்பு புள்ளி (x_1, y_1), $y = y_1$ என்ற

கிடைக்கோட்டின் மீது நகரமுடியும் எனில், $\delta y_1 = 0$, நிபந்தனை (7.2) அல்லது ஊடுவெட்டாண்மை நிபந்தனை

$$\left[F - y' F_{y'}\right]_{x = x_1} = 0$$

என்ற அமைப்பைப் பெறுகின்றது.

2. $\int_{x^0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ என்ற சார்பரத்தின் நகரும்-வரம்பு தீர்வமைவு

$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ என்ற சார்பரத்தின் எல்லயம் காணப்புகும்போது, வரம்பு புள்ளி $A\ (x_0, y_0, z_0)$ நிலையானது என்றும், மற்ற வரம்பு புள்ளி $\beta\ (x_1, y_1, z_1)$ இடம் பெயரக் கூடியது (அல்லது இரண்டுமே இடம்பெயரக் கூடியவை எனில்) என்றும் கொண்டால், ஆய்லர் சமன்பாட்டு தொகுப்பு

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0;\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0\text{-ன்}$$

தொகை வளைவரைகள் மீதே எல்லயம் அடையப்படும். நகரும் வரம்பு தீர்வமைவில், எல்லயம் C எனும் வளைவரைமீது எய்தப் படுகின்றது என்போம். அதாவது எல்லயப்படுத்தும் வளைவரை C-ன் அண்மையில், C-உடைய வரம்பு புள்ளிகளையே வரம்பு புள்ளிகளாக உடைய வளைவரைகள், மற்றும் அவ்வரம்பு புள்ளிகளை வரம்பு புள்ளிகளாகக் கொள்ளாமல் எனினும் C-க்கு அண்மையில் உள்ள வளைவரைகள் ஆன இவற்றின் மீதான v-ன் மதிப்புகளுக்கு ஒப்பிடும் போது, C-ன் மீதான மதிப்பைக் கொண்டால் v-ன் பெருமம் அல்லது சிறுமம் கிடைக்கும். இவ்விரு இனங்களால் பின்னர் கூறியது பரவலான இனம். எனவே, முன்னர் காணப்படும் சிறிய இனமான, C-ன் வரம்புப் புள்ளி களையே வரப்பு புள்ளிகளாக உடைய ஒன்றுக்கொன்று அருகாமையில் உள்ள வளைவரைகளைப் பொருத்து நிச்சயமாக எல்லையம் காணமுடியும்.

எனவே, நிலையான வரம்பு புள்ளிகளையுடைய தீர்வமைவில் எல்லயத்திற்குத் தேவையான நிபந்தனை C எனும் வளைவரை

மீது நிறைவேற வேண்டும். குறிப்பாகக் கூற, ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தொகுப்பின் ஒரு தொகை வளைவரையாகவே C இருக்க வேண்டும்.

ஆய்லர் சமன்பாட்டின் பொதுச் சமன்பாடு, நான்கு யாதோ மாறிலிகளைக் கொண்டது. நாம் நிலையானது என எடுத்துக் கொள்ளும் வரம்பு புள்ளி $A(x_0, y_0, z_0)$-ன் ஆயக் கூறுகளை நாம் அறிந்திருப்பதால், பொதுவாக, இரு மாறிலிகளை நீக்கிவிடக் கூடும்.

ஏனைய இரு மாறிலிகளைக் காண மற்றும் இரண்டு நிபந்தனைகள் தேவை. இவற்றை $\delta v = 0$ என்ற நிபந்தனையிலிருந்து பெறுகிறோம். ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளின்மீது மட்டுமே எல்லயம் எய்தப் பெறும். ஆதலால் மாறலைக் கணக்கிடுங்கால், சார்பரம் இத் தீர்வுகளின் மீது மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாக மேற்கொள்வோம். இவற்றின் சார்பரம் v, $B(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியின் ஆயக் கூறுகளான x_1, y_1, z_1, இவற்றின் ஒரு சார்பு $\phi(x_1, y_1, z_1)$ ஆகின்றது; சார்பரத்தின் மாறல், இச் சார்பின் வகையீடு ஆகும்.*

v-ன் மாறலை முன்னர் (பக்கம் 411 – 12) பக்கம் ... ங்களில் ... -ல் கண்ட மாதிரியே கணக்கிடலாம்.

$$\triangle v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(\bar{x}, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z+\delta z') - F(x, y, z, y', z')]\,dx.$$

*A வழியே செல்லும் கற்றையைச் சேர்ந்த எல்லய வரைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாமல் இருந்தால், $B(x_1, y_1, z_1)$ எனும் புள்ளி திட்டமாக ஒரு எல்லய வரையைக் குறிப்பதால், சார்பு ϕ ஒரு மதிப்புடையதாகும்.

முதல் தொகையில் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, F ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு என்பதையும் பயன்படுத்தலாம்; இரண்டாவது தொகையில், தலையாய நேரிய பகுதியை டெய்லரின் சூத்திரம் கொண்டு தனியே கொள்க. இம்மாறுதல்களால்,

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y\, \delta y + F_z\, \delta z + F_{y'}\, \delta y' + F_{z'}\, \delta z']dx,$$

தொகைக் குறியில் உள்ள கடைசி இரண்டு உறுப்புகளையும் பகுதிப் படுத்தித் தொகைக் காண,

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \Big[F_{y'}\, \delta y\Big]_{x=x_1} + \Big[F_{z'}\, \delta z\Big]_{x=x_1}$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y + \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) dz' \right] dx.$$

v-ன் இம் மதிப்புகளை எல்லய வரைகள் மீதே கணக்கிடுவதால்

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0,\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \equiv 0$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே,

$$\delta v = F \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \Big[F_{y'}\, \delta y\Big]_{x=x_1} + \Big[F_{z'}\, \delta z\Big]_{x=x_1}$$

முன்னர் பக்கம் 412-ல் கண்டவாறே விளக்கம் கொள்ள,

$$\delta y \Big|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1,$$

$$\delta z \Big|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1)\,\delta x_1.$$

இதன் விளைவாக,

$$\delta v = \Big[F - y'\, F_{y'} - z'\ F_{z'}\Big]_{x=x_1} \delta x_1$$
$$+ F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z' = 0$$

$\delta x_1,\ \delta y_1, \delta z_1$ மாறல்கள் ஒன்றையொன்று சாராதவை எனில், $\delta v = 0$ என்ற நிபந்தனையில் இருந்து,

$$\left[F - y' F_{y'} - z' F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0$$

எனப் பெறுகிறோம்.

வரம்பு புள்ளி $B(x_1, y_1, z_1)$ ஏதோ ஒரு வளைவரை $y_1 = \phi(x_1)$, $z = \psi(x_1)$ மீது இடம்பெயர முடியும் எனில்,

$$\delta y_1 = \phi'(x_1)\,\delta x_1, \quad \delta z_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1.$$

நிபந்தனை $\delta v = 0$ அல்லது,

$$\left[F - y' F_{y'} - z' F_{z'}\right]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0.$$

இதையே

$$\left[F + (\phi' - y') F_{y'} + (\psi' - z') F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0.$$

என எழுதி, அதிலிருந்து, δx_1-ஐ எவ்விதமேனும் கொள்ளலாம். என்பதைப் பயன்படுத்தி,

$$\left[F + (\phi' - y') F_{y'} + (\psi' - z') F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0$$

எனப் பெறலாம். இந்த நிபந்தனையை,

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx,$$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லயம் காணும் தீர்வமைவில், ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனை என்கிறோம். $y_1 = \phi(x_1)$, $z_1 = \psi(x_1)$ என்ற சமன்பாடுகளுடன்கூட, இவ் ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனை, ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் பொதுத் தீர்வில் காணப்பெறும் மாறிலிகளைக் கணக்கிடத் தேவையான சமன்பாடுகளைக் கொடுக்கின்றது.

வரம்பு புள்ளி $B(x_1, y_1, z_1)$ ஏதோ சில மேற்பரப்புகள் $z_1 = \phi(x_1, y_1)$ மீது நகரும் எனில், $\delta z_1 = \phi_{x_1}\,\delta x_1 + \phi_{y_1}\,\delta y_1$; $\delta x_1, \delta y$ என்ற மாறல்கள் யாதோ ஒன்று. எனவே, $\delta v = 0$ என்ற நிபந்தனை, அதாவது,

$$\left[F - y' F_{y'} - z' F_{z'}\right]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

என்பது,

$$\left[F - y' F_{y'} - z' F_{z'} + \phi' x F_{z'}\right]_{x=x_1} \delta x_1 + \left[F_{y'} + F_{z'} \phi_{y'}\right]_{x=x_1} \delta y_1 = 0.$$

என ஆகும். δx_1-ம் δy_1-ம் ஒன்றையொன்று சாராதவை ஆதலால், இதனின்று,

$$\left[F - y' F_{y'} + \left(\phi_x' - z'\right) F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0.$$

$$\left[F_{y'} + F_{z'} \phi'_y\right]_{x=x_1} = 0.$$

எனப்பெறுகிறோம், இவ்விரண்டு நிபந்தனைகளும், $z_1 = \phi\ (x_1, y_1)$ என்ற சமன்பாட்டோடு கூட, பொதுவாக ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் பொதுத் தீர்வுகளின் இரு மாறிலிகளைக் காண உதவுகின்றன.

வரம்பு புள்ளி $A\ (x_0, y_0, z_0)$ நகருமெனில், இப்புள்ளியில் முன் கூறியவாறே செய்ய, இதே போன்ற நிபந்தனைகள் கிடைக்கின்றன.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2' \dots, y_n')\, dx$$

என்ற சார்பரத்தை எடுத்துக் கொண்டால், நிருபண முறையை சற்றும் மாற்றாமல், $\beta\ (x_1, y_{11}, y_{21}, \dots y_{n1})$ நகரும் புள்ளியெனில், இப்புள்ளியில்,

$$\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y'_i}\right)\Bigg|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\Bigg|_{x=x_1} \delta y_{i1} = 0.$$

எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx, \quad z_1 = \phi(x_1, y_1)$$

எனும்போது, என்ற சார்பரத்தின் ஊடுவெட்டாண்மை நிபந்தனைகளைக் காண்க.

ஊடுவெட்டாண்மை நிபந்தனைகளான,

$$\left[F - y' F_{y'} + (\phi'_x - z') F_{z'} \right]_{x=x_1} = 0.$$

$$\left[F_{y'} + F_{z'} \phi'_y \right]_{x=x_1} = 0.$$

என்பன இங்கு $x = x_1$-க்கு,

$$1 + \phi'_x z' = 0, \; y' + \phi'_y z' = 0,$$

ஆகும். அல்லது $x = x_1$-க்கு,

$$\frac{1}{\phi'_x} = \frac{y'}{\phi'_y} = \frac{z'}{-1}.$$

தேவையான எல்லைய வரைக்கு (x_1, y_1, z_1)-ல் ஆன $t\,(1, y', z')$ என்ற தொடுகோட்டு வெக்டரும், $z = \phi(x, y)$ என்ற மேற்பரப்புக்கு அதே புள்ளியில் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு $N\,(\phi'_x, \phi'_y, -1)$ வெக்டரும் இணையாக இருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனை ஆகும். எனவே, இங்கு ஊடுவெட்டாண்மை நிபந்தனை, மேற்பரப்பு $z = \phi(x, y)$-ம் எல்லைய வரையும் செங்குத்தாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$z = \phi(x, y)$, $z = \psi(x, y)$ என்ற இரு மேற்பரப்புகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தின் எல்லைய வரை காண்க. அதாவது, ஒரு வரம்பு புள்ளி (x_0, y_0, z_0)-ன் ஆயக் கூறுகள் $z_0 = \phi(x_0, y_0)$-யும், மற்றொரு வரம்பு புள்ளி (x_1, y_1, z_1)-ன் ஆயக் கூறுகள் $z_1 = \psi(x_1, y_1)$-ம் சரி செய்கின்றன எனக் கொண்டு,

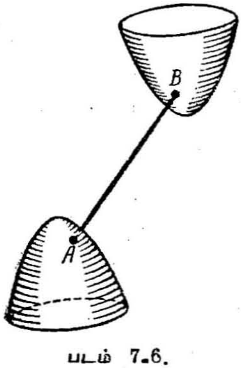
$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$ என்ற தொகையின் எல்லையம் காண்க

தொகைச்சார்பு y', z'-ஐ மட்டும் சார்ந்திருப்பதால், எல்லய வரைகள் நேர்கோடுகளாகும். (பக்கம் 383; உதாரணம் 2).

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx \text{ என்பது,}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

என்ற சார்பரத்தின் ஒரு தனியுந வகை ஆதலால், முன்காட்டிய எடுத்துக்காட்டுப்படி (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியிலும், (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியிலும். ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனை, செங்குத்து நிபந்தனை ஆகின்றது. எனவே, $z = \phi(x, y)$ என்ற மேற்பரப்புக்கு (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியிலும், $z = \psi(x, y)$ என்ற மேற்பரப்புக்கு (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியிலும் செங்குத்தாக அமைந்த நேர்கோடுகள் மேலேதான் எல்லயம் எய்தப்பெறும் படம் (7.6).



படம் 7.6.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$y(0) = 0$, $z(0) = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு, (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி $x = x_1$ தளத்தின் மேல் நகரக்கூடியது எனவும் கொண்ட சார்பரம் $v = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$-ன் எல்லயத்திற்கான சோதனை செய்க.

ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அமைப்பு,

$z'' - y = 0$, $y'' - z = 0 z$; எனவே $y^{IV} - y = 0$;

$$y = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$z = y''$$

$$z = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x - C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$y(0) = 0$, $z(0) = 0$ என்ற நிபந்தனைகளில் இருந்து

$C_1 + C_3 = 0$, $C_1 - C_3 = 0$, எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, $C_1 = C_3 = 0$. நகரும் வரம்பு புள்ளியில் ஆன நிபந்தனை

$$\left(F - y' F_{y'} - z' F_{z'}\right)_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0.$$

என்பது $\delta x_1 = 0$, δy_1, δz_1 யாதோ ஆதலால்,

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_{z'}\Big|_{x=x_1} = 0.$$

என ஆகின்றது. கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில்.

$$F_{y'} = 2y', \ F_{z'} = 2z'.$$

எனவே,

$$y'(x_1) = 0, \quad z'(x_1) = 0.$$

அல்லது,

$$C_2 \cosh x + C_4 \cos x_1 = 0.$$

$$C_2 \cosh x - C_4 \cos x_1 = 0.$$

$\cos x_1 \neq 0$ எனில், $C_2 = C_4 = 0$; எனவே எல்லயம் $y = 0$, $z = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் மேலேயே எய்தப்படும்.

$\cos x_1 = 0$ எனில். அதாவது $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ஒரு முழு எண்,) $C_2 = 0$; C_4 யாதோ ஒரு மாறிலி; எனவே $y = C_4 \sin x$ $z = -C_4 \sin x$. இந்த C_4-ன் எந்த மதிப்புக்கும் சார்பரம் $v=0$ என எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

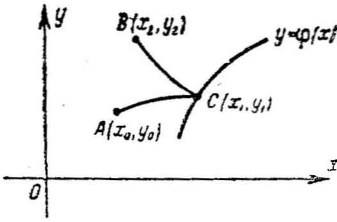
3. மூலைகளுள்ள எல்லய வரை

இதுவரை. தேவையான சார்பு $y = y(x)$ தொடர்ச்சியானது என்றும் அதன் வகைக்கெழுவும் தொடர்ச்சியானது என்றும், கொண்டு மாறுபடு தீர்வமைவுகளைக் கொண்டோம். பல தீர்வமைவுகளில் இரண்டாவது கூறிய பண்பு இயற்கையாக வரக்கூடியது அல்ல; மாறாக சில வகையான மாறுபடு தீர்வமைவுகளில் தீர்வு மூலைகள் உள்ள எல்லய வரைகள்மீதுதான் எய்தப்பெறும் எடுத்துக்காட்டாக, எல்லயவரையின் பிரதிபலிப்பும், கோட்டமும் உடைத்தான தீர்வமைவுகள் இவ்வகையைச் சார்ந்தவை; இவை ஒளிப் பிரதிபலிப்பையும், கோட்டத்தையும் உடைத்தான தீர்வமைவுகளைப் பொதுப்படுத்திய தீர்வமைவுகள் ஆகும்,

எல்லய வரைப் பிரதிபலிப்புத் தீர்வமைவு: கொடுக்கப்பட்ட $A(x_0, y_0)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே சென்று,

$$v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

என்ற சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்தும் வளைவரையைக் காண்க. $y = \phi(x)$ என்ற கோட்டில் பிரதிபலிக்கப்பட்ட பிறகே வளை வரை B-ஐ அடைய வேண்டும். (படம் 7.7)



படம் 7–7.

பிரதிபலிப்பு ஏற்படும் $C(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில், தேவையான எல்லயவரைக்கு ஒரு மூலைப்புள்ளி இருக்கலாம் எனக் கொள்வது இயற்கை. எனவே இப்புள்ளியில் இட வகைக்கெழு $y'(x_1 - 0)$-ம் வலவகைக்கெழு $y'(x_1 + 0)$-ம், பொதுவாக வெவ்வேறானவை, எனவே, சார்பரம் $v[y(x)]$-ஐ

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y)\, dx$$

எனக் கொள்வது நலம். இங்கு $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_1 \leqslant x < x_2$ என்ற இரு இடைவெளிகளிலும். $y'(x)$ எனும் வகைக்கெழு தொடர்ச்சியானது எனக் கொள்வதால், முன்கூறிய முடிவுகளைப் பயன்படுத்தலாம். எல்லயத்திற்குத் தேவையான அடிப்படை நிபந்தனை $\delta v = 0$,

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx = 0$$

என ஆகின்றது.

(x_1, y_1) என்ற புள்ளி, $y = \phi(x)$ என்ற வளை வரை மீது நகரக் கூடியது ஆதலால்,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx, \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

என்ற மாறல்களைக் கணக்கிடும்போது, வரம்பு புள்ளி கொடுக்கப் பட்ட வளைவரைமீது நகரக்கூடியது என்ற தீர்வமைவு நோக்கி திற்பதால், (பக்கம் 410) பகுதி 1-ல் கூறப்பட்ட முடிவுகளை இங்கு பயன்படுத்தலாம். வளைவரைகள் AC-ம், CB-ம் எல்லைய வரைகள் என்பது தெளிவு. இவ்வளைவரைகளில் ஒன்று ஏற்கெனவே கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொண்டு, மற்றதை மட்டும் மாற்ற, தீர்வமைவு,

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,dx \text{ (அல்லது) } \int_{x_1}^{x_2} F\,dx)$$

என்ற சார்பரத்திற்கு நிலையான வரம்பு புள்ளிகள் உள்ள தீர்வமைவுக்கு எல்லயம் காண வேண்டியதாக அமைந்துவிடுவ தால், இப்பகுதிகள் மீது $y = y\,(x)$ ஆய்லர் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும். இக்காரணத்திற்காக, சார்பரத்தின் மாறலைக் கணக்கிடும்போது, C எனும் மூலை உள்ள எல்லய வரைமீதே சார்பரத்தைக் கொள்வதாகக் எடுத்துக் கொள்வோம். அப்போது,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \Big[F + (\phi' - y')\,F_{y'} \Big]_{x = x_1 - o} \delta x_1$$

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx = -\Big[F + (\phi' - y')\,F_{y'} \Big]_{x = x_1 + o} \delta x_1$$

இங்கு $x = x_1 - o$, $x = x_1 + \bar{y}$ என்பன, அமைப்புகளுக்குள் ளிருக்கும் அளவுகளின் எல்லை மதிப்புகளை முறையே, x_1-ஐ இடப் புறமிருந்து அனுகும் போதும் (அதாவது x_1-ஐ விட x குறைந்த மதிப்புடைய பக்கத்திலிருந்தும்), x_1-ஐ வலமிருந்து அனுகும் போதும் (அதாவது x_1-ஐ விட x மதிப்புடைய பக்கத்தில் இருந்தும்) எடுத்துக்கொள்கிறோம் எனக் குறிக்கின்றன. வகைக் கெழு y' மட்டும், பிரதிபலிக்கும் புள்ளியில், தொடர்ச்சி அற்றது ஆதலால், மூலைப்புள்ளியில், முதலாவதற்கு இடப்புற வகைக் கெழுவையும், இரண்டாவதற்கு வலப்புற வகைக்கெழுவையும் எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

$\delta v = o$ என்ற நிபந்தனை,

$$[F + (\phi' - y')\,F_{y'}]_{x = x_1 - o} - [F + (\phi' - y')\,F_{y'}]_{x = x_1 + o}\,\delta x_1 = o$$

என்ற அமைப்புடையது ஆகும். δx_1 தன்னிச்சையாக மாறுபடுவதால்,

$$[F + (\phi' - y')\, F_{y'}]_{x = x_1 - o} = [F + (\phi' - y')\, F_{y'}]_{x = x_1 + o}$$ ஆகும்.

$$F[x_1, y_1, y'(x_1 - o)] + [\phi'(x_1) - y'(x_1 - 0)]\, F_{y'}\, [x_1, y_1, y'(x_1 - 0)]$$
$$= F[x_1, y_1, y'(x_1 + 0)] + [\phi'(x_1) - y'(x_1 + 0)]\, F_{y'}\, [x_1, y_1, y'(x_1 + 0)].$$

பிரதிபலிப்புக்கு நிபந்தனையான இது

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

என்ற அமைப்புடைய சார்பரங்களுக்கு, மிக எளிய அமைப்பைக் கொண்டதாகின்றது :

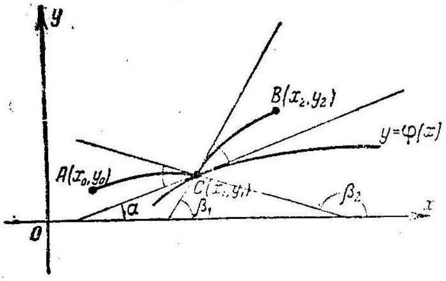
$$A(x_1\, y_1) \left[\sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\phi' - y')\, y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x = x_1 - o}$$

$$= A(x_1, y_1) \left[\sqrt{1 + y'^2} + \frac{(\phi' - y')\, y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x = x_1 + o}$$

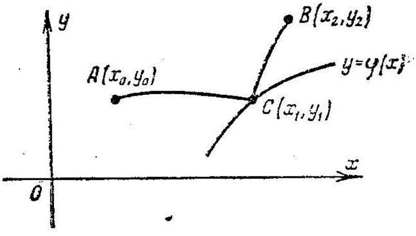
இதைச் சுருக்கி, $A(x_1, y_1) \neq 0$ எனக்கொண்டு, $A(x_1, y_1)$-ஐ நீக்கிவிட

$$\left. \frac{1 + \phi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right|_{x = x_1 - 0} = \left. \frac{1 + \phi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right|_{x = x_1 + o}$$

எனக் கிடைக்கும்,



படம் 7·8



படம் 7·9

$y=\phi(x)$ வளைவரையின் தொடுகோட்டுக்கும், கிடை அச்சுக்கும் இடையே உள்ள கோணத்தை α எனவும், எல்லைய வளைவரைக்கு பிரதிபலிப்புப் புள்ளி C-ல் வரையப்பட்ட இட, வல தொடுகோடுகள் கிடை அச்சுடன் உண்டாக்கும் சரிவுகளை முறையே, β_1, β_2 எனவும் குறிக்க (படம் 7·8).

$$y'(x_1-0)=\tan\beta_1,$$
$$y'(x_1+0)=\tan\beta_2,$$
$$\phi'(x_1)=\tan\alpha.$$

எனப் பெறுகிறோம். பிரதிபலிப்பு புள்ளியில் ஆன நிபந்தனை,

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta_1}{-\sec\beta_1}=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta_2}{\sec\beta_2}$$

என்றாகின்றது. இதைச் சுருக்கி, $\cos\alpha$-ல் பெருக்க,

$$-\cos(\alpha-\beta_1)=\cos(\alpha-\beta_2).$$

இதிலிருந்து படுகோணமும், மீள்கோணமும் சமம் என அறிகிறோம்.

ஓர் ஊடகத்தில் $v(x,y)$ எனும் திசைவேகத்துடன் இயங்கும் புள்ளி, $A(x_0,y_0)$-ல் இருந்து $\beta(x_1,y_1)$-க்குச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t எனில், $t=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\,dx$; இது சார்பரம் $\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ என்ற வகையைச் சார்ந்தது; எனவே, திசைவேகம் $v(x_1,y)$-ன் எந்த மாற்றத்துக்கும், பிரதிபலிப்பு ஏற்படும் புள்ளியில், படுகோணமும் மீள்கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

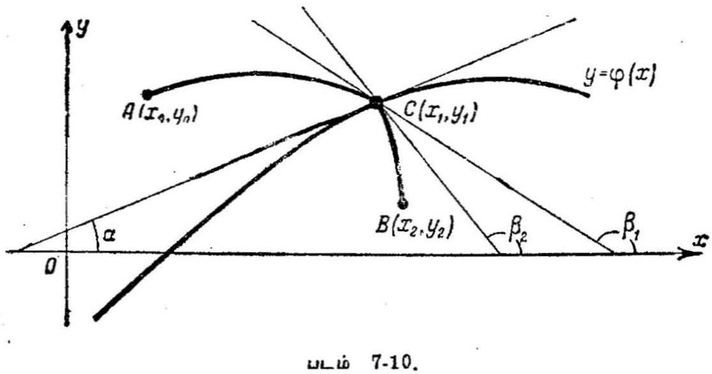
A, B, C என்ற புள்ளிகள் வேறுவிதமாக அமைக்கப்பட்டிருந்தால் எடுத்துக்காட்டாக படம் 7·9-ல் உள்ளதுபோல, $y=y(x)$ என்ற சார்பு, இரட்டை மதிப்புடையதாக இருந்தால், இதுபோன்ற நிபந்தனையை பிரதிபலிப்பு புள்ளியில் காண, துணை அலகு அமைப்பைக் கொண்டு கணக்கைச் செய்வது நலம் பயக்கும்.

தகரும் வரம்புகளுடன் கூடிய ... ... சில தீர்வமைவுகளும்

எல்லயவரையின் விலகல் : எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட பரப்பிடத்தில், $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$ என்ற சார்பரத்தின் சார்புத் தொகை, $y = \phi(x)$ என்ற தொடர்ச்சியற்ற வரை உள்ளது; வரம்பு புள்ளிகள் A–யும், B-யும் தொடர்ச்சியற்ற வரையின் இரு வெவ்வேறு பக்கங்களில் உள்ளன. (படம் 7·10) v எனும் சார்பரத்தை,

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')\, dx.$$

என எழுதலாம்; இங்கு தொடர்ச்சியற்ற வரையின் ஒரு பக்கத்தில் $F_1(x, y, y') = F(x, y, y')$; மற்றொரு பக்கத்தில் $F_2(x, y, y') = F(x, y, y')$.



படம் 7-10.

F_1–ம், F_2-ம் மும்முறை வகைப்படுத்தக் கூடியது எனக் கொள்வோம். தேவையான வளைவரையும், தொடர்ச்சியற்ற வரையும் சந்திக்கும் புள்ளி C மூலப் புள்ளியாக அமையும் என எதிர்பார்க்கலாம். வில் AC–ம், வில் CB–ம் எல்லய வரைகள் என்பது தெளிவு (ஒரு வில்லை நிலையானதாகக் கொண்டு, மற்றது மாறுபடக் கூடியது எனக் கொள்ள, நமக்கு நிலையான வரம்பு புள்ளிகள் உள்ள தீர்வமைவு கிடைப்பதால் இது தெளிவாகின்றது) இதனல், எல்லய வரையின் இரு வில்களையும் கொண்ட ஒரு பல்கோண வரைகளையே ஒப்புமை வளைவரைகளாகக் கொள்ள முடியும். வரம்புப் புள்ளி $C(x_1, y_1)$ வளைவரை $y = \phi(x)$ மீது

நகரக்கூடியதாகையால், மாறல் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும். (பக்கம் 416).

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F_1 (x, y, y')\, dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2 (x, y, y')\, dx$$

$$= \Big[F_1 + (\phi' - y') F_{1y'} \Big]_{x = x_1 - 0} \delta x_1$$

$$- \Big[F_2 + (\phi' - y') F_{2y'} \Big]_{x = x_1 + o} \delta x_1 .$$

எல்லயத்திற்கான நிபந்தனை $\delta v = o$,

$$[F_1 + (\phi' - y') F_1 y']_{x = x_1 - o}$$
$$= [F_2 + (\phi' - y') F_{2y'}]_{x = x_1 + o}$$

என்றாகும். விலகல் ஏற்படும் புள்ளியில் y' தொடர்ச்சியற்றதாக இருக்கக்கூடும். ஆதலால் இவ்விலகல், நிபந்தனையை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$F_1 (x_1, y_1, y' (x_1 - 0)) +$$
$$(\phi' (x_1) - y' (x_1 - 0)) F_{1y'} (x_1, y_1, y' (x_1 - o)) =$$
$$= F_2 (x_1, y_1, y' (x_1 + 0))$$
$$+ (\phi' (x_1) - y' (x_1 + o)) \ F_{2y'} (x_1, y_1, y' (x_1 + o))$$

விலகல் நிபந்தனையும், $y_1 = \phi\ (x_1)$ என்ற சமன்பாடுமாகச் சேர்ந்து, C எனும் புள்ளியைக் காணக்கூடியதாக்குகின்றன.

குறிப்பாக சார்பரம் $v =$

$$\int_{x_0}^{x_2} A (x, y) \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} A_1 (x, y) \sqrt{1 + y'^2}\ dx + \int_{x_1}^{x_2} A_2 (x, y) \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

எனில் விலகல் நிபந்தனை

$$A_1\ (x,\ y)\ \frac{1 + \phi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Bigg|_{x = x_1 - o}$$

$$= A_2 (x, y) \frac{1 + \phi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Bigg|_{x = x_1 + 0}$$

என்ற அமைப்பைப் பெறுகின்றது. முன்பு 429–30–ல் கூறிய குறிமான முறையைக் கொள்ள,

$$y'(x_1 - o) = \tan\beta_1,\ y'(x_1 + o) = \tan\beta_2,\ \phi'(x_1) = \tan\alpha.$$

சுருக்கிப் பிறகு cos α-ஆல் பெருக்க.

$$\frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos(\alpha - \beta_2)} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)},\ \text{அல்லது}$$

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_2)\right]} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)}.$$

இது நமக்குப் பழக்கமான ஒளிப் பிரதிபலிப்பு விதியின் பொதுமைப் படுத்திய விதியாகும். விலகல் ஏற்படும் வரம்புக்கு இரு புறமும் உள்ள ஊடகங்களில்

$$V_1(x, y) = \frac{1}{A_1(x, y)},\ V_2(x, y) = \frac{1}{A_2(x, y)}$$

எனக் கொள்ள, படுகோணத்தின் சைனுக்கும், விலகு கோணத்தின் சைனுக்கும் உள்ள விகிதம், திசை விகிதங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

மூலைகள் உள்ள எல்லய வரைகள், பிரதிபலிப்பும், விலகலும் உள்ள தீர்வமைவுகளில் மட்டுமே வரலாம் எனக்கொள்ளக்கூடாது. F என்ற சார்பு மும்முறை வகைப்படுத்தக்கூடியது; ஏற்கத்தக்க வளைவரைகள், வரம்பு புள்ளிகள் A, B வழியே செல்ல வேண்டும். இவை தவிர வேறு நிபந்தனைகளே இல்லாத பொழுது கூட,

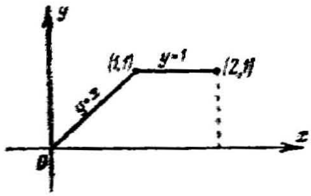
சார்பரம் $V = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$–ன் எல்லயத் தீர்வமைவில்,

எல்லயம், மூலைகள் உள்ள எல்லய வரை மீது எய்தப்படலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$V = \int_0^2 y'^2 (1 - y'^2)\, dx,\ y(o) = o,\ y(2) = 1$$

என்ற சார்பரத்தைக் கொள்வோம். தொகைச் சார்பு மிகை ஆதலால் $v \geqslant o$. எனவே, ஏதாவது வளைவரை மீது, சார்பரம் $v = o$ எனில், இவ்வளைவரை மீது சார்பரத்தின் தனிச் சிறுமம்

அடையப்படுகின்றது. அதாவது ஏற்கத்தக்க வளைவரைகள் மீது சார்பரம் மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது. பல்கோணக் கோடு $y = x, (0 < x < 1), y = 1, (1 < x < 2)$ எனில், இதன் மேல் தொகைச் சார்பு சர்வ சமமாக பூச்சியம் ஆவதால், சார்பரம் $v=0$. இதனால், சார்பரத்தின் தனிச் சிறுமம் இப் பல்கோணக் கோட்டின் மேல் அடையப்படுகின்றது. (படம் 7. 11)



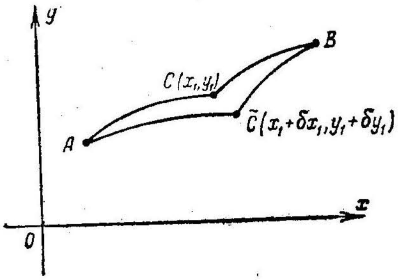
படம் 7-11.

படம் 7·11-ல் காணப்படும் பல்கோணக் கோடுகள் மீதும், சார்பரத்தின் தனிச் சிறுமம் $v = 0$ அடையப்படுகின்றது. மாறாக, ஒழுங்கான வளைவரைகள்மீது, சார்பரத்தின் மதிப்புகள் பூச்சியத்திற்கு மிக அருகாமையில் இருந்த போதிலும், பூச்சியத்தைவிட கண்டிப்பாக அதிக மதிப்புடையன. $y = x + C_1$ அல்லது $y=C_2$ எனும்போது மட்டுமே தொகைச் சார்பு பூச்சியமாகின்றது. ஆனால், $A (0, 0)$, $B (2, 1)$ வழியே சென்று இக் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த நேர்கோடுகளின் பகுதிகளைக் கொண்ட வரை, பல்கோணக் கோடுகளாகவே இருக்கமுடியும். எனினும் தேவையான சில புள்ளிகளை, இப் புள்ளிகளின் அண்மையில் சார்புக்கு பொருத்தமான மாறலைக் கொடுப்பதன் மூலம் ஒழுங்குபடுத்தி, இப் பல்கோணக் கோடுமீது சார்பரத்திற்கு உள்ள மதிப்பும் இவ்வாறு ஒழுங்குபடுத்திய வளைவரைமீது சார்பரத்திற்கு உள்ள மதிப்பும் மிகச் சிறிய அளவே மாறுபடுமாறு செய்யலாம். இவ்வாறு $v = 0$ என்பது, ஒழுங்கான வளைவரைகள்மீது சார்பரத்திற்கு உள்ள, மதிப்புகளின் மீப்பெரு கீழ் வரம்பு ஆகும். ஆனால் இம் மீப்பெரு கீழ் வரம்பு, ஒழுங்கு வளைவரைகள் மீது அடையப்படாமல் பகுதி சார்ந்த ஒழுங்கு வளைவரைகள்மீதே அடையப்படுகிறது.

$$v [y (x)] = \int_{x_0}^{x_2} F (x, y, y') \, dx.$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயத் தீர்வமைவில், மூலப்புள்ளிகள் உள்ள தீர்வுகளுக்கான நிபந்தனைகளைக் காண்போம். உடைந்த —வரையான எல்லய வரையின் தனித்தனிப் பகுதிகளான ஒழுங்கு வில்கள் ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தொகை வளைவரைகள் என்பது தெளிவு. ஒன்றைத் தவிர மற்ற எல்லா பல்கோண வரையின் பகுதிகளையும் நிலையாகக் கொள்ள, தீர்வமைவு நிலையான வரம்புடைய எளிய தீர்வமைவாக மாறிவிடுவதால்,

இப்பகுதி எல்லய வரையின் ஒரு வில் என்பதில் இருந்து இது எளிதில் புலனுகின்றது.



படம் 7-12.

உடைந்த-வரை எல்லயவரைக்கு ஒரே மூலைப்புள்ளி உள்ளதாகக் கொள்ள *, மூலைப்புள்ளியில் இருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளைப் பெறுகிறேம் :

$$v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\ dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\ dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\ dx.$$

இங்கு x_1 என்பது மூலைப்புள்ளியின் x-ஆயக்கூறு, (படம் 7.12). AC, CB என்ற வளைவரைகள் ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தொகை வளைவரைகள் எனக்கொண்டு, C எனும் புள்ளி யாதோ ஒரு முறையில் நகரக்கூடும் எனவும் கொள்ள, (பக்கம் 414) பகுதி 1-ன் படி)

$$\delta v = (F - y'\ F_{y'})\Big|_{x = x_1 - o} \delta x_1 +$$

$$+ F_{y'}\Big|_{x = x_1 - o} \delta y_1 - (F - y'\ F_{y'})\Big|_{x = x_1 + o}$$

$$\delta x_1 - F_{y'}\Big|_{x = x_1 + o} \delta y_1 = o,$$

எனப் பெறுகிறேம். எனவே,

$$(F - y' F_{y'})\Big|_{x = x_1 - o} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x = x_1 - o} \delta y_1;$$

$$= (F - y'\ F_{y'})\Big|_{x = x_1 + o} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x = x_1 + o} \delta y_1$$

* பல மூலைப்புள்ளிகள் இருந்தாலும் ஒவ்வொன்றுக்கும் இவ்வாறே கொள்ளலாம்.

அல்லது δx_1-ம் δy_1-ம், ஒன்றையொன்று சாராதவை ஆதலால்,

$$(F - y' F_{y'}) \Big|_{x = x_1 - o} = (F - y' F_{y'}) \Big|_{x = x_1 + o}$$

மேலும்,

$$F_{y'} \Big|_{x = x_1 - o} = F_{y'} \Big|_{x = x_1 + o}.$$

இந்நிபந்தனைகளும், தேவையான எல்லைய வரையின் தொடர்ச்சி நிபந்தனைகளும். மூலப் புள்ளிகளின் ஆயக்கூறுகளைக் கணக்கிட உதவுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$V = \int_o^a (y'^2 - y^2)\, dx$$ என்ற சார்பரத்திற்கு, உடைந்த வரை

எல்லைய வரையை (இருக்குமெனில்) காண்க.

வளைவு மாறிப்புள்ளியில் உள்ள இரண்டாவது நிபந்தனையைக் கொள்ள,

$$F_{y'} \Big|_{x = x_1 - o} = F_{y'} \Big|_{x = x_2 + o}.$$

இங்கு,

$$2y'(x_1 - o) = 2y'(x_1 + o)$$

எனவே, $y'(x_1 - o) = y'(x_1 + o)$;

அதாவது x_1 உள்ள புள்ளியில் வகைக் கெழுவான y' தொடர்ச்சியானது. எனவே வளைவு மாறிப்புள்ளி இல்லை. எனவே இத்தீர்வமைவில் எல்லையம் ஒழுங்கான வளைவரைகள் மீதே எய்தப் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$V = \int_{x_0}^{x_2} y'^2 (1 - y')^2\, dx$$ என்ற சார்பரத்திற்கு உடைந்த

வரை எல்லைய வரைகளைக் காண்க.

தொகைச் சார்பு y'-ஐ மட்டும் சார்ந்திருப்பதால், எல்லைய வரைகள் $y = Cx + \bar{C}$ என்ற நேர்கோடுகளாகும் (பக்கம் 375). இங்கு கோட்டம் உடைய புள்ளியில் நிபந்தனைகள்,

$$-y'^2 (1 - y')(1 - 3y') \Big|_{x = x_1 - o}$$

$$= - y'^2 \ (1 - y')(1 - 3y') \Big|_{x = x_1 + o}$$

$$2y' (1 - y') \ (1 - 2y') \Big|_{x = x_1 - o}$$

$$= 2y' (1 - y') (1 - 2y') \Big|_{x = x_1 + o}$$

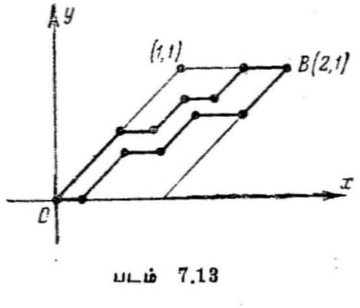
ஆகும். இந்நிபந்தனைகள், புறக்கணிக்கத்தக்க $y' (x_1 - o) = y' (x_1 + o)$-ஐ விட்டு விட,

$$y' (x_1 - o) = o, \quad y' (x^2 + o) = 1$$

என்பனவற்றால் சரியீடு செய்யப்படும்.

அல்லது $y' (x_1 - o) = 1$

$$y' (x_1 + o) = o,$$



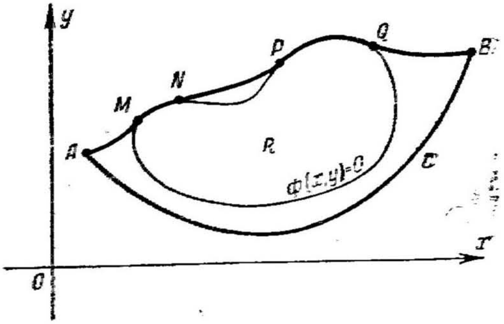
படம் 7.13

எனவே, $y = C_1$, $y = x + C_2$ என்ற குடும்பத்தைச் சேர்ந்த நேர் கோடுகளின் துண்டுகளே உடைந்த-வரை எவ்லய வரைகளாகும்.

4. ஒரு-பக்க மாறல்கள்

சில மாறுபடு தீர்வமைவுகளில், $v[y(x)]$ என்ற சார்பரத்தின் எல்லயம் காணும்போது, ஏற்கத்தக்க வளைவரைகளின் குழாம், $\phi(x, y) = o$ (படம் 7·14) என்ற வளைவரையை வரம்பாகக் கொண்ட R எனும் பரப்பிடத்தில் உள்ள புள்ளிகள் வழியே செல்வது தடைசெய்யப்பட்டிருக்கலாம்.

இத் தீர்வமைவுகளில் எல்லயப்படுத்தும் வளைவரை C, பரப்பிடம் R-ன் வரம்புகளுக்கு வெளியே இருக்கலாம்; இந்நிலையில் தடை செய்யப்பட்ட பரப்பிடம் R, சார்பரத்தின் பண்புகளையோ

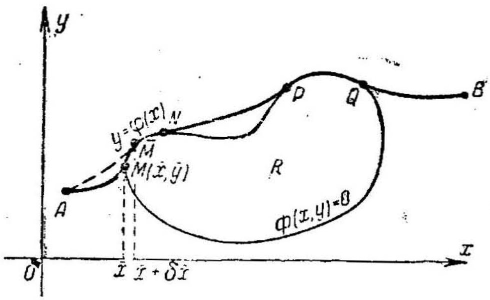


படம் 7–14.

அல்லது C-ன் அண்மையில் அதன் மாறல்களையோ சிறிதும் பாதிப்பதில்லை; எனவே அத்தியாயம் 6-ல் கூறப்பட்ட வாதங்கள் இங்கும் பொருந்தும். ஆகவே எல்லயப்படுத்தும் வளைவரை C, எல்லயவரை ஆகும். C எனும் வளைவரை, R-ன் வரம்புக்கு வெளியே அமையும் விற்களையும், R-ன் வரம்பின் சில பகுதிகளையும் கொண்டதாக இருக்கலாம். பின்னர் கூறப்பட்ட நிலையில் ஒரு புதிய சூழ்நிலை உண்டாகின்றது, ஏற்கத்தக்க வளைவரைகள் பரப்பிடத்திற்குள் நுழைய முடியாதாகையால், R-ன் வரம்பின் பகுதிகளின் மீது வளைவரை C-க்கு ஒரு பக்க மாறல்களே இருக்கக் கூடும். R-ன் வரம்புக்கு வெளியே அமையும் C-ன் பகுதிகள் முன் மாதிரியே, எல்லயவரைகளாகும். ஏனெனில், இரு பக்கமும் மாறல் இருக்கக்கூடிய பகுதியில் C-ஐ மாற்ற, தடுக்கப்பட்ட இடமான R, இருப்பதோ, இல்லாததோ, y-ன் மாறல்களை பாதிக்காது; எனவே அத்தியாயம் 6-ல் கூறியுள்ள முடிவுகளை தொடர்ந்து பயன்படுத்தலாம்,

இவ்வாறு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட தீர்வமைவில், எல்லயவரை விற்கள் மீதும், பரப்பிடம் R-ன் வரம்பின் பகுதிகளிலுமே எல்லயம் எய்தப்பெறும். எனவே தேவையான எல்லயப்படுத்தும் வளைவரை காண, எல்லய வரையில் இருந்து, R-ன் வரம்புக்கு மாறும் புள்ளிகளைக் காண உதவும் நிபந்தனைகளை, இப்புள்ளிகளில் காண வேண்டும். படத்தில் (7.15) காட்டியுள்ளவாறு உள்ள தீர்வமைவில், M, N, P, Q, எனும் புள்ளிகளில் நிபந்தனைகளைப்

பெற வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக, M என்ற புள்ளியில் நிபந்தனை காண்போம். இதே முறையில், எல்லய வரையில்



படம் 7,15

இருந்து, பரப்பிடத்தின் வரம்புக்கு மாறும் மற்ற புள்ளிகளில் நிபந்தனைகள் பெறலாம்.

$$V = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx = \int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y')\, dx$$

$$+ \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y'\, dx)$$

எனும் சார்பரத்தின் மாறல் δv-ஐக் கணக்கிடும் போது, $M(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி, $\phi(x, y) = 0$ என்ற வளைவரை மீது நகருவதால் மட்டுமே மாறல் ஏற்படுவதாகக் கொள்வோம்; அதாவது, M-என்ற புள்ளியில் எந்த நிலைக்கும், $\phi(x, y)=0$, AM ஏற்கனவே ஒரு எல்லயவரை, $MNPQB$ என்ற பகுதி மாறுவதில்லை எனக் கொள்வோம். சார்பரம்

$$v_1 = \int_{x_0}^{\bar{x}} F(x, y, y')\, dx\text{-க்கு}$$

$\phi(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாடுடைய, பரப்பிடம் R-ன் வரம்புமீது நகரும் வரம்புப்புள்ளி உண்டு; அதாவது M-ன் அண்மையில், y-ஐக் காண, $y=\phi(x)$ என்ற அமைப்புடைய வரம்புமீது நகரும் வரம்புப்புள்ளி உண்டு. இவ்வாறு, பகுதி 1-ன்படி (பக்கம் 414),

$$\delta v_1 = \Big[F + (\phi' - y')\, F_{y'} \Big]_{x = \bar{x}} \delta\bar{x}$$

$$v_2 = \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$ என்ற சார்பரத்திற்கும் $(\bar{x}, \bar{y})$

என்ற நகரும் வரம்பு புள்ளி உள்ளது. எனினும் இந்தப் புள்ளியின் அண்மையில், $y = \phi(x)$ எனும் எல்லயம் எய்தப் படும் வரைவரை மாறுவல்லை. எனவே, $(\bar{x}. \bar{y})$ என்ற புள்ளி $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y})$ என்ற புள்ளிக்கு இடம் பெயர்வதால், சார்பரம் v_2–ன் மாறலை, தொகையில் கீழ் எல்லையை மாற்றிக் காண்கிறோம்.

$$\Delta v_2 = \int_{\bar{x} + \delta\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\, dx - \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

$$= -\int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \delta\bar{x}} F(x, y, y')\, dx$$

$$= -\int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \delta\bar{x}} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx.$$

[ஏனெனில், $(\bar{x}, \bar{x} + \delta\bar{x})$ இடைவெளியில் $y = \phi(x)$].

இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, F என்ற சார்பு தொடர்ச்சியுள்ளது என்பதையும் பயன்படுத்த,

$$\Delta v_2 = -F\, x, \phi(x), \phi'(x)\Big|_{x=\bar{x}} \delta\bar{x} + \beta\, \delta\bar{x}.$$

இங்கு $\delta\bar{x} \to o$ எனில், $\delta \to o$

இதன் விளைவாக, $\delta v_2 = -F(x, \phi(x), \phi'(x))\Big|_{x = \bar{x}} \delta x,$

$$\delta v = \delta v_1 + \delta v_2$$

$$= [F(x, y, y') + (\phi' - y') F_{y'}(x. y, y')]_{x = \bar{x}}$$

$$\delta\bar{x} = F(x, y, \phi')\Big|_{x - \bar{x}} \delta\bar{x}$$

$$= [F(x, y, y') - F(x, y, \phi')$$

$$\dot{-} (y' - \phi') F_{y'}(x, y, y')]_{x = \bar{x}} \delta\bar{x}$$

$[\because \ y(\bar{x}) = \phi(\bar{x})]$.

$\delta \bar{x}$ யாதோ ஒன்ருக இருக்கக்கூடுமாதலால், எல்லயத்திற்குத் தேவையான நிபந்தனை $\delta v = o$.

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \phi) - (y' - \phi') F_{y'}(x, y, y')]_{x = \bar{x}} = o$$

ஆகும்.

இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$(y' - \phi')[F_{y'}(x, y, q) - F_{y'}(x, y, y')]_{x = \bar{x}} = 0$$

ஆகும்; இங்கு q என்பது, $\phi'(\bar{x}), y'(\bar{x})$-க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பு. மறுபடியும் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$(y' - \phi')(q - y') F_{y'y'}(x, y, \bar{q}) \Big|_{x = \bar{x}} = 0 ;$$

இங்கு $\bar{q}$ என்பது, q-க்கும் $y'(\bar{x})$-க்கும் இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பு.

$F_{y'y'}(x, y, \bar{q}) \neq o$ என்க; பல மாறுபடு தீர்வமைவுகளில் இவ்வாறு கொள்வது இயற்கை. (அத்தியாயம் 8) இவ்வாறெனில், M என்ற புள்ளியிலான நிபந்தனை, $y'(\bar{x}) = \phi'(\bar{x})$-

[q என்பது $y'(\bar{x})$-க்கும், $\phi'(\bar{x})$க்கும் இடைப்பட்ட மதிப்பாததால், $y'(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$ என்ருல் மட்டுமே, $q = y'$ ஆகும்,]

எனவே, M என்ற புள்ளியில், எல்லயவரை AM-க்கும் வரம்பு வரை MN-க்கும் பொதுத் தொடுகோடு உண்டு; ($y = y(x)$-க்கு இடத் தொடுகோடும், $y = \phi(x)$ வளைவரைக்கு வலத் தொடுகோடும்). இவ்வாறு, எல்லயவரை R எனும் பரப்பிடத்தின் வரம்புக்கு, M என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $v[y(x)] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 \, dx ; \quad y(o) = o, \quad y(4) = 2$

ஏன்ற சார்பரத்திற்கு ஆன சிறுமத்தீர்வமைவில், ஒரு மூலைப்புள்ளி உள்ள தீர்வு காண்க.

2. $v[y(x)] = \int_{x}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2)\, dx;\ y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லயத் தீர்வமைவில், மூலைப் புள்ளிகள் உள்ள தீர்வுகள் உண்டா எனக் காண்க.

3. $v[y(x)] = \int_{0}^{x_1} (y'^4 - 6y'^2)\, dx,\ y(o) = 0;\ y(x_1) = y_1$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லயத் தீர்வமைவில் மூலைப் புள்ளிகள் உள்ள தீர்வுகள் ஏதாவது உண்டா என ஆராய்க.

4. $v[y(x)] \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\, e^{arc \tan y'} \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$

$A(x, y) \neq o$ என்ற சார்பரத்திற்கு ஊடு வெட்டாண்மை நிபந்தனையைக் காண்க.

5. எல்லயத்திற்கான அடிப்படைத் தேவையான நிபந்தனை $\delta v = o$-ஐப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் சார்பரம் எச் சார்பின் மேல் எல்லயப்படுத்தப்படலாம் எனக் காண்க.

$$v[y(x)] = \int_{0}^{1} (y''^2 - 2xy)\, dx;\ (y(o) = y'(o) = o$$

$$y(l) = \frac{1}{120};\ y'(1) \text{ கொடுக்கப்படவில்லை.}$$

6. ஏற்கத்தக்க வளைவரைகள்

$$(x - 5)^2 + y^2 = 9$$

என்ற வட்டத்தைப் பரிதியாகக் கொண்ட வட்டத்திற்குள் செல்லமுடியாதெனக் கொண்டு,

$$v[y(2)] = \int_{0}^{1o} y'^3\, dx;\ y(o) = o,\ y(1o) = o$$

என்ற சார்பரத்திற்கு, எவ்வளை வரைகள் மீது எல்லயம் அடையப்படலாம் எனக் காண்க.

7. $v[y(x)] = \int_{o}^{\pi/4} (y^2 - y'^2)\, dx$ ஒரு சார்பரம். $y(o) = o$,

மற்றொரு வரம்புப் புள்ளி $x = \frac{\pi}{4}$ என்ற நேர்க் கோட்டின் மீது நகரமுடியும் என்ற நிலையில், சார் பரத்தின் எல்லயம் எச் சார்பின் மீது அடையப்படலாம் எனக் காண்க.

8. அடிப்படைத் தேவையான நிபந்தனை $\delta v = 0$-ஐப் பயன்படுத்தி,

$$v[y(x)] = \int_{o}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx; \; y(o) = o,$$

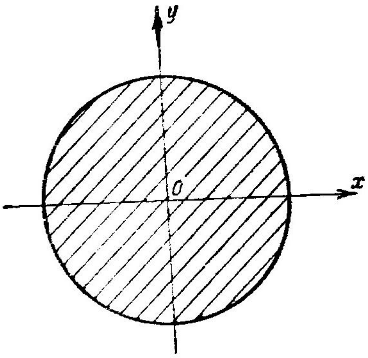
என்ற சார்பரத்திற்கு, இரண்டாவது வரம்பு புள்ளி (x_1, y_1), $(x - 9)^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தின் மீது இயங்கமுடியும் எனக் கொண்டு, எல் லயம் எவ்வளைவின் மீது அடையப்படலாம் எனக் காண்க.

8. எல்லயம் உள்ளமைக்குப் போதுமான நியதிகள்

1. எல்லய வரைக்களம்

ஓர் இடைவெளி Dயில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாகவும் $y = y(x, C)$ எனும் வரைத் தொகுதியின் ஒரே ஒருவரை மட்டும் செல்வதாக அமைந்தால், அத்தகைய வரைத் தொகுதி ஒரு களமாகிறது. அல்லது திட்டமாகக் கூற D-யில் சரியான களமாகிறது என்கிறோம். $y = y(x, C)$ எனும் வரைக்கு (x, y) எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டின் சரிவு (x, y) எனும் புள்ளியில் அந்தக் களத்தின் சரிவு எனப்படும்.

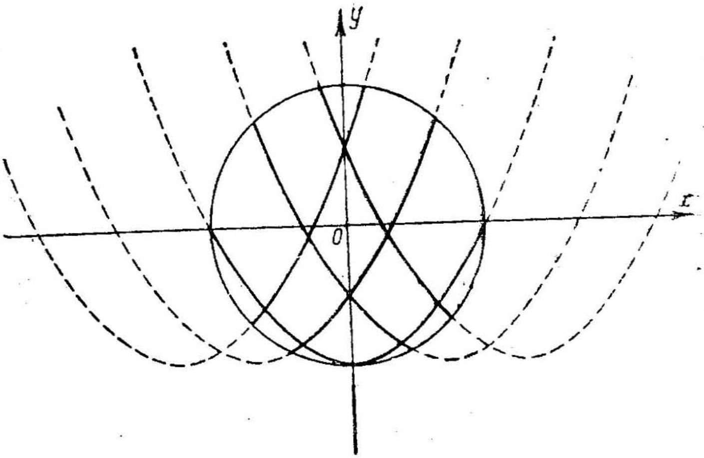
எடுத்துக்காட்டாக $x^2 + y^2 < 1$ எனும் வட்டத்திற்குள் $y = x + C$ எனும் இணை நேர்கோட்டுத் தொகுதிகளமாக அமைகிறது. (படம் 8·1) இதன் சரிவு $P(x, y) = 1$. இதற்கு மாறாக $y = (x - C)^2 - 1$ எனும் பரவளையத் தொகுதி (படம் 8.2) இந்த வட்டத்திற்குள் களமாக அமைவதில்லை, ஏனெனில், இந்தத் தொகுதியின் பரவளையங்கள் வட்டத்திற்குள் வெட்டிக்கொள்கின்றன.



படம் 8.1.

$y = y(x, C)$ எனும் வரைத் தொகுதியின் எல்லா வரைகளும் (x_0, y_0) எனும் புள்ளி வழிச் சென்றால், அதாவது அவை வரைக்கற்றையாக அமைந்தால், வரை D எனும் இடைவெளியில், வரைமுனையும் இருந்தால் அவை சரியான களமாக அமைவதில்லை. ஆனால் கற்றையின் வரைகள் D எனும் இடைவெளியை நிரப்பி ஒன்றையொன்று வெட்டாதனவானால், (முனையைத் தவிர) களம் எனக் கூறுவதற்குள்ள நியதிகள் கற்றைமுனையைத் தவிர மற்றிடங்களில் பொருந்து

கின்றன. அப்போது $y = y(x, C)$ எனும் வரைத் தொகுதியும் களமாகிறதென்கிறோம். ஆனல் சரியான களமல்ல, மையக் களமாக அமைகிறது என்போம். (படம் 8.3)



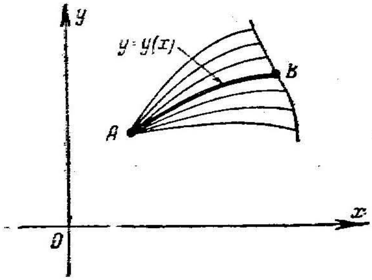
படம் 8–2.

எடுத்துக்காட்டாக $y = C \sin x$ ($o \leqslant x \leqslant a$, $a < \pi$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு, இந்த சைன் வரைகள் மையக்களமாகும். (படம் 8·4) $\delta \leqslant x \leqslant a_1$, ($\delta > o$) $a < \pi$ எனும் x அச்சின் அணிமையில் சிறு துண்டில் இதே வரைகற்றைச் சரியான களமாக அமையும். (படம் 8-4)

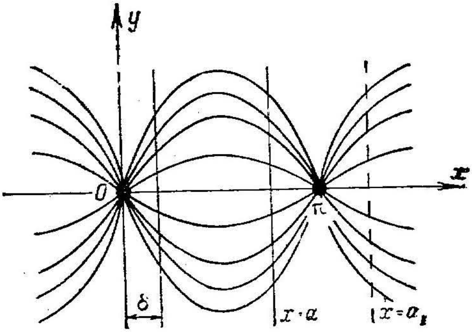
ஏதேனும் ஒரு மாறுபடு தீர்வுகாண பிரச்சினையின் எல்லைய வரைகளால் ஒரு சரியான அல்லது மையக்களம் அமைந்தால் அது எல்லைய வரைக்களம் எனப்படும்.

எந்தப் பரிமாண வெளிக்கும் இத்தகைய களக் கருத்தைப் புகுத்தலாம். $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ எனும் வரைத் தொகுதியின், $(x, y, \ldots y_n)$ எனும் வெளியில் ஓர் இடைவெளி D-யில், ஒவ்வொரு புள்ளிவழியும் ஒரே ஓர் வரை செல்லுமானல், அத் தொகுதி D-யில் வரைக் களமாக அமையும் $y_i(x, C_1, C_2 \ldots C_n)$ இவற்றின் x-ஐச் சார்ந்து பகுதி வகைக் கெழுக்கள், $p_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ களத்தின் சரிவு சார்பலன்கள் எனப்படும். ஆகவே $p_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ என்பனவற்றைக் காண $\frac{\partial}{\partial y} y_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ என்பனவற்றைக்

கொண்டு ($C_1, C_2, \ldots C_n$) இவற்றை $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ எனும் கூறு களில் உள்ள கோவைகளால் கூறவேண்டும். மையக் களமும் இதுபோன்று விவரிக்கப்படுகிறது.



படம் 8-3.



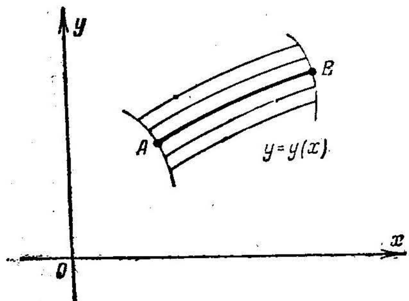
படம் 8-4.

$y = y(x)$ என்பது மாறுபடு தீர்வு பிரச்சினையின் எல்லைய வரையாகுக. இதன் சாதாரணச் சார்பரத்தின் எல்லையத்தை உட்படுத்தி இருக்கட்டும்.

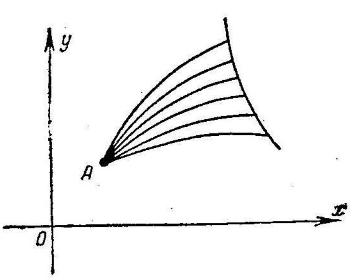
$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

வரம்பு நுனிபுள்ளிகள் $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ நிலையாகுக

$y = y(x)$ எனும் எல்லையவரை எல்லையவரைக்களத்தில் உட்பட்டது எனக் கூறவேண்டுமானால், ஏதேனும் $C = C_0$ எனும்



படம் 8-5



படம் 8-6

மதிப்புக்கு, $y = y(x)$ எனும் எல்லையவரைக் கற்றையை உருவாக்கும் $y = y(x_1, c)$ எனும் வரைத் தொகுதியில் இருக்க

வேண்டும்; அத்துடன் $y = y(x_1, C)$ எனும் வரைத்தொகுதி உருவாக்கும் எல்லையவரைக்களம் அமையும், இடைவெளியாகிய D-ன் வரம்பில் இருக்கக்கூடாது. $A(x_0, y_0)$ எனும் புள்ளியை மையமாகவுடைய மையக்களம் இந்தப் புள்ளிவழிச் செல்லும் எல்லையவரைக்கணிமையில் எல்லையவரைக் கற்றையால் ஏற்பட்டால், $y=y(x)$ எனும் எல்லையவரையையும் உட்கொண்ட மையக்களம் உருவாகியுள்ளது எனலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பிரச்சினையில், $A(x_0, y_0)$ எனும் புள்ளியில் உள்ள வரைகளின் சரிவைத் துணை அலகாகக் கொள்ளலாம்,

எடுத்துக்காட்டு 1;

$$\int_0^a (y'^2 - y^2)\, dx \text{ எனும் சார்பரம் தரப்பட்டுள்ளது.}$$

மைய எல்லை வரைக்களத்தில், $0 < a < \pi$, எனும்படி $(0, 0)$, $(a, 0)$-ஐச் சேர்க்கும் எல்லையவரை $y = 0$-ன் வில்லையும் சேர்க்க வேண்டும். $y'' + y = 0$ எனும் ஆயிலர் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு [870 பக்கம் எடுத்துக்காட்டைப் பார்க்கவும்],

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $(0, 0)$ வழிச் செல்வதால், $C_1=0$ $y = C_2 \sin x$; இத்தகைய வரைக் கற்றை $0 \leqslant x \leqslant a$, $a < \pi$ எனும் இடைவெளியில் $C_2 = 0$ எனும் மதிப்புக்குள்ள $y = 0$ எனும் எல்லைய வரையையும் உட்கொண்ட மையக் களத்தை உருவாக்குகிறது. இந்தத் தொகுதியின் துணை அலகு C_2 என்பது $(0, 0)$ என்ற புள்ளியில் வகைக்கெழுவின் மதிப்பாகும். ஆனால், இதே கணக்கில் $a \geqslant \pi$ என்றால், $y = C_2 \sin x$ என்பன களத்தை உருவாக்குவதில்லை (பக்கம் 444 பார்க்கவும்).

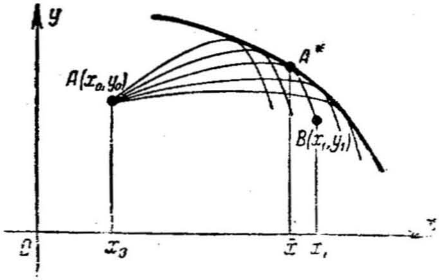
$F(x, y, C) = 0$ எனும் வரைத் தொகுதியின் இரு நெருங்கிய வரைகள், $F(x, y, C) = 0$ $\dfrac{\partial F}{\partial C} = 0$ எனும் சமன்பாடுகளால், தரப்படும் C—தன்மைகாட்டி வரைமீது வெட்டிக்கொள்கின்றன. என்பது யாவரும் அறிந்ததே.

C—தன்மைகாட்டி வரை என்பது தொகுதியின் தழுவலையும், பொருந்து புள்ளிகளையும், மற்றவைகளுடன் கொண்டுள்ளது என்பதைக் கவனப்படுத்திக் கொள்க.

$F(x, y, C) = 0$ என்பது ஒரு வரைக் கற்றையின் சமன்பாடானால், கற்றையின் முனை C-தன்மைகாட்டியில் அமைய

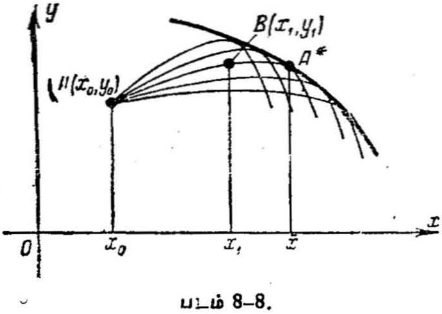
வேண்டும். ஆகவே, (x_0, y_0) வழிச் செல்லும் $y = (x, C)$ எனும் எல்லைய வரைக் கற்றையைக் கொண்டு, அதன் C-தன்மைகாட்டி $\Phi(x,y) = 0$ என்பதைக் கண்டால், $y = y\,(x, c)$ எனும் வரைகளை நெருங்கி அமையும் வரைகள் $\Phi\,(x, y) = 0$ எனும் வரைக்கு அருகில் வெட்டிக்கொள்ளும். குறிப்பாக $A\,(x_0\, y_0)$, $B\,(x_., y_1)$ எனும் புள்ளி வழியாகவுள்ள நாம் கொண்ட $y = y\,(x)$ எனும் எல்லைய வரைக்கு அண்மையில் உள்ள வரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $y = y\,(x_1, C)$ தன்மை காட்டியும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளுக்கு அருகில் அமையும். [8·7]-ல் C தன்மை காட்டி தடித்த கோட்டால் காட்டப்பட்டுள்ளது.]

$y = y\,(x)$ எனும் எல்லைய வரையின் வில், $A\,B$, தரப்பட்டுள்ள எல்லையவரை உட்படவுள்ள எல்லையவரைக் கற்றையுடைய



படம் 8–7.

C தன்மை காட்டியுடன் (A நீங்கலாக) வேறு பொதுப்புள்ளி இல்லை எனில், ABக்குப் போதுமான அளவு நெருங்கியுள்ள எல்லைய வரை இல்லையாம்; அதாவது அவை ABயின் அணிமையில் இந்த வில்லை உட்கொள்ளும் மையக் களத்தை உருவாக்குகின்றன. (படம் 8–8.)



படம் 8–8.

$y = y\,(x)$ எனும் எல்லைய வரையும் $y = y\,(x, C)$ எனும் வரைக்கற்றையின் C-தன்மை காட்டியும் (A அல்லாத) A எனும்

புள்ளியைப் பொதுப் புள்ளியாகவுடையனவானுல் $y = y(x)$ எனும் வரைக்கு நெருங்கியுள்ள கற்றையின் வரைகள் அவைகளுக்குள்ளும், $y=y'(x)$ உடனும் எனும் புள்ளிக்கருகில் வெட்டிக் கொள்ளும். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து அவை களத்தை உருவாக்குவதில்லே (படம் 8·7). A எனும் புள்ளி A எனும் புள்ளிக்கு துணேயிய புள்ளி எனப்படும்.

இந்த முடிவைப் பின்வருமாறு கூறலாம். எல்லேய வரையின் வில் AB-ஐ உட்கொண்டதும் A-ஐ மையமாகவுடையதுமான மையக் களத்தை அமைக்க, A-யின் துணேயிய புள்ளி A^* ஆனது வில் AB-யில் அமையாது இருந்தால் போதுமானது. இவ்வாறு தரப்பட்டுள்ள ஓர் எல்லேய வரையுடன் ஓர் எல்லேய வரைக் களத்தை அமைக்கச் சாத்தியமான நியதி, ஜேகோபியின் (Jacobi) நியதி எனப்படும்.

இந்த நியதியைக் கணிதக் குறியீட்டிலும் விவரிக்கலாம். $y = y(x, C)$ என்பது A-ஐ மையமாகவும், C எனும் துணே அலகைக் கொண்டதுமான எல்லேய வரைக் கற்றையாகுக. திட்டமாகத் துணே அலகைக் கூற, அது A எனும் புள்ளியின் வரைகளின் சரிவு y' ஆகுக. C தன்மைகாட்டி வரையின் சமன்பாடு $y = y(x, C)$; $\dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0$. தொகுதியின் ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட வரையிலும் $\dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ என்பது x-ன் சார்பலன் மட்டுமாகும். இதனேச் சுருக்கமாக $u = \dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ எனக் குறிக்கவும், இங்கு C அறியப்பட்ட ராசி; ஆகவே $u'_x = \dfrac{\partial^2 y(x, C)}{\partial C\, \partial x}$; $y = y(x,C)$ எனும் சார்பலன்கள் ஆய்லர் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். ஆகவே,

$$F_y\,(x, y(x, C), y'_x(x, C)) - \frac{d}{dx} F_{y'}\,(x, y(x, C), y'_x(x, C))$$

$\equiv 0$. இந்த முற்றெருமையை C-ஐச் சார்ந்து வகையீடு செய்து, $\dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C} = u$ எனப் பிரதியிட நாம் அடைவது,

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}\,(F_{yy'}\,u + F_{y'y'}\,u') = 0.$$

அல்லது $\left(F_{yy} - \dfrac{d}{dx} F_{yy'}\right) u - \dfrac{d}{dx}\,(F_{y'y'}u') = 0.$

இங்கு $F_{yy}(x, y, y'), F_{yy'}(x, y, y'), F_{y'y'}(x, y, y')$ என்பவை அறியப்பட்ட x-ன் சார்பலன்களாகும். ஏனெனில் $C = C_0$ எனும் மதிப்புக்கு, $y = y(x, C)$ எனும் ஆயிலர் சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கு இரண்டாவது ராசி y சமமாகும். இந்த சமபடித்தான ஒருபடி இரண்டாவது வரிசைச் சமன்பாடு ஜேகோபியின் சமன்பாடு எனப்படும்;

இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $u = \dfrac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, $x = x_0$ எனும் கற்றையின் முனையில் பூச்சியமாகிறது, (கற்றையின் மையம் எப்போதும் C-தன்மைகாட்டியில் உள்ளது). அத்துடன் $x_0 < x < x_1$ எனும் இடைவெளியில் வேறொரு புள்ளியிலும் பூச்சியமானால் அப்போது A எனும் புள்ளிக்குத் துணையிய புள்ளியை,

$$y = y(x, C_0), \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \text{ அல்லது } u = 0$$

தருகிறது. இது எல்லய வரையின் வில் ABயிலும் அமைகிறது.*

குறிப்பு : எல்லயம் உள்ளமைக்கு ஜேகோபியின் நியதி தேவையானது என நிறுவலாம். அதாவது, ABஐ எல்லயப் படுத்த, Aயின் துணையியப் புள்ளி $x_0 < x < x_1$ எனும் இடைவெளியில் இருக்க முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$A\ (0, 0)$, $B\ (a, 0)$ எனும் இரு புள்ளிகள் வழி செல்லும் சார்பரம்

$$v = \int_0^a (y'^2 - y^2)\, dx$$

இதன் எல்லயவரை ஜேகோபி நியதிக்குட்பட்டதா என ஆராய்க. ஜேகோபியின் சமன்பாடு

$$-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \text{ அல்லது } u'' + u = 0.$$

ஆகவே, $u = C_1 \sin(x + C_2)$

---

* $u(x_0) = 0$ எனும் நியதிக்குட்பட்ட இரண்டாம் வரிசை சமபடித்தான ஒருபடித்தான சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் யாவும் ஒன்றுக்கொன்று நிலை எண் குணகத்தில் மட்டும் மாறுபடுகிறது. எனவே, ஒருங்கே பூச்சியமாகும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

$u(0) = 0$. ஆகவே, $C_2 = 0$. ஆகவே, $u = C_1 \sin x$, u எனும் சார்பலன் $x=k\pi$ (k முழுஎண்)எனும் புள்ளிகளில் பூச்சியமாகிறது. ஆகவே $0<a<\pi$ என்றால் $0\leqslant x\leqslant a$ எனும் இடைவெளியில் $x=0$ எனும் புள்ளியில் மட்டும் u எனும் சார்பலன் பூச்சியமாகிறது. ஆகவே ஜேகோபியின் நியதி உள்ளதெனத் தெரிகிறது. ஆனால் $a>\pi$ என்றால் $0\leqslant x\leqslant a$ எனும் இடைவெளியில் $x=\pi$ எனும் இன்னொரு புள்ளியிலும் பூச்சியமாகிறது. அப்போது ஜேகோபியின் நியதி இல்லை (பக்கம் 447 எடுத்துக்காட்டு 1-ஐப் பார்க்கவும்).

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2)\,dx$$

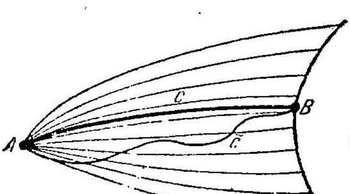
எனும் சார்பரத்தின் $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ வழிச்செல்லும் எல்லைய வரைக்கு ஜேகோபியின் நியதி உள்ளதா? இதன் ஜேகோபி சமன்பாடு $u'' - u = 0$. இதன் பொதுத்தீர்வு $u=C_1 \sin h\, x + C_2 \cos h\, x$, $u(0) = 0$ என்பதிலிருந்து $C_2=0$, $u=C_1 \sin hx$, $u=C_1 \sin hx$ எனும் வரைக் கற்றையின் வரைகள் x அச்சை $x=0$ எனும் புள்ளியை மட்டும் வெட்டுகின்றன. ஆகவே a என்னவாயினும் ஜேகோபியின் நியதி உள்ளது.

2. E (x, y, p, y′) எனும் சார்பலன்

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx.$$

$y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ என அமையும் சார்பரத்தின் எல்லைய வரைக்கு ஜேகோபியின் நியதி உள்ளதெனக் கொள்வோம். ஆகவே $p(x, y)$ எனும் சரிவுடைய மையக் களத்தில் $A(x_0, y_0)$ $B(x_1, y_1)$ எனும் புள்ளி வழிச் செல்லும் எல்லைய வரை C அமைகிறதென்போம். (படம் 8·9)*

C எனும் எல்லைய வரையிலிருந்து அதற்கு நெருங்கிய சாத்தியமான வரை $\bar{C}$-க்குப் போகும்போது சார்பரத்தில் ஏற்படும் மாறுபடு $\triangle v$-யின் குறியை நிர்ணயிக்க,



படம் 8–9.

$$\int_{\bar{C}} F(x, y, y')\,dx,$$

*எல்லைய வரை சரியான களத்தில் உள்ளது—மையக் களத்தில் அல்ல எனக் கொள்வோம்.

$-\int_C F(x, y, y')\,dx$, என்பதை ஆராய்வதற்குச் சவுகரியமான வடிவுக்கு மாற்றுவோம். (குறியீடுகள் $\int_{\bar{C}} F(x, y, y')\,dx$. $\int_C F(x, y, y')dx$, என்பவை சார்பரம் $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$-ன் $\bar{C}$, C வழிக் கொள்ளும் மதிப்புக்கள் முறையேயாகும்).

$$\int_{\bar{c}} [F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) F_p(x, y, p)]\,dx$$

எனும் துணைச் சார்பரத்தைப் பார்ப்போம்.

இது $\frac{dy}{dx} = p$ என களத்தின் எல்லைய வரைகளில் இருப்பதால், $\int_C F(x, y, y')\,dx$ என C எனும் எல்லைய வரையில் மாறுகிறது இதே துணைச் சார்பரம்.

$$\int_{\bar{c}} [F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) Fp(x, y, p)]\,dx.$$

அல்லது,

$$\int_{\bar{c}} [F(x,y,p) - p\,F_p(x,y,p)]\,dx + F_p(x,y,p)\,dy \quad (8 \cdot 1)$$

என்பது சரியான வகையீட்டின் தீர்வு ஆகும். (solution of exact differential) $v[y(x)]$ மாறும் $\bar{v}(x, y')$ எனும் சார்பலனின் வகையீடு அத்தியாயம் 7, பிரிவு 1 லிருந்து (பக்கம் 414).

$$d\bar{v} = [F(x, y, y') - y' F_{y'}(x,y,y')]\,dx + F_{y'}(x,y,y')\,dy.$$

இது (8·1)-ல் உள்ள துணை நுண்தொகையிலிருந்து களத்தின் எல்லயவரையின் சமன் குறியீட்டில் மட்டும் மாறுபட்டுள்ளது.

இவ்வாறு C எனும் எல்லயவரையில் நுண்தொகை

$$\int_{\bar{c}} [F(x, y, p) + (y' - p)\,F_p]\,dx \text{ ஆனது.}$$

$\int_C F(x, y, y')\, dx$ உடன் பொருந்துகிறது. சார்பரம்

$\int_{\bar{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p]\, dx$ சரியான வகையீட்டின்

நுண்தொகையானதால், அதனுல் நுண்தொகை கொள்ளப்படும் ஏதுவரையாயினும் ஒன்றேயாதலால்,

$$\int_C F(x, y, y')\, dx = \int_{\bar{C}} [F(x,y, p] + (y' - p) F_p(x, y, p)]dx$$

இது $\bar{C} = C$-க்கு மட்டுமல்ல, $\bar{C}$ ஏதாயினும் பொருந்தும்.

ஆகவே மாறுபாடு

$$\triangle v = \int_C F(x, y, y')\, dx - \int_{\bar{C}} F(x, y, y')\, dx$$

என்பதை மாற்ற

$$\triangle v = \int_{\bar{C}} F(x, y, y')\, dx - \int_{\bar{C}} [F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y\, p)]dx$$

$$= \int_{\bar{C}} [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_p(x, y, p)]\, dx.$$

நுண்தொகைகாண சார்பு வெயிஸ்ட்ராஸ் (weierstrass) சார்பலன் எனப்படும். இதனை $E(x, y, p, y')$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

$$E(x, y, p\, y') - F(x, y, y') - F(x, y, p) = (y' - p) F_p(x, y, p).$$

ஆகவே இந்தக் குறியீட்டில்

$$\triangle v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y')\, dx.$$

C எனும் வரையின்மீது v எனும் சார்பரம், மீச்சிறுமதிப்பை அடையப் போதுமான நியதி, E என்பது நேரண்ணுக இருத்தலாம். ஏனெனில், $E \geqslant 0$ என்ருல் $\triangle v \geqslant 0$ என ஆகும், மீப்பெருமதிப்புடைய $E \leqslant 0$ ஆகும். ஏனெனில் இங்கு $\triangle v \leqslant 0$. இங்கு எளிய மீச்சிறுமத்திற்கு $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ (அல்லது மீப்பெருமத்திற்கு $E \leqslant 0$) என எனும் (x, y)-ன் மதிப்புக்கு எல்லயவரை

மேல் உள்ள (x,y)-க்கு அணிமையிலும் y'-ன் மதிப்புக்கு $p(x,y)$-க்கு அணிமையிலும் இருந்தால் போதுமானது. வலிய மீச்சிறுமத்திற்கு (Strong minimum) அதே சமனின்மை (x, y)-ன் மதிப்புக்கும், ஆனால் y'-ன் எந்த மதிப்புக்கும் இருக்கவேண்டும். ஏனெனில் வலிய சிறுமத்தின்போது நெருங்கி அமையும் வரைகள் எந்தத் திசையிலும் தொடுகோட்டை அடையலாம். எளிய மீச்சிறுமத்தின்போது நெருங்கியவரைகளின் y'-ன் மதிப்பு எல்லையவரை C-ன்மேல் உள்ள $y'=p$ அணிமையில் உள்ளது.

ஆகவே C எனும் வரைமீது சார்பரம் எல்லயத்தை அடையக் கீழ்வரும் நியதிகள் போதுமானவை.

எளிய எல்லையத்திற்கு :

1. C எனும் வரை வரம்பு நியதிக்குட்பட்ட எல்லயவரை ஆகவேண்டும்.

2. எல்லய வரைக் களத்தில் C இருக்கவேண்டும். இதற்குப் பதிலாக ஜேகோபி நியதி இருக்கலாம்.

3. C எனும் வரைக்கு அருகில் (x, y) எனும் எந்தப் புள்ளியிலும், $p(x, y)$-க்கு அருகில் y'-ன் மதிப்புக்கும், சார்பலன் $E(x, y, p, y')$ குறி மாறக்கூடாது. மீச்சிறுமத்திற்கு $E \geqslant 0$ மீப்பெருமத்திற்கு $E \leqslant 0$.

வலிய எல்லையத்திற்கு :

1. C எனும் வரை வரம்பு நியதிக்குட்டபட்ட எல்லையவரை ஆகவேண்டும்.

2. எல்லைய வரைக் களத்தில் C இருக்கவேண்டும். இதற்குப் பதிலாக ஜேகோபி நியதி இருக்கலாம்.

3. C எனும் வரைக்கு அருகில் (x, y) எனும் எந்தப் புள்ளியிலும் y'-ன் எந்த மதிப்புக்கும் சார்பலன் $E(x, y, p, y')$ குறி மாறக் கூடாது. மீச்சிறுமத்திற்கு $E \geqslant 0$ மீப்பெருமத்திற்கு $E \leqslant 0$.

குறிப்பு : வெயிஸ்ட்ராஸ் நியதி தேவை என நிறுவ முடியும். இன்னும் திட்டமாகக் கூற, எல்லயவரை C உட்பட உள்ளமையக்களத்தில் சில y'-ன் மதிப்புக்களுக்கு எல்லய வரைப் புள்ளிகள் மேல் E மாறுபட்ட குறிகளையுடையதானால் வலிய எல்லயம் ஏற்படாது. இதேபோல் p-ன் நெருங்கிய y'-ன் மதிப்புக்களுக்கு ஏற்பட்டால் எளிய எல்லயம்கூட ஏற்படாது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$v = \int_o^a y'^3\, dx; \quad y(o) = o$$

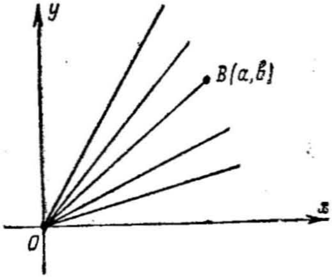
$$y(a) = b, a > o \quad b > o$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயத்தை ஆராய்க.

$y = C_1 x + C_2$ எனும் நேர்கோடுகளே எல்லய வரைகள் $y = \frac{b}{a} x$ எனும் நேர்கோட்டில் மட்டுமே எல்லயம் அமைய முடியும். $y = C_1 x$ எனும், $(0,0)$-ஐ முனையாகக் கொண்ட கோட்டுக்கற்றை, $y = \frac{b}{a} x$ எனும் நேர்கோட்டையும் உள் கொண்ட மையக் களமாகும். (படம் 8.10)

சார்பலன்

$$E(x,y,p\, y')$$
$$= y'^3 - p^3 - 3p^2 (y' - p)$$
$$= (y' - p)^2 (y' + 2p)$$



படம் 8.10.

$y = \frac{b}{a} x$ எனும் எல்லய வரை மீது களத்தின் சரிவு $p = \frac{b}{a} > o$, y'-ன் மதிப்பு $p = \frac{b}{a}$-க்கு நெருங்கியிருந்தால் $E \geqslant 0$. ஆகவே எளிய மீச்சிறும நியதிகள் பொருந்துகின்றன.

இவ்வாறு $y = \frac{b}{a} x$ எனும் எல்லயவரை மீது எளிய மீச்சிறுமம் ஏற்படுகிறது. ஆனால் y' ஏதேனும் மதிப்பு கொண்டால் $(y' + 2p)$ எந்தக் குறியையாகிலும் அடையலாம். E குறி மாறுகிறது. வலிய மீச்சிறுமத்திற்குப் போதுமான நியதிகள் பொருந்துவதில்லை. பக்கங்கள் 454-455-ல் உள்ள குறிப்பைக் கருத்தில் கொண்டால் $y = \frac{b}{a} x$ எனும் கோட்டின்மீது பெரிய மீச்சிறுமம் ஏற்படுவதில்லை என உறுதி கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : 2

$$\int_o^a (6y'^2 - y'^4 + yy')\, dx; \; y(o) = o; \; y(a) = b, \; a > o, \; b > o$$

எனும் சார்பரத்திற்கு தொடர்ச்சியுடைய முதல் வகையீடுகொண்ட சார்பலன்களிடையே எல்லயம் ஆராய்க.

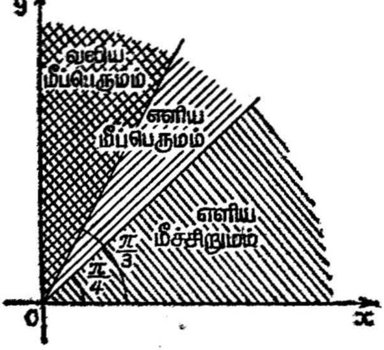
எல்லை வரைகள் $y = C_1 x + C_2$, $y = \frac{b}{a} x$ எனும் நேர் கோட்டின்மீது வரம்பு நியதிகள் பொருந்துகின்றன. இந்த நேர் கோடு மையக்களமாக அமையும் எல்லைக் கோட்டுக்கற்றை $y = C_1 x$-ல் உள்பட்டது.

சார்பலன் $E(x, y, p, y')$

$$= 6y'^2 - y'^4 + yy' - 6p^2 + P^4 - yp - (y' - p)$$
$$\times (12p - 4p^3 + y) = -(y' - p)^2 [y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]$$

E எனும் சார்பலனின் குறி, $y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)$ எனும் கடைசிக் குணகத்தின் குறிக்கு எதிராகும். இந்தக் குணகம் $y' = -p \pm \sqrt{6 - 2p^2}$ எனும் மதிப்புக்களுக்கு பூச்சியமாகும். y' இந்த மதிப்புக்களைக் கடக்கும் போது குணகத்தின் குறி மாறுகிறது. $6 - 2p^2 < 0$ அல்லது $p \geqslant \sqrt{3}$, y'-ன் எந்தமதிப்புக்கும் $[y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)] > 0$. ஆனல் $6 - 2p^2 \geqslant 0$ அல்லது $p < \sqrt{3}$ எனின் $[y'^2 + 2py' - (6 - 3p^2)]$ குறியாகிறது. ஆனல் இவ்வாருகும்போது p-யிலிருந்து போதுமான அளவு சிறிதாக மட்டும் வேறுபட்டிருக்குமானல் $p > 1$ எனும்போது நேர்க்குறி மாருது; $p < 1$ என்ருல் மைனஸ் குறி மாருது.

ஆகவே, $p = \frac{b}{a} < 1$ அல்லது $b < a$ என்ருல் எளிய மீச்சிறுமம் உள்ளது. ஏனெனில் p-க்கு அருகில் உள்ள மதிப்புகளுக்கு $E \geqslant 0$; $p = \frac{b}{a} > 1$ அல்லது $b > a$ என்ருல்எளியமீப்பெருமம் உள்ளது. $p = \frac{b}{a} \geqslant \sqrt{3}$ வலிய மீப்பெருமம் உள்ளது. ஏனெனில் y'-ன் எந்த மதிப்புக்கும் $E < 0$ $p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}$ என்ருல் பக்கம் 455-ல் குறிப்பின்படி வலிய மீச்சிறுமம் அல்லது வலிய மீப்பெருமம் இரண்டும் இல்லை. (படம் 8-11)



படம் 8.11

மேற்கூறிய மிகச் சாதாரணமான கணக்குகளில்கூட E-ன் குறி என்னவென்பதை ஆராய்தல் கடினமாக இருக்கிறது. இந்தக் காரணத்திற்காக, E எனும் சார்பலன் குறிமாறாது இருக்கவேண்டு மெனும் நியதிக்குப் பதிலாக இன்னும் எளிதில் ஆராயக்கூடிய நியதியைக் காணல் நலம். $F(x, y, y')$ எனும் சார்பலன் y'ஐச் சார்ந்து மும்முறை வகையிடற்குரியதெனக் கொள்வோம். டெயிலர் சூத்திரத்தால் நாம் அடைவது

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y'-p) F_p(x, y, p) + \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q).$$

இங்கு p, y'க்கு இடையே q உள்ளது.

சார்பலன்,

$$E(x, y, p, y') - F(x, y, y') - F(x, y, p). - (y' - p) F_p(x, y, p)$$

$F(x, y, y')$-க்கு டெயிலர் சூத்திரப்படி விரிவைப் பயன் படுத்த,

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q).$$

இதிலிருந்து நாம் காண்பது $F_{y'y'}(x, y, q)$ என்பதன் குறி மாற வில்லையானல், சார்பலன் E-ன் குறியும் மாறுவதில்லை என்பதாம். எளிய மீச்சிறுமத்தைத் தேடும்போது, $F_{y'y'}(x, y, q)$-ன் குறி யானது எல்லய வரைக்கணிமையில் உள்ள புள்ளிகளில் x, y-ன் மதிப்புக்களுக்கும், p-க்கு நெருங்கியுள்ள qவின் மதிப்புக்கும், மாரு திருக்க வேண்டும். எல்லய வரையின் புள்ளிகளில் $F_{y'y'}(x, y, y')$ $\neq 0$ என்ருல் இரண்டாவது வகையீட்டின் தொடர்ச்சிப் பண்பால் C எனும் வரைக்கு அருகில் உள்ள புள்ளிகளிலும் C எனும் வரையின் y'-ன் மதிப்புக்கு அருகில் உள்ள y'-க்களுக்கும் குறிமாருதிருக்கிறது. இவ்வாறு எளிய மீச்சிறுமத்தைத் ஆராயும் போது, $E \geqslant 0$ எனும் நியதிக்குப்பதிலாக எல்லயவரை போல் Cயில் $F_{y'y'} < 0$ எனக் கொள்ளலாம். எளிய மீப்பெருமம் பார்க்கும் போது $E \leqslant 0$ என்பதற்குப் பதிலாக C எனும் வரையில் $F_{y'y'} < 0$

என்பதைக் கொள்ளலாம். $F_{y'y'} > 0$ (அல்லது $F_{y'y'} < 0$) என்பது லெஜண்டர் (Legendre)* நியதி எனப்படும்.

வலிய மீச்சிறுமம் பார்க்கும்போது $E \geqslant 0$ என்பதற்குப் பதிலாக q-ன் எந்த மதிப்புக்கும் C எனும் வரையின் புள்ளிகளுக்கு அருகில் (x, y) எனும் மதிப்புக்கு $F_{y'y'}(x, y, q) \geqslant 0$ என்பதைக் கொள்ளவும். இங்கு டெயிலர் விரிவு,

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

என்பது எந்த y'-க்கும் பொருந்தும். பெரிய மீப்பெருமம் பார்க்கும் போது, ராசிகளின் அதே இடைவெளியில். அதே டெயிலர் விரிவைக் கொண்டுவருவது $F_{y'y'}(x, y, q) \leqslant 0$ எனும் நியதி யாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$v[y(x)] = \int_o^a (y'^2 - y^2)\, dx$$

$$a > o; \quad y(o) = o \quad y(a) = o$$

ஆயிலர் சமன்பாடு $y'' + y = o$; இதன் பொதுத் தீர்வு $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, வரம்பு நியதியைப் பயன்படுத்த $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $a \neq k\pi$ எனில் k என்பது முழு எண்.

இவ்வாறு $a \neq k\pi$ எனும்போது, $y = 0$ என்பதன்மேல் மட்டும்) எல்லயம் வரும். $a < \pi$ என்றால் $y = C_1 \sin x$ எனும், $(0, 0)$-ஐ முனையாகவுடைய எல்லய வரைக்கற்றை மையக் களத்தை உருவாக்குகிறது. $a > \pi$ எனும்போது C–ஜேகோபி நியதி பொருந்துவதில்லை. (பக்கம் 444 பார்க்கவும்),

*$F_{y'y'} > 0$ (அல்லது $F_{y'y'} < 0$) எனும் நியதி வலிய லெஜண்டர் நியதி எனவும், $F_{y'y'} \geqslant 0$ (அல்லது $F_{y'y'} \leqslant 0$) என்பது லெஜண்டர் நியதி எனவும் கூறுவதுண்டு.

சாதாரணச் சார்பத்தின் மீச்சிறுமத்திற்குப் போதுமான நியதிகள்*

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$$

எளிய மீச்சிறுமம்	வலிய மீச்சிறுமம்	எளிய மீச்சிறுமம்	வலிய மீச்சிறுமம்	எளிய மீச்சிறுமம்	வலிய மீச்சிறுமம்
1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ 2. ஜேகோபி நியதி 3. $F_{y'y'} > 0$ காணும் எல்லய வரை மீது.	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ 2. ஜேகோபி நியதி 3. $F_{y'y'}(x, y, y') \geqslant 0$. தரப்பட்டுள்ள எல்லய வரையின் புள்ளிக் கணிமையில் உள்ள (x, y)-யின் மதிப்புக்கும் ஏதேனும் y'க்கும் ஏதேனும் y'க்கு y'ஐச் சார்ந்து $F(x,y,y')$ மும்முறை வகையிடற்குரியது எனக் கருதப்படுகிறது.	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ 2. ஜேகோபி நியதி 3. $E(x,y,p,y') \geqslant 0$ தரப்பட்டுள்ள எல்லய வரை புள்ளிக் கருகில் உள்ள (x,y)க்கும் $p(x, y)$-க்கும் அருகில் உள்ள y'க்கும்,	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ 2. ஜேகோபி நியதி. 3. $E(x,y,p,y') \geqslant 0$ ஏதேனும் y'க்கும் தரப்பட்டுள்ள எல்லய வரை புள்ளிக் கருகில் உள்ள (x,y)க்கும்,	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ 2. தரப்பட்டுள்ள எல்லய வரையுட்பட ஒரு எல்லைய வரைக் களம். 3. $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ தரப்பட்டுள்ள எல்லய வரைப் புள்ளிக் கருகில் உள்ள (x, y)க்கு $p(x, y)$-க்கு அருகில் உள்ள y'க்கும்.	1. $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ 2. தரப்பட்டுள்ள எல்லய வரையுட்பட ஒரு எல்லைய வரைக் களம். 3. $E(x, y, p, y') \geqslant 0$ தரப்பட்டுள்ள எல்லைய வரை புள்ளிக் கருகில் உள்ள (x,y)க்கும் ஏதேனும் y'க்கும்.

*மீப்பெருமத்திற்குள்ள நியதிகளை மேற்கூறிய சமனின்மைகளை எதிராகக் கொள்ளவும்.

தொகைகாண் சார்பு y'ன் எந்த மதிப்புக்கும் y' -ஐச் சார்ந்து மும்முறை வகையிடற்குரியதானதாலும் $F_{y'y'} = 2 > 0$ (y'ன் எந்த மதிப்புக்கும்) ஆனதாலும் $y = 0$ எனும் கோட்டின் மீது $a < \pi$ என்றால் பெரிய மீச்சிறுமம் ஏற்படுகிறது. 450 பக்கத்துக் குறிப்பைப் பின்பற்ற $a > \pi$ எனும்போது $y = 0$ எனும் கோட்டில் மீச்சிறுமம் ஏற்படுவதில்லை,

எடுத்துக்காட்டு 4:

$$v\,[y\,(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

$$y\,(0) = 0,\; y\,(x_1) = y_1.$$

[பக்கம் 378-379-ல் விரைவு வளைவரைப் பிரச்சினையைப் பார்க்கவும்]. எல்லய வரைகள் உருள் வரைகளாகும்.

$$x = C_1\,(t - \sin t) + C_2,$$

$$y = C_1\,(1 - \cos t).$$

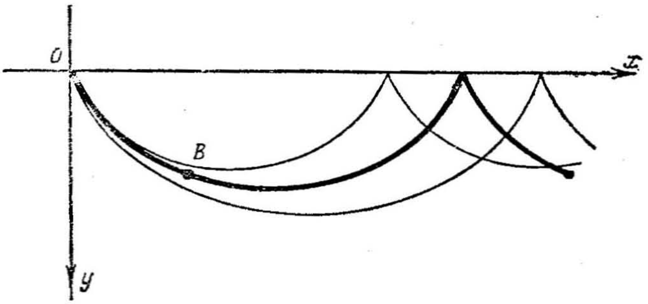
(o, o)-ஐ முனையாகக் கொண்ட உருள்வரைக் கற்றை

$$x = C_1\,(t - \sin t)$$

$y = C_1\,(1 - \cos t)$, ஒரு மையக் களத்தை ஏற்படுத்துகிறது. இதில்,

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t).$$

எனும் எல்லய வரையும் உட்படும். $x_1 < 2\pi a$ எனின் உருள் வரை இரண்டாவது வரம்புப் புள்ளி $B\,(x_1 . y_1)$ வழிச் செல்ல வேண்டும் எனும் நியதியிலிருந்து 'a'-ன் மதிப்பை அடைகிறோம். (படம் 8.12)



படம் 8-12.

நாம் அடைவது

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\ \sqrt{1+y'^2}} \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)^{3/2}} > 0.$$

(y' என்னவானாலும் சரி). ஆகவே $x_1 < 2\pi a$ என்றால் உருள் வரை $x = a\ (t - \sin t)$ $y = a\ (1 - \cos t)$-ன் மீது வலிய மீச்சிறுமம் அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$v\,[y\,(x)] = \int_0^a y'^3 dx,\ y\,(o) = o,\ y\,(a) = b,\ a > o,\ b > o$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயத்தை ஆராயவும். இந்தக் கணக்கின் தீர்வை 454-ம் பக்கத்தில் கண்டோம், இங்கு எளிய மீச்சிறும ஆராய்ச்சியை இன்னும் இலகுவாக்குவோம்.

எல்லய வரைகள் நேர்கோடுகள் $y = Cx$ எனும் கற்றை $y = \frac{b}{a} x$ எனும் எல்லய வரையை உட்கொண்ட மையக் களமாகும்; $y = \frac{b}{a} x$ எனும் எல்லயவரையில் இரண்டாவது வகையீடு $F_{y'y'} = 6y' = 6\frac{b}{a} > 0$. ஆகவே $y = \frac{b}{a} x$ எனும் நேர்கோட்டின்மேல் எளிய மீச்சிறுமம் அமைகிறது. y'-ன் ஏதேனும் மதிப்பிற்கு இரண்டாவது வகையீடு $F_{y'y'} = 6y'$ குறி மாறுகிறது. ஆகவே முன்கூறியுள்ள வலிய மீச்சிறும நியதிகள் பொருந்துவதில்லை. ஆனால் இதிலிருந்து வலிய எல்லயம் அமைவதில்லை எனக் கூறமுடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$v\,[y\,(x)] = \int_0^a \frac{y}{y'^2}\,dx,\ y(0) = 1$$

$$y\,(a) = b,\quad a > 0,\quad 0 < b < 1.$$

ஆயிலர் சமன்பாட்டின் முதல் நுண்தொகைத் தீர்வு [பக்கம் 374, 5-வது வகை காண்க],

$$\frac{y}{y'^2} + y'\frac{2y}{y'^3} = C,\ y'^2 = 4C_1 y.$$

மூலங்கண்டு, ராசி பிரித்து நுண்தொகை காண நாம் அடைவது $y = (C_1x + C_2)^2$. இது பரவளையத் தொகுதி $y(0) = 1$ எனும் நியதியால் $C_2 = 1$.

$y = (C_1x + 1)^2$ எனும் பரவளையக்கற்றை—இதன் முனை $A(0, 1)$, $y = 0$ எனும் C தன்மை காட்டியையுடையது. (படம் 8.13), $B(a, b)$ வழி கற்றையின் இருபரவளையங்கள் செல்கின்றன. ஒன்றின் வில் AB-யில் (L_1) A^* எனும் புள்ளி அமைகிறது. இது A-இன் துணையியப் புள்ளியாகும். மற்றதில் (L_2) துணையியப் புள்ளி இல்லை. ஆகவே L_2-வில் ஜேகோபி நியதி பொருந்துகிறது. இந்தவில்லை எல்லயம் அமையும். நாம் கொண்டுள்ள எல்லயவரையின் அணிமையில் $F_{y'y'} = \dfrac{6y}{y'^4} > 0$. y'-ன் மதிப்பு ஏதாயினும், இருந்தாலும் இதன் காரணமாக, L_2 எனும் வில்லில் வலிய மீச்சிறுமம் வரும் என உறுதி கூற இயலாது. ஏனெனில் $F(x, y, y') = \dfrac{y}{y'^2}$ எனும் சார்பலனை

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)\, F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2!}\, F_{y'y'}(x, y, q)$$

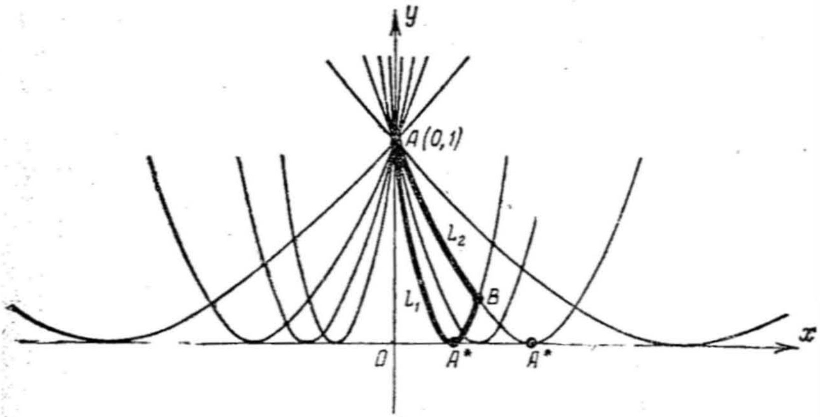
எனும் வடிவில் y'-ன் ஏதேனும் மதிப்புக்குக் கூற இயலாது. ஏனெனில் $y' = 0$ எனும்போது $F(x, y, y')$ எனும் சார்பலனின் தொடர்ச்சி அறுபடுகிறது, L_2 எனும் வில்லில் எளிய மீச்சிறுமம் ஏற்படுகிறது என்று மட்டுமே சொல்லலாம். ஏனெனில் L_2 எனும் வரைக்கு களத்தின் சரிவுக்கு அருகில் உள்ள y'-ன் மதிப்புக்கு $F(x, y, y')$ எனும் சார்பலனுக்கு டெயிலர் விரிவு காண முடியும். இந்தச் சார்பலனின் எல்லையத்தை விரிவாக ஆராயவேண்டுமானால், $E(x, y, p, y')$ எனும் சார்பலனைக் கவனிக்கவும்.

$$E(x, y, p, y') = \frac{y}{y'^2} - \frac{y}{p^2} + \frac{2y}{p^3}(y' - p)$$

$$= \frac{y(y' - p)^2(2y' + p)}{y'^2 p^3}$$

$(2y' + p)$ எனும் காரணி y'-ன் ஏதேனும் மதிப்புக்குத் தன் குறியை மாற்றிக்கொள்வதால், பக்கம் 454-455-ல் உள்ள குறிப்பின் அடிப்படையில் L_2 எனும் வில்லில் வலிய மீச்சிறுமம் இல்லை எனக் கூறலாம்.

முன்னர் கூறிய தேற்றத்தை அதிக மாற்றம் இல்லாமல் கீழ் வரும் சார்பரங்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம்.



படம் 8-13

$$v[y_1, y_2, \ldots y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2 \ldots y_n, y'_1, y'_2 \ldots y'_n)\, dx.$$

$$y_i(x_0) = y_{i_0},\ y_i(x_1) = y_{i1}\ (i = 1, 2, \ldots n)$$

E-ன் வடிவம்

$$E = F(x, y_1, y_2 \ldots y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n) - F(x, y_1, y_2, \ldots y_n, p_1, p_2, \ldots p_n) - \sum_{i=1}^{n} (y'_i - p_i) F_p(x, y_1, y_2, \ldots y_n, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

இங்கு p_1 எனும் சார்பலன்கள் களத்தின் சரிவுகளைக் குறிக்கும். களம் சில கட்டுக்குட்பட்டது. [இத்தகைய கட்டுக் குட்பட்ட களம் தனிக்களம் எனப்படும்].

லெஜண்டர் நியதி $F_{y'y'} > 0$-க்குப் பதிலாகக் கீழ்வரும் நியதியைக் கொள்கிறோம்.

$$F_{y'_1y'_1} > 0 \quad \begin{vmatrix} F_{y'_1y'_1} & F_{y'_1y'_2} \\ F_{y'_2y'_1} & F_{y'_2y'_2} \end{vmatrix} > 0 \ldots$$

$$\begin{vmatrix} F_{y'_1y'_1} & F_{y'_1y'_2} & \cdots & F_{y'_1y'_n} \\ F_{y'_2y'_1} & F_{y'_2y'_2} & \cdots & F_{y'_2y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{y'_ny'_1} & F_{y'_ny'_2} & \cdots & F_{y'_ny'_n} \end{vmatrix} > 0$$

சாதாரண பிரச்சினைகளிலும் சிக்கலான கணக்குகளிலும் எளிய மீச்சிறுமத்திற்குள்ள போதுமான நியதிகளை வேறு முறையில், இரண்டாவது மாறுபாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு காணலாம்.

சாதாரண பிரச்சினையில் உள்ள மாறுதல் சார்பலன் டெயிலர் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்வருமாறு மாற்றுவோம்.

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y\, \delta y + F_{y'}\, \delta y')\, dx +$$

$$\tfrac{1}{2} \int_{x^0}^{x_1} [F_{yy}\, \delta y^2 + 2\ F_{yy}\, \delta y\, \delta y' + F_{y'y'}\, \delta y'^2]\, dx + R.$$

இங்கு R-ன் அடிக்கு $\delta y, \delta y'$-ல் இரண்டிற்கு மேற்பட்டது. எளிய மீச்சிறுமத்தைப் பார்க்கும்போது δy-யும் $\delta y'$-ம் போதுமான அளவுக்குச் சிறியவையாகும். இந்த இடத்தில் Δv-ன் குறியை, வலப் பக்கத்தில் உள்ள $\delta y, \delta y'$ - இன் மிகக் குறைந்த அடுக்கு கொண்ட உறுப்பின் குறியாகும். எல்லய வரையில் முதல் மாறுபாடு

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\, \delta y + F y'\, \delta\, y')\, dx = 0.$$

ஆகவே Δv-யின் குறி பொதுவாகக் கூறுமிடத்து

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{yy}\, \delta y^2 + 2\ F_{yy}\, \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2)\, dx$$

எனும் இரண்டாவது மாறுபாட்டின் குறியாகும்.

இரண்டாவது மாறுபாட்டின் குறி மாருதிருக்கச் செய்வது லெஜண்டர் நியதியும், ஜேகோபியின் நியதியும் ஆகும். ஆகவே இது எளிய மீச்சிறுமம் ஆராயும் கணக்கில் வரும் மாறுபாடு Δv-ன் குறி மாருதிருப்பதற்கும் பொருந்தும்.

ஏன், கீழ்வரும் நுண்தொகையைக் கவனிக்க:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\,\delta y^2 + 2\omega(x)\,\delta y\,\delta y']\,dx. \qquad \ldots \quad (8.2)$$

$\omega'(x)$ என்பது வகையிடற்குரிய இச்சைக் கேற்பக்கொள்ளும் சார்பலன். இந்த நுண்தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega(x)\,\delta y^2 + 2\omega(x)\,\delta y\,\delta y']\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} d(\omega\,\delta y^2)\,dx = [\omega(x)\,\delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

(ஏனெனில் $\delta y\Big|_{x_0} = \delta y\Big|_{x_1} = 0$).

இரண்டாவது மாறுபாட்டுடன் (8.2)-ல் உள்ள நுண் தொகையைச் சேர்க்க, நாம் அடைவது.

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} [(F_{yy} + \omega')\,\delta y^2 + 2(F_{yy'} + \omega)\,\delta y\,\delta y' + F_{y'y'}\,\delta y'^2]\,dx.$$

தொகைகாண் சார்பலன், ஒரு காரணி நீங்கலாக மற்றபடி நெருக்கமாக இருக்கும்படி $\omega(x)$-ஐத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

அப்போது,

$$F_{y'y'}(\omega' - F_{yy}) - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

எனும்படி $\omega(x)$ இருக்கவேண்டும். அத்தகைய $\omega(x)$-ஐக் கொண்டால் இரண்டாவது மாறுபாடு

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'}\left(\delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}}\,\delta y\right)^2 dx.$$

ஆகவே, இரண்டாவது மாறுபாட்டின் குறியும் $F_{y'y'}$ குறியும் ஒன்றே. ஆனால், இந்த மாற்றம் சாத்தியமாக

$$F_{y'y'}\,(\omega' + F_{yy}) - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

எனும் சமன்பாடு (x_0, x_1) இடைவெளியில் வகையிடற்குரிய தீர்வு $\omega\,(x)$-ஐ உடையதாக வேண்டும்.

இதனைப் புதிய ராசிகளுக்கு மாற்றம் செய்ய, புதிய அறியப் படாத சார்பலன் u ஆக

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'}\frac{u'}{u}$$ எனப் பிரதியிடவும்.

அப்போது

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}\,u') = 0,$$

இது ஜேகோபியின் சார்பலன் ஆகும். (பக்கம் 450-ஐப் பார்க்கவும்)

$x_0 < x < x_1$ எனும் இடைவெளியில் இந்தச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு இருக்குமானால், அதாவது ஜேகோபி நியதி பொருந்துமானால் அப்போது x-ன் அதே மதிப்பிற்கு,

$$F_{y'y'}\,(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கு $\omega\,(x) = -F_{yy} - F_{y'y'}\dfrac{u'}{u}$ என்னும் தொடர்ச்சியுடையதும் வகையிடற்குரியதுமான தீர்வு உள்ளது. இவ்வாறு லெஜண்டர், ஜேகோபி நியதிகள் இரண்டாவது மாறுபாட்டின் குறி மாறாது என உறுதி கூறுகின்றன. ஆகவே, அவை எளிய மீச்சிறுமத்திற்கு $(F_{y'y'} > 0)$ அல்லது மீப்பெருமத்திற்கு $(F_{y'y'} < 0)$ போதுமான நியதிகளாகும்.

3. ஆய்லர் சமன்பாடுகளை நியமன உருவத்திற்கு மாற்றுதல்

n ஆய்லர் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை (பக்கம் 381) அதாவது,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)\text{-ஐ} \qquad \ldots \quad (8.3)$$

$2n$ முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளாகக் கூறமுடியும். (8·3)-ல்

$$F_{y'_k} = q_k\;(k = 1, 2, \ldots n), \qquad \ldots \quad (8{\cdot}4)$$

எனப் பிரதியிட

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \dots n) \qquad \dots \quad (8\cdot5)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$$\frac{D\,(F_{y'_1}, F_{y'_2}, \dots, F_{y'_m})}{D\,(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} \neq 0$$

எனக் கொள்வதால், (8·4)-ல் உள்ள சமன்பாடுகளை y'_k-க்குத் தீர்க்கமுடியும். அப்போது

$$y'_k = \omega_k\,(x, y_s, q_s). \qquad \dots \quad (8.6)$$

இங்கு,

$\omega_k\,(x, y_s, q_s) = \omega_k\,(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$ (8·6)-ஐ (8·5)-ல் ஈடுசெய்க. இப்போது $2n$ எண்ணிக்கையுள்ள

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_k}{dx}\ &\omega_k\,(x, y_s, q_s), \\ \frac{dq_k}{dx} &= \left[\frac{\partial F}{\partial y_k}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad \dots \quad (8.7)$$

என்ற சாதாரண உருவில் உள்ள முதல்-வரிசைச் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம். இங்கும், இனி வருவனவற்றிலும் { } என்ற அடைப்பு, y'_k-க்குப் பதில் $\omega_k\,(x. y_s, q_s)$-ஐ ஈடு செய்துள்ளோம் என்பதைக் குறிக்கும்.

$$H\,(x, y_s, q_s) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,q_i - \{F\}$$

என்ற சார்பின் துணைகொண்டு, (8-7)-ல் உள்ள தொகுப்பை

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_k}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_k}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y_k} \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \qquad \dots \quad (8\cdot8)$$

என்ற நியமன உருவில் காண்கிறோம்.

$F\,(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ என்ற சார்பு x-ஐ வெளிப்படையாகச் சார்ந்திருக்கவில்லை எனில், (8·8)-க்கு முதல் தொகையாக $H = C$ என இருக்கும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. உண்மையில் இங்கு,

$$H = \sum_{i=1}^{n} \omega_i q_i - \{F\}\text{-ம்.}$$

x-ஐ வெளிப்படையாகச் சார்ந்திருக்கவில்லை. ஆதலால்,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dx}.$$

(8·8)-ஐப் பயன்படுத்த, (8·8)-ன் தொகை வளைவரைகள் மீது,

$$\frac{dH}{dx} = 0, \quad H = C.$$

எனப் பெறுகிறோம்.

பக்கம் 378-ல், எளிய தீர்வமைக்கு முதல் தொகை ஏற்கெனவே காணப்பட்டதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஆற்றல் காப்பு விதி

T என்பது துகள்களின் இயக்க ஆற்றல் என்றும், U என்பது அத் தொகுப்பின் நிலை ஆற்றல் என்றும் கொள்வோம் (பக்கம் 402, எடுத்துக்காட்டு–1) சார்பரம்,

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt,\ T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\text{-க்குச்}$$

சார்பு,

$$H = \sum_{i=1}^{n} \omega_i q_i - \{F\}$$

என்பது

$$H = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - (T - U) = T + U$$

ஆகும். இது துகள் தொகுப்பின் முழு ஆற்றல் ஆகும்.

அடிப்படை மாறுபடு கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துவோம். நிலை ஆற்றல் U, t-ஐ நேரிடையாகச் சார்ந்திராவிடில், அதாவது துகள் தொகுப்பு காப்புநிலைத் தொகுதி எனில்,

$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ சார்பரத்திற்கான ஆய்லர் சமன்பாடு முதல் தொகையாக $H=C$, $T+U=C$-ஐக் கொண்டது.

இவ்வாறு ஒரு காப்புநிலைத் தொகுதியில், தொகுதியின் இயக்கத்தின்போது, மொத்த ஆற்றல் காக்கப்படுகிறது.

(8.8)-ல் உள்ள நியமன உருவத்தின் தொகை காண்பதும்,

$$H\left(x, y_s, \frac{\partial v}{\partial y_s}\right)$$

$$= H\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right).$$

எனக்கொண்ட பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial v}{\partial x} + H\left(x, y_s \frac{\partial v}{\partial y_s}\right) = 0\text{-ன்} \quad \ldots \quad (8\cdot 9)$$

தொகை காண்பதும் ஒன்றேயாகும். சமன்பாடு (8.9)-ஐ ஆமில்டன் ஜேகோபி சமன்பாடு என்கிறோம்.

அதன் ஒரு துணை அலகு குடும்பத் தீர்வுகள் $v(x, y_s, \alpha)$ காணமுடியுமெனில், (8.8)-ன் முதல் தொகையான $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$ காணமுடியும், β யாதோ ஒரு மாறிலி. பார்க்கப்போனல்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial \alpha} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad \ldots \quad (8\cdot 10)$$

$$\frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{\partial \alpha} \equiv -H\left(x, y_s, \frac{\partial v(x, y_s, \alpha)}{\partial y_s}\right)$$

என்ற முற்றொருமையை α-ஐப் பற்றி வகைப்படுத்த,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \alpha} \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y_s \partial \alpha} \quad \ldots \quad (8\cdot 11)$$

(8.11)-ஐ (8.10)-ல் ஈடு செய்ய, (8.10)-ன் வலப்புறமுள்ளது பூச்சியமாகின்றது. இவ்வாறு,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) = 0.$$

எனவே, $$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta.$$

இவ்வாறு ஆமில்டன்-ஜேகோபியின் சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு

$$v = v\,(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots, y_n,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots, \alpha_n)$$

அறிந்திருப்போமெனில், (8.8) தொகுதியின் n முதல் தொகைகளையும் அறிவோம்.

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n). \qquad \ldots \quad (8.12)$$

(8.12) தொகுதியின் ஜேகோபியின் பூச்சியமில்லாதது எனில்,

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_i\ \partial \alpha_i} \right| = 0.$$

இப்போது (8.12) தொகுதி, y_i-க்களை ஏனைய சார்புமாறிகளின் சார்பாக வரையறுக்கின்றது.

$$y_i = y_i\,(x,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots, \alpha_n,\, \beta_1,\, \beta_2, \ldots, \beta_n) \qquad \ldots \quad (8.13)$$
$$(i = 1,\, 2,\, \ldots, n).$$

இவ்வாறாக ஒரு $2n$-துணை அலகு எல்லயவரைக் குடும்பம் கிடைக்கப் பெறுகிறோம். ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் பொதுத்தீர்வு (8 13) என்னும் சார்புகள்

$$y_i\,(x,\, \alpha_1,\, \ldots, \alpha_n,\, \beta_1,\, \ldots\ldots, \beta_n)\text{-களும்}$$

$$q_i = \frac{\partial v\,(x,\, y_s,\, \alpha_s)}{\partial y_i} \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)\text{-களும்}$$

(8.8) தொகுதியின் பொதுத்தீர்வு என்றும் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

வளைவரையின் நீளத்தின் உறுப்பு,

$$ds^2 = [\phi_1\,(x) + \phi_2\,(y)\,]\,(dx^2 + dy^2)$$

ஆக உள்ள மேற்பரப்பில், புவிக் குறைத்தொலைவு வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அதாவது,

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{[\phi_1(x) + \phi_2(y)](1+y'^2)}\, dx$$ ஆக உள்ள சார்

பரத்தின் எல்லைய வரைகள் காண்க.

$$H = \frac{\sqrt{\phi_1(x) + \phi_2(y)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\phi_1(x)+\phi_2(y)}\sqrt{1 - q^2}$$

$$q = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad H^2 + q^2 = \phi_1(x) + \phi_2(y).$$

ஆதலால், ஆமில்டன்-ஜேகோபி சமன்பாட்டின் அமைப்பு,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

அல்லது,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \phi_1(x) = \phi_2(y) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

ஆகும்.

இம் மாதிரியான சமன்பாடுகளில் (மாறிகள் பிரித்த சமன் பாடுகளில்),

$$\Phi_1\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \Phi_2\left(y, \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

முதல் தொகையை எளிதில் காணலாம்.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \phi_1(x) = \alpha, \quad \phi_2(y) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \alpha.$$

என ஈடுசெய்ய, அதாவது,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\phi_1(x) + \alpha}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\phi_2(y) - \alpha}$$

என ஈடு செய்ய,

$$v = \int \sqrt{\phi_1(x) + \alpha}\, dx + \int \sqrt{\phi_2(y) - \alpha}\, dy$$

எனக் காண்கிறோம்.

எனவே இங்குப் புவிக்குறைத் தொலைவு வரைகளின் சமன்பாடு $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \beta$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\phi_1(x) + \alpha}} - \int \frac{dy}{\sqrt{\phi_2(y) - \alpha}} = \beta$$

என்ற அமைப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

குறிப்பு : ஆமில்டன்-ஜேகோபி சமன்பாட்டை வேறொரு முறையிலும் அணுகலாம். சார்பரம்

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx\text{-க்கு}$$

$A(x_0, y_0)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட, எல்லயவரைகளின் மையக்களம் ஒன்றை எடுத்துக் கொள்க. இக் களத்தைச் சேர்ந்த எல்லய வரைகள் மீது, சார்பரம் $v[y(x)]$ என்பது, இரண்டாவது வரம்புப் புள்ளி $B(x, y)$-ன் ஆயக்கூறுகளிலான சார்பு $v(x, y)$ என்றாகும். பக்கம் 469-ல் குறிப்பிட்டுள்ளபடி,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -H(x, y, q), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q.$$

q-ன் நீக்கற்பலன் காண,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -H\left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, $v(x, y)$ என்ற சார்பு ஆமில்டன்-ஜேகோபி சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx$$

என்ற சார்பரத்திற்கும் இவ்வாறான முறையையே கையாளலாம்

அத்தியாயம் 8

பயிற்சிக் கணக்குகள்

கீழ்க்காணும் சார்பரங்களுக்கு எல்லயங்கள் உண்டா எனக் காண்க :

1. $v[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2)\,dx;\ y(0) = 1;\ y(2)=0.$

2. $v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx;\ \alpha > 0,$
$y(0) = 0,\ y(\alpha) = 0.$

3. $v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1+x^2y')dx;\ y(-1) = 1;\ y(2) = 4.$

4. $v[y(x)] = \int_1^2 y'(1+x^2y')dx;\ y(1) = 3;\ y(2)=5.$

5. $v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2y')dx;\ y(-1) = y(2)=1.$

6. $v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y)dx;\ y(0) = -1;$
$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

7. $v[y(x)] = \int_1^2 (x^2y'^2+12y^2)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8.$

8. $v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})dx;\ y(0) = \frac{1}{3};$
$y(1)= \frac{1}{3}e^2.$

9. $$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x)dx\,;\ y(0)=0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

10. $$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'};\ y(0)=0;\ y(x_1)=y_1;\ x_1>0;\ y_1>0.$$

11. $$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2};\ y(0)=0;\ y(x_1)=y_1;\ x_1>0;\ y_1>0.$$

12. $$v[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx\,;\ y(1) = 1,\ y(2) = 4.$$

13. $$v[y(x)] = \int_1^3 (12xy+y'^2)dx;\ y(1)=0;\ \ y(3)=26.$$

14. $$v[y(x)] = \int_0^2 [y^2+(y')^2-2xy]dx;\ y(0)=0;\ y(2)=3.$$

9. நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயம் கொண்ட தீர்வமைவுகள்

1. $\phi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ என்ற அமைப்பையுடைய கட்டுப்பாடுகள்

நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயம் கொண்ட மாறுபடு தீர்வமைவுகளிலும் சார்பரம் v-ன் எல் லயம் காணவேண்டிய தீர்வமைவுகளே, v சார்ந்திருக்கும் சார்பரங்கள் மீது சில நிபந்தனைகள் விதிக்கப்பட்டிருக்கும். உதாரணமாக

$$\phi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m; m, < n)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n)\, dx$$

என்ற சார்பரத்தின் எல்லயம் காண்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, ... m; m < n)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுடன் கூடிய

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

என்ற சார்பின் எல்லயம் காணும் முறையை நினைவுகூர்வோம். இதன் தீர்வு காண, இயல்பாக

$$\phi_i(x_1, x_2, ... x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, ... m)$$

என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வுகளை முதலில் காண்போம்; இச்சமன்பாடுகளை $x_1, x_2, ... x_m$ என்ற m மாறிகளைப் பொருத்துச் சாராதவை என்கிறோம் :

$$x_1 = x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n);$$
$$x_2 = x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n);$$
$$. . . . . , . .$$
$$x_m = x_m(x_{m+1}\ \ x_{m+2}, ..., x_n),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m$-க்கு $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ல் பிரதியீடு செய்ய $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்ற சார்பு. $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ எனும் $(n-m)$ ஒன்றையொன்று சாராமாறிகளைச் சார்ந்த $\phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$ என்ற சார்பாகும். எனவே இப்போது தீர்வமைவு, நிபந்தனையற்ற ஒரு சார்பு ϕ-ன் எல்லயம் காணவேண்டியதாக ஆகின்றது. மேலே கூறப்பட்ட மாறுபடு தீர்வமைவுக்கும் இம்முறையையே பின்பற்றலாம். தொகுப்பு $\phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$-ஐ $y_1, y_2, \ldots, y_m$-க்கோ (அல்லது வேறு ஏதாவது m சார்புகள் y_i-க்கோ) தீர்வு கண்டு கிடைக்கும் கோவைகளை $v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$-ல் பிரதியீடு செய்ய, $(n-m)$ சாராமாறிகளைச் சார்ந்த $\omega[y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n]$ என்ற சார்பரம் கிடைக்கும். எனவே, அத்தியாயம் 6, பகுதி 8-ல் கூறப்பட்ட முறைகளைச் சார்பரம் ω-ன் எல்லயம் காணப் பயன்படுத்தலாம். எனினும், பொதுவாகத் 'தேரக் குணக முறை' எனப்படும் எல்லா மாறிகளையும் சமமாகப் பாவிக்கும் வேறொரு முறையே சார்புகளுக்கும், சார்பரங்களுக்கும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

ஒரு சார்பு $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-க்கு, $\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுடன் கூடிய எல்லயம் காண, λ_i ஏதோ குறிப்பிட்ட மாறிலிகளான,

$$Z^* = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i$$

என்ற துணைச் சமன்பாட்டை உண்டாக்கி, சார்பு Z^*-க்குக் கட்டுப்பாடற்ற எல்லயம் காண்கிறோம். அதாவது முதலில் $\frac{\partial z^*}{\partial x_j} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பை முதலில் உருவாக்குகிறோம். இதுவும் $\phi_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ என்ற நிபந்தனைகளுமாகச் சேர்ந்து, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ என்ற $(n+m)$ அளவுகளின் மதிப்பையும் கொடுக்கின்றன. இதுபோலவே கட்டுப்பாட்டுடன் கூடிய சார்பரத்திற்கும் எல்லயம் காண முயலலாம்.

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx.$$

சார்பரம் ;

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

நிபந்தனைகள் எனில்,

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x) \phi_i$$

எனக் கொண்டு,

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x) \phi_i \right) dx, \quad v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* \, dx$$

என்ற சார்பரத்தை உருவாக்குகிறோம்; இது இப்போது நிபந்தனையற்ற சார்பரம் எனக்கொண்டு எல்லயம் காண்போம்; அதாவது

$$\left.\begin{array}{l} F^*_{y_j} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{என்ற ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு,} \\ \text{கட்டுப்பாடு நிபந்தனைகள்} \\ \phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}\right\} \ldots \quad (9.1)$$

கூடச் சேர்ந்து தீர்வுகள் காண்கிறோம். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து இந்த $(m + n)$ சமன்பாடுகளில் இருந்து, நமக்குத் தெரியாத $y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ என்ற $(m + n)$ சார்புகளையும் காணலாம்; மேலும்கட்டுப்பாட்டு நிபந்தனைகளுக்கு முரண்பாடற்ற $y_j(x_0) = y_{j0}, y_j(x_1) = y_{j1}$ என்ற வரம்பு நிபந்தனைகளில் இருந்து சமன்பாட்டில் காணப்படும் $2n$ எண்ணிக்கையுள்ள மாறிலிகளையும் காணலாம். இவ்வாறு காணப்படும் வளைவரைகள்மீது பெருமத்தையோ, சிறுமத்தையோ v^* அடையும்; இவ் வளைவரைகள் முன்னர்க் கூறப்பட்ட மாறுபடு தீர்வமைவுக்கும் ஏற்ற தீர்வுகள் ஆகும்.

பார்க்கப்போனால், (9.1) தொகுப்பில் இருந்து காணக் கிடைக்கும்.

$$\lambda_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad y_j (j = 1, 2, \ldots, n)$$

என்ற சார்புகளுக்கு, எல்லா $\phi_i = 0$; எனவே $v^* = v$, $y_j = y_j(x)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ என்று (9.1)-ல் இருந்து கிடைக்கும் தொகுப்புக்கு, v^* என்ற சார்பரத்திற்குக் கட்டுப்பாடற்ற எல்லயம் கிடைக்கும் எனில் — அதாவது (கட்டுப்பாட்டு நிபந்தனையைச் சரி செய்யும் அல்லது சரி செய்யாத) அருகில் உள்ள எல்லா வளைவரைகளையும் பொறுத்து எல்லயம் எய்தப்படும் எனில்

குறிப்பாக, நிபந்தனைச் சமன்பாடுகளைச் சரிசெய்யும் குறுகிய இன வளைவரைக் குழாமைப் பொறுத்தும் எல்லயம் எய்தப்பெறும்.

எனினும், இதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாட்டுக் குட்பட்ட எல்லயத் தீர்வமைவின் எல்லாத் தீர்வுகளும், v^* என்ற சார்பரத்திற்குக் கட்டுப்பாடற்ற நிலையில் தீர்வுகள் என முடிவு கட்டக்கூடாது; எல்லாத் தீர்வுகளையும் இம்முறையில் பெற இயலுமா எனவும் திட்டமாகக் கூறமுடியாது. இதைவிடச் சிறிது தளர்வான நிலையையுடைய ஒரு தேற்றத்தைக் காண்போம்.

தேற்றம் :

$$\phi_i (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m; m < n)$$

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx$$

எனும் சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்தும் சார்புகள் $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — பொருத்தமான $\lambda_i (x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ எனும் சினைகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது—சார்பரத்திற்கான ஆய்லர் சமன்பாடுகள்,

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x)\, \phi_i \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} F^*\, dx\text{-ன்}$$

தீர்வுகளாகும். $\lambda_i (x), y_i (x)$ என்ற சார்புகள் ஆய்லர் சமன்பாடுகளில் இருந்து,

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

கணக்கிடப்படுகின்றன.

சார்பரத்தின் சார்புமாறிகளாக $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ஓடு கூட $\lambda_1 (x)$, $\lambda_2 (x), \ldots, \lambda_m (x)$ இவற்றையும் கொண்டால், சமன்பாடுகள் $\phi_i = 0$-க்களைச் சார்பரம் v^*-க்கும் ஆய்லர் சமன்பாடுகளாகக் கொள்ளலாம். சமன்பாடுகள் $\phi_i (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ இவற்றை ஒன்றையொன்று சாராதவை எனக் கொள்கிறோம்; அதாவது m வரிசையுள்ள ஜேகோபியன்களில் ஒன்று பூச்சியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0$$

நிரூபணம் : கொடுக்கப்பட்டுள்ளதில், எல்லயத்திற்கான அடிப்படை நிபந்தனை $\delta v = 0$.

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (F_{y_j} \, \delta y_j + F_{y'_j} \, \delta y'_j) dx = 0$$

என்ற அமைப்பைக் கொள்ளும்.

ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் இரண்டாவதாக உள்ளதன் பகுதிப் படுத்திய தொகை கண்டு, $(\delta y_i)' = \delta y'_j$, $(\delta y_j)_{x=x_0} = 0$; $(\delta y_j)_{x=x_1} = 0$ எனவும் கொண்டு,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j \, \delta x = 0$$

எனப் பெறுகிறோம். சார்புகள் $y_1, y_2, \ldots, y_n)$ என்பன

$$\phi_i (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

என்ற ஒன்றையொன்று சாராத m கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டதால் δy_j எனும் மாறல்கள் யாதோவொன்றாகாது; எனவே, இப்போது அடிப்படைத் துணைத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது. கட்டுப்பாட்டுச் சமன்பாடுகள் $\phi_j = 0$-ஐ மாற்றி அமைத்துக் கிடைக்கும்,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)^*$$

---

*இன்னமும் திட்டமாகக் கூற :

$$\phi_i (x, y_1, + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n) = 0, \; \phi_i (x, y_1, \ldots, y_n)$$

இவற்றிடையே இடக்கைப்புறமுள்ளவற்றின் வித்தியாசம்

$$\phi_i (x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n) - \phi_i (x, y_1, \ldots, y_n)\text{-க்கு}$$

டெய்லரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_i} \delta y_j + R_i = 0$$

என எழுதலாம்; இங்கு $\delta y_i \; (j = 1, 2, \ldots, n)$ இவற்றின் முதல் வரிசையைவிட R_i உயர்ந்த வரிசையுள்ளது. எனினும் சார்பரத்தின் மாறலைக் கணக்கிடும்போது $\delta y_j \; (j=1, 2, \ldots, n)$ இவற்றின் முதல் வரிசை உறுப்புகளையே நாம் கொள்வதால் R_i உறுப்புகள் ஒன்றும் பிரமாதமான விளைவை உண்டாக்குவதில்லை.

கட்டுப்பாடுகளை மாறல்கள் δy_j சரிசெய்யவேண்டும். எனவே δy_j-ன் $(n - m)$ மாறல்களை யாதோவொன்று ஆக இருக்கும் எனக் கொள்ளலாம்; எடுத்துக்காட்டாக $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$, மற்றவை கிடைத்துள்ள சமன்பாடுகளில் இருந்து பெறக்கூடியன;

இச் சமன்பாடுகளில் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $\lambda_i(x)\,dx$. ஆல் பெருக்கி, x_0 முதல் x_1 வரை தொகைப்படுத்த,

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \delta y_j\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

ஏற்கத்தக்க மாறல்கள் δy_j- ஆல் சரி செய்யப்படும். இந்த எல்லா m சமன்பாடுகளையும் உறுப்புவாரியாக

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx = 0,$$

என்ற சமன்பாட்டோடு கூட்ட,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda i\,(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_j} \right] \delta y_j\, dx = 0$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$F^* = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i(x)\, \phi_i$$ எனக்கொள்ள, இச் சமன்பாடு

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx = 0$$

ஆகும்.

இங்கும், δy_j எனும் மாறல்கள் யாதாமொன்று இல்லையாதலால், அடிப்படைத் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது.

$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ என m சினைகளை,

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

அல்லது,

$$\frac{\partial F}{\partial_{yj}} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial_{y'j}} = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, m)$$

எனும் சமன்பாடுகளைச் சரியீடு செய்யுமாறு எடுத்துக்கொள்வோம் இச்சமன்பாடுகள்,

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0$$

என்னும் பூச்சியமில்லாத அணிக்கோவையுடைய, λ_i-ல் நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஆகும். எனவே இத் தொகுப்புக்கு

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots \lambda_m(x)$$

என்பது தீர்வாகும். இவ்வாறு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, ... $\lambda_m(x)$-க்கு, எல்லயத்திற்கு அடிப்படையான நிபந்தனை

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{yj} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0$$

என்பது

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{yj} - \frac{d}{dx} F^*_{y'j} \right) \delta y_j \, dx = 0$$

என்ற அமைப்பைப் பெறும்.

சார்பரம் v-ஐ எல்லயப்படுத்தும் $y_1, y_2 \ldots y_n$ என்ற சார்புகளுக்கு, $\delta y_j \; (j = m+1, m+2, \ldots, n)$-ஐ யாதாமொன்ருகக் கொள்ள, இச் சார்பரச் சமன்பாடு முற்றெருமையாகும்; எனவே அடிப்படைத் தேற்றத்தை இனி பயன்படுத்தலாம். ஒன்றைத் தவிர ஏனைய δy_j-க்களை பூச்சியத்திற்குச் சமம் எனக் கொண்டு, துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$F^*_{yj} - \frac{d}{dx} F^*_{y'j} = 0 \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n)$$

எனப் பெறுகிறேம். முன்னர் பெறப்பட்ட

$$F^*_{yj} - \frac{d}{dx} F^*_{y'j} = 0 \quad (j = 1, 2 \ \ldots, m)$$

என்ற சமன்பாடுகளையும் கணக்கில் கொள்ள, சார்பரம் v-ஐ நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயம் பெறச் செய்யும் சார்புகளும், $\lambda_i(x)$ என்ற சினைகளும்,

$$F^*_{yj} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைச் சரியீடு செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\phi(x, y, z) = 0$ என்ற மேற்பரப்பின் மேல் அமைந்துள்ள $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தைக் காண்க. புவிக் குறைத் தொலைவு வரை தீர்வமைவு பார்க்க : பக்கம் 348). ஒரு மேற்பரப்பின் மேல் அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையே யுள்ள தூரத்தைக் கொடுக்கும் சூத்திரம்,

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

$\phi(x, y, z) = 0$ என இருக்கும் போது, l-ன் சிறுமம் காண வேண்டும். சற்று முன்னர் குறிப்பிட்டதற்கு இணங்க, துணைச் சார்பரமாக

$$l^* = \int_{x_0}^{x_1} [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda'(x)\, \phi(x, y, z)]\, dx\text{-ஐக்}$$

கொள்கிறோம். இதற்கான ஆய்லர் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$\lambda(x)\, \phi_y - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0\,;$$

$$\lambda(x)\, \phi_z = \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0.$$

$$\phi(x, y, z) = 0$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளில் இருந்தும், $\lambda(x)$ என்ற சினையையும் தேவையான சார்புகள் $x = y(x), z = z(x)$-ஐயும் பெறுகிறோம்.

இச்சார்புகள் மீது v எனும் சார்பரம் நிபந்தனையோடு கூடிய சிறுமம் எய்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கி-ஆமில்டன் கோட்பாட்டைப் (பக்கம் 401 பயன்படுத்தி, (x_i, y_i, z_i) என்ற ஆயக்கூறுகள் கொண்டதும், விசைச் சார்பு U-உடைய விசைகள் செயல்படுமாறும் உள்ள m_i $(i = 1, 2, \dots n)$ திணிவு உடைய துகள்களின் தொகுப்பின் இயக்கச் சமன்பாட்டைக் காண்க; கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப் பாடுகள்

$$\phi_j\,(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m)$$

எனக் கொள்க.

ஆஸ்ட்ரோ கிராட்ஸ்கி-ஆமில்டன் தொகையான

$$v = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

என்பது. இங்கு

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\dot{x}^2{}_i + \dot{y}^2{}_i + \dot{z}^2{}_i) - U\right] dt$$

என்ற அமைப்பைப் பெறும்.

துணைச் சார்பரம்,

$$v^* = \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{1}{2}\sum_{i=l}^{n} m_i\,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j\,(t)\,\phi_j\right] dt.$$

v^* என்ற சார்பரத்தின், ஆய்லர் சமன்பாடுகள் இயக்கச் சமன்பாடுகள் ஆகும். அவை கீழ்க்கண்ட அமைப்புடையதாக இருக்கும்.

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i};$$

$$m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i};$$

$$m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial z_i}.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

2. $\phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1' y_2' \ldots, y'_n) = 0$ என்ற அமைப்பை உடைய கட்டுப்பாடுகள்

முந்திய பகுதியில் ஒரு சார்பரம் எல்லயம் அடைய வேண்டிய தீர்வமைவைக் கண்டோம் :

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx.$$

$$y_j(x_0) = y_{j0};\ y_j(x_1) = y_{j1}\ (j = 1, 2 \ldots, n).$$

கொடுக்கப்பட்ட முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள கட்டுப்பாடுகள்.

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \ldots \quad (9{\cdot}2)$$

இப்போது கட்டுப்பாடு சமன்பாடுகள் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எனக் கொள்வோம் :

$$\phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2 \ldots, y'_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

இயக்கவியலில், இவ்வகையான கட்டுப்பாடுகளை முற்றிணக்கம் அற்றவை (nonholonomic) என்றும், (9.2) போன்ற கட்டுப்பாடுகளை முற்றிணக்கம் உடையவை என்றும் கூறுகிறோம்.

இங்கும்,

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\phi_i,$$

எனக்கொண்டு, சார்பரம் v-க்கு நிபந்தனையுடன் கூடிய எல்லயம் சார்பரம்

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ (x \ \phi_i \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} T^* \, dx\text{-க்கு}$$

நிபந்தனையற்ற எல்லயம் காணப்படும் வளைவரைகள் மீதே அடையப்படும் என்ற சினைவிதியை நிறுவலாம்.

எனினும், முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள கட்டுப்பாடுகள் கொண்ட தீர்வமைவைவிட இதன் நிறுவல் மிகவும் சிக்கலானது.

பொருத்தமான $\lambda_i\,(x)$-களைக் கொண்டால், v எனும் சார்பரம் நிபந்தனையோடு கூடிய எல்லயம், எவ்வளைவரைகள் மீது அடையுமோ அவ்வளைவரைகளே v^* என்ற சார்பரத்தின் எல்லய வரைகளாகும் என்ற சற்றுத் தளர்வான கூற்று ஒன்றை நிறுவ வேண்டுமெனில், முந்திய பகுதியில் காணப்பட்ட நிறுவலையே தகுந்த சிறிய மாற்றத்தோடு இங்கு திருப்பிக் கூறலாம்.

m வரிசையுள்ள சார்பர அணிக் கோவைகளுள் ஒன்று சூச்சியத்தில் இருந்து மாறுபட்டது எனக் கொள்வோம். குறிப்பாக

$$\frac{D\ \ \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)}{D\ \ y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)} \neq 0.$$

எனக் கொள்வோம். கட்டுப்பாடுகளின் ஒன்றையொன்று சாராத் தன்மைக்கு இது உத்திரவாதம் அளிக்கின்றது,

$$\frac{D\,(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_m)}{D\ \ y'_1, y'_2, \ldots y'_m} \neq 0.$$

ஆதலால்,

$$\phi_i\,(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y'_1, y'_2, \ldots y'_n) = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$ இவற்றைக் காணமுடியும்.

$y'_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y'_{m+1}, y'_{m+2}, \ldots y'_n)$, $(i = 1, 2, \ldots m)$, $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n$ இவற்றை யாதோ சில கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளாகக் கொண்டால், $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்பனவற்றை இவ் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பில் இருந்து காணலாம். இவ்வாறு $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_n$ என்பன நிலையான வரம்பு மதிப்புகளுள்ள வகையிடத்தக்க யாதோ சார்புகளாகும்; எனவே இவ்வகையில் அவற்றின் மாறல்களும் யாதோவாகும்.

$y_1, y_2, \dots y_n$ என்பன, $\phi_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$ என்ற கட்டுப்பாட்டு சமன்பாடுகளைச் சரியீடு செய்யும், D அனுமதிக்கத் தக்க சார்புகளின் தொகுப்பு ஆகும்.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y'_j} \delta y'_j \quad (i = 1, 2, \dots m)^*$$

என்ற கட்டுப்பாட்டு சமன்பாடுகளை மாற்றுக.

ஒவ்வோர் சமன்பாட்டையும், உறுப்பு, உறுப்பாக (இன்னமும்) தேராத சினை $\lambda_i(x)$-ஆல் பெருக்கி, x_0 முதல் x_1 வரை தொகை காண :

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \delta y_j \, dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y'_j} \delta y'_j \, dx = 0.$$

இரண்டாவது தொகையில் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பகுதிப் படுத்தித் தொகை கண்டு, $\delta y'_j = (\delta y_j)'$, $(\delta y_j)_{x = x_0} - (\delta y_j)_{x = x_1} = 0$, என்பதைப் பயன்படுத்த,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_i(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial y'_j} \right) \right] \delta y_j \, dx = 0, \quad \dots \quad (9{\cdot}3)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எல்லயத்திற்கான அடிப்படை நிபந்தனை $\delta v = 0$-ல் இருந்து

$$\int_{y_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0. \quad \dots \quad (9{\cdot}4)$$

எனக் காண்கிறோம்;

---

* இங்கும் (பக்கம் 392-ல் உள்ளதுபோல்), δy_j, $\delta y'_j \ (j = 1, 2, \dots, n)$ இவற்றின் முதல் வரிசையைவிட அதிகமான வரிசைகளுடைய உறுப்புகளையும் சமன்பாட்டின் இடப்புறமுள்ள கூட்டுப் பலனில் கொள்ள வேண்டும். இவ்வகையான தேரியதல்லாத உறுப்புகளைக் கொள்வதின் விளைவு முன்னைவிட அதிகக் கடினமாகும்.

ஏனெனில்,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (F_{y_j}\, \delta y_j + F_{y'_j}\, \delta y'_j)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx.$$

(9.3), (9·4)-ல் உள்ள எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் ஒவ்வோர் உறுப்பாகக் கூட்டி,

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\, \phi_i \text{ எனக் குறிக்க,}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx = 0 \quad \ldots (9.5)$$

எனக் காண்கின்றோம். மாறல்கள் δy_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ என்பன யாதோவாக இல்லையாதலால், இன்னமும் அடிப்படைத் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது.

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

என்ற சமன்பாடுகளை சரியீடு செய்யுமாறு $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ என்ற சினைகளைக் கொள்க. இவற்றை விரித்து எழுத, இச்சமன்பாடுகள்

$$\lambda_i(x),\ \frac{d\lambda_i}{dx} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

இவற்றில் ஒரு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும். நாம் கணக்கில் மேற்கொண்டுள்ளவற்றைக் கொண்டு இது $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x) \ldots, \lambda_m(x)$ என்ற m யாதோ மாறிகளைச் சார்ந்த தீர்வுக் கொண்டதாகும் என அறிகிறோம். இந்த $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ என்ற மதிப்புகளைக் கொள்ள சமன்பாடு (9.5)-ஐ

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j\, dx = 0.$$

என மாற்றி அமைக்கலாம். இங்கு δy_j ($j = m+1, m+2, ...n$) என்ற மாறல்கள் இப்போது யாதாமொன்ருகும். எனவே ஒன்றைத் தவிர, ஏனைய δy_i-க்களை பூச்சியத்திற்குச் சமமெனக் கொண்டு, அடிப்படைத் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n)$$

எனக் காண்கிருேம்.

இவ்வாருக, v-ஐ நிபந்தனையோடு எல்லயப்படுத்தும் $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots y_n, (x)$ என்ற சார்புகளும் $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \ldots \lambda_m(x)$ என்ற சினைகளும்,

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

என்ற $(m+n)$ சமன்பாடுகளைச் சரியீடு செய்யவேண்டும். அதாவது,

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

என்ற $(m+n)$ சார்புகளைச் சார்ந்ததாகக் கருதப்படும் துணைச் சார்பரம் v^*-ன் ஆய்லர் சமன்பாடுகளைச் சரியீடு செய்யவேண்டும்.

3. சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவுகள்

குறிப்பாகச் சொல்லுமிடத்து சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவு என்பன கொடுக்கப்பட்ட சுற்றளவு உள்ளதும் அதிகபட்ச பரப்பையுடையதும் ஆன வடிவ கணித உருவத்தைக் காண்பதாகும்.

பழங்காலத்திலேயே கிரீஸில் அறியப்பட்ட இவ்வாருன எல்லயத் தீர்வமைவுகளில் பக்கம் 348-ல் கண்டவாருன மாறுபடு தீர்வமைவுகளும் உண்டு. (கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடையதும், அதிகபட்ச பரப்பை அடைப்பதும் தன்னைத்தானே வெட்டிக் கொள்ளாததுமான அடைத்த வளைவரையைக் காண்பது).* வளைவரையைத் துணை அலகுச் சமன்பாடுகள் $x = x(t), y = y(t)$, உருவத்தில் குறிக்க தீர்வமைவை இவ்வாறு கொள்ளலாம்.

* இத்தீர்வமைவின் தீர்வை கிரேக்கர்கள் அறிந்திருந்தபோதிலும், இதற்கே உரித்தான மாறுபடுதன்மை 17ம் நூற்றுண்டின் முடிவில்தான் அறியப்பட்டது.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}\,dt \text{ அல்லது } S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y} - y\dot{x})\,dt.$$

இங்கு, $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dx$ என்ற சார்பரம்

$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^2 + y^2}\,dt = l$ (மாறுபடாத ஒன்று) என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டது. இவ்வாறாக நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயம் உடையதும், அதுவும் ஒருவிதமான தனித்தன்மை கொண்டதும் அதாவது தொகை $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^2 + y^2}\ dt$ நிலைத்த மதிப்பையுடையது ஆன மாறுபடு தீர்வமைவு கிடைக்கின்றது.

இந்நாளில், சமச்சுற்றளவுத் தீர்வமைவுகள் என்பன இதை விடப் பரந்த தன்மை கொண்ட தீர்வமைவுகளைக் குறிக்கும்; அதாவது கீழ்க்கண்டவாறு ஆன தீர்வமைவுகள் :
எல்லயம் காணவேண்டிய சார்பரம்

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y'_n)dx$$

கொடுக்கப்பட்ட சமச் சுற்றளவுக் கட்டுப்பாடுகள்

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \dots y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)\,dx = l_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

இங்கு l_i என்பன நிலைத்த மதிப்பை உடையவை; m என்பது n-ஐ விடப் பெரியதாகவோ, சிறியதாகவோ அல்லது அதற்குச் சமமாகவோ இருக்கலாம்; இதேபோன்று இன்னும் கடினமான சார்பரங்களுக்கான தீர்வமைவுகளும் இவ்வகையைச் சார்ந்தவையே.

புதிய சில சார்புகளை தீர்வமைவில் கொள்வதன்மூலம் சமச்சுற்றளவுத் தீர்வமைவை, நிபந்தனையோடு கூடிய எல்லயத் தீர்வமைவாகக் கொள்ளலாம்.

$$z'_i(x) = \int_{x_0}^{x} F_i dx = z_i(x) (i = 1, 2, \ldots m)$$

எனக் குறிக்க, $z_i(x_0) = 0$. $\int_{x_0}^{x_1} F_i zx = l_i$ என்ற நிபந்தனையில் இருந்து $z_i(x_1) = l_i$.

x-ஐப் பொருத்த z_i-ன் வகைக்கெழு காண,

$$z'_i(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

இவ்வாறாக, தொகை சமச் சுற்றளவுக் கட்டுப்பாடுகள் $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ என்பனவற்றிற்குப் பதிலாக

$$z'_i = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

என்ற வகையீடு கட்டுப்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. எனவே, தீர்வமைவு முந்திய பகுதியில் கூறப்பட்ட தீர்வமைவாக ஆகின்றது.

$F_i - z'_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ என்ற கட்டுப்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனில், சினைகளின் விதியைப் பயன் படுத்தி, $v = \int_{x_0}^{x_1} F\,dx$ என்ற சார்பரத்தின் நியந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயம் காணவேண்டிய கணக்கை,

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z'_i) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$$

என்ற சார்பரத்திற்கு நிபந்தனையற்ற எல்லயம் காணவேண்டிய கணக்காகக் கொள்ளலாம். இங்கு,

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z'_i).$$

v^* என்ற சார்பரத்திற்கு ஆய்லர் சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$F^*_{z_i} - \frac{d}{dx} F^*_{z'_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

அல்லது,

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{iy_j} - \frac{d}{dx}\left(F_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{iy'_j} \right) = 0.$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_i (x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

கடைசி m சமன்பாடுகளில் இருந்து எல்லா λ_i-களின் மதிப்பும் நிலையானவை என்றும், முதல் n சமன்பாடுகளும் சார்பரம்

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i \right) dx\text{-ன்}$$

ஆய்லர் சமன்பாடுகளும் ஒன்றே என்றும் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு கீழ்க்கண்ட விதியைப் பெறுகிறோம். கொடுக்கப்பட்ட $\int_{x_0}^{x_1} F_i \, dx = l_i$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுடன் கூடிய. $v = \int_{x_0}^{x_1} F \, dx$ என்ற சார்பரத்தின் எல்லயம் காண்பதாக அமையும் சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவில் தேவையான அடிப்படை நிபந்தனைகள் காண, λ_i நிலையானதாக உள்ள

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i \right) dx$$

என்ற துணைச் சார்பரத்தை உருவாக்கி, அதன் ஆய்லர் சமன்பாடுகளைக் கொள்ள வேண்டும்.

ஆய்லர் சமன்பாட்டில் காணப்பெறும் யாதோ மாறிலிகள் C_1, $C_2 \ldots C_{2n}$-களையும், நிலையான மதிப்புடைய $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$-களையும்

$$y_j (x_0) = y_{j0}, \; y_j (x_1) = y_{j1} \;\; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

என்ற வரம்பு நிபந்தனைகளில் இருந்தும்,

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i\, dx = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

என்ற சமச்சுற்றளவு நிபந்தனைகளில் இருந்தும் கணக்கிடலாம்.

சார்பரம் v^{**}-ன் ஆய்லர் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு, v^{**} ஒரு நிலையான மதிப்பு μ_0-ஆல் மாற்றுவதால் மாறுபடுவதில்லை. எனவே அவற்றை

$$\mu_0 v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{m} \mu_i F_i\, dt$$

எனக் கொள்ளலாம்; இங்கு $F_0 = F$. $\mu j = \lambda_j \mu 0$, $j = 1, \ldots, m$ எனக் கொண்டுள்ளோம். இங்கு F_i போன்ற சார்புகள் சமச்சீராக உள்ளன; எனவே

$$\int_{x_0}^{x^1} F_i\, dx = l_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, m)$$

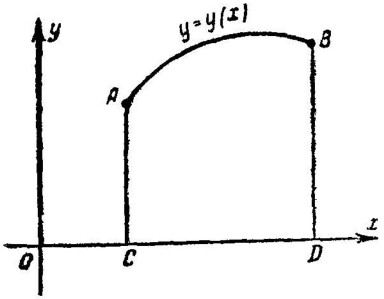
என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமச்சுற்றளவு நிபந்தனைகளுக்கு, சார்பரம் $\int_{x_0}^{x_1} F_s\, dx$-ன் எல்லையம் காணும் தீர்வமைவின் எல்லய வரைகளும், நாம் கொண்டுள்ள மாறுபடு தீர்வமைவின் எல்லய வரைகளும், s-ன் எந்த மதிப்புக்கும் $(s = 0\ 1, 2, \ldots, n)$ ஒன்றே ஆகும்.

இப்பண்பை நிகர் மாற்றுக் கொள்கை (reciprocity principle) எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடைய அடைத்த வளைவரையை வரம்பாகக் கொண்ட பரப்பிடத்தின் பெருமம் காணும் தீர்வமைவும், ஒரு கொடுக்கப்பட்ட பரப்பை அடைக்கும் வளைவரையின் சிறுமம் காணும் தீர்வமைவும் நிகர் மாற்றுகளாகும்; அவற்றின் எல்லய வரைகள் பொதுவானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

படம் 9·1-ல் காட்டியுள்ளவாறு ஆன ஒரு வளைகோட்டிற்குரிய

சரிவகத்திண்மம் (curvilinear trapezoid) CABD-ன் பரப்பு S பெருமமாக உள்ள, கொடுக்கப்பட்ட நீளம் l உடைய $y=y(x)$ எனும் வளைவரையைக் காண்க.



படம் 9-1

இதில் கீழ்க்காணும் சார்பரத்தின் எல்லயம் கணக்கிட வேண்டும்.

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx,$$

$$y(x_0) = y_0\,; \quad y(x_1) = y_1\,;$$

சமச் சுற்றளவு நிபந்தனை,

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l.$$

முதலில்

$$S^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda\sqrt{1 + y'^2})\, dx$$

என்ற துணைச் சார்பரத்தை மேற்கொள்வோம்.

தொகைச்சார்பு x-ஐச் சார்ந்திராததால், S^{**}-ன் ஆய்லர் சமன்பாட்டின் முதல் தீர்வு $F - y' F_{y'} = C_1$ ஆகும். இங்கு,

$$y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

எனவே,

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

t எனும் துணை அலகைக் கொண்டு, $y' = \tan t$ என ஈடு செய்வோம். இதிலிருந்து,

$$y - C_1 = -\lambda \cos t \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan t \text{ என்வே } dx = \frac{dy}{\tan t} = \frac{\lambda \sin t\, dt}{\tan t} = \lambda \cos t\, dt,$$

$$\therefore \quad x = \lambda \sin t + C_2$$

இவ்வாறாக, துணை அலகுகளில், எல்லைவரைகளின் சமன்பாடு

$$x - C_2 = \lambda \sin t$$
$$y - C_1 = -\lambda \cos t.$$

t-ன் நீக்கற்பலன் காண,

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

இது ஒரு வட்டக் குடும்பம். C_1, C_2, λ என்பனவற்றை

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y(x_1) = y_1,$$
$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l.$$

என்ற நிபந்தனைகளில் இருந்து காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

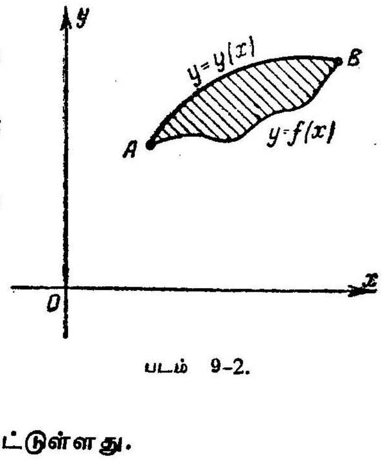
$y = f(x)$ என்ற வளைவரையோடு கூட, படத்தில் கோடிட்டு காட்டியுள்ளவாறான பரப்பின் பெரும மதிப்பைக் கொடுக்கும், l நீளமுள்ள A, B எனும் வளைவரையைக் காண்க.

இங்கு $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ என்றவாறான, $S = \int_{x_0}^{x_1} \{y - f(x)\}\, dx$ என்ற சார்பரத்தின் எல்லையம் காணவேண்டும்.

மேலும்,

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$$

என்ற நிபந்தனையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



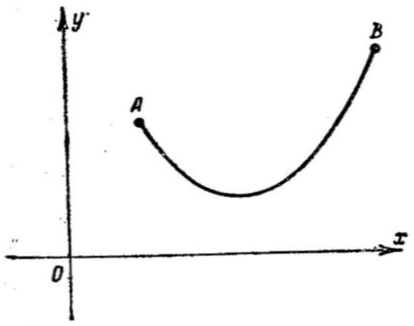
படம் 9-2.

இச்சார்பரத்திற்கான ஆய்லர் சமன்பாடும், முந்திய கணக்கில் உள்ள ஆய்லர் சமன்பாடும் ஒன்றேயாகும். எனவே கொடுக்கப்

பட்டுள்ள தீர்வமைவிலும் பெருமம், வட்டவில்களின் மேலேயே அடையப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

A, *B* என்ற புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் நீட்சியடையாத, நன்கு வளைந்து கொடுக்கக்கூடிய. சீரான l நீளமுடைய கயிறு மேற்கொள்ளும் உருவத்தைக் காண்க.



படம் 9,3

கிடை அச்சை x-அச்சாகக் கொள்வோம். சமநிலையில், புவிஈர்ப்பு மையம் அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இருக்க வேண்டும். ஆதலால் இத் தீர்வமைவு x-அச்சைப் பற்றிய நிலையில் திருப்புத்திறன் P-ன் சிறுமம் காணவேண்டும் என்கிறது. அதாவது, $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l$ எனக் கொண்டு சார்பரம்

$$P = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx\text{-ன் எல்லயம் காணவேண்டும்.}$$

துணைச் சார்பரமாக,

$$P^{**} = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

எனக் கொள்வோம்; இதற்கான ஆய்லர் சமன்பாட்டின் முதற் தொகை,

$$F - y' F_{y'} = C,$$

ஆகும்.

இங்கு $(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$ ஆகும்.

எனவே $y+\lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}$; t எனும் துணை அலகைக் கொண்டு, $y' = \sinh t$ என ஈடு செய்ய, $\sqrt{1+y'^2} = \cosh t$;

$y+\lambda = C_1 \cosh t$; $\frac{dy}{dx} = \sinh t$; $dx = \frac{dy}{\sinh t} = C_1 . dt$;

$x = C_1 t + C_2$.

t-ன் நீக்கற்பலன் காண,

$$y+\lambda = C_1 \cosh\frac{x-C_2}{C_1}$$

எனக் காண்கிறோம் இது ஒரு சங்கிலியக் குடும்பம் ஆகும்.

சமச் சுற்றளவுத்தீர்வமைவுகளுக்கு முன்னர்கூறிய விதிமுறைகளை இன்னமும் சிக்கலான சார்பரங்களுக்கும் பின்பற்றலாம்— திருத்தியான இணக்கத் தீர்வமைவு. (Problem of optimal control).

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), u(t)\right) \qquad \dots \quad (9.6)$$

என்ற வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. இங்கு $x(t_0) = x_0$ என்பது தொடக்க நிலைக் கட்டுப்பாடு எனக் கொள்வோம்.

இங்கு நாம் அறிந்திராத (அல்லது வெக்டர் சார்பு) சார்பு $x(t)$-ஐத் தவிர, இச்சமன்பாடு இணக்கச் சார்பு (control function) எனப்படும் $u(t)$-ஐயும் கொண்டுள்ளது. சார்பரம்,

$$v = \int_{t_0}^{t_2} F(x(t), u(t))dt$$

எல்லயப்படுத்தப்படும் அளவில் $u(t)$-ஐக் கொள்ள வேண்டும்.

இத்திர்வமைவுக்கு, தீர்வை அளிக்கும் $y(t)$ எனும் சார்பை திருத்திச்சார்பு அல்லது திருத்தி இணக்கம் என்கிறோம்.

இத்தீர்வமைவை, வகையீடு கட்டுப்பாடுகள் (9·6)கொண்ட சார்பரம் v-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயத் தீர்வமைவாகக் காணலாம். எனினும் செய்முறைக் கணக்குகளில், திருத்திச்

சார்புகள் அநேகமாக ஏற்கத்தக்க இணக்கச் சார்புக் குழாயின் வரம்பில் அமைகின்றன. (உதாரணமாக இயக்கப்பட்ட ஒரு எஞ்சினின் திறனை இணக்கச் சார்பு எனக் கொண்டால் இத்திறன் அவ்வெஞ்சின் வெளியிடக்கூடிய பெருமத்திறனுக்குமேல் இருக்க முடியாது என்பது தெளிவு; திருத்தித் தீர்வமைவின் தீர்வு காண, சில பகுதிகளிலாவது இவ்வெஞ்சினை உச்சத்திறன் வெளியிடும் அளவில் ஓட்டவேண்டியிருக்கும்).

திருத்திச் சார்புகள், ஏற்கத்தக்க இணக்கச் சார்புக் குழாயின் வரம்பில் அமைந்தால், சற்றுமுன் கூறப்பட்ட இருபக்க மாறல் களைக் கொண்ட நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லயத் தீர்வமைவிற்கான கோட்பாடுகளை பயன்படுத்த முடியாது.

இக்காரணத்திற்காகவே, திருத்தி இணக்கத் தீர்வமைவு களில், பொதுவாக பான்ரேஜின் [8], பெல்மான் [9] போன்றோர் கண்ட வேறு முறைகளைக் கையாள்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

x, v ஆயக்கூறுகள் உள்ள ஒரு துகளின் ஒரு தள இயக்கச் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கும்,

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = u \quad (t\text{-நேரத்தைக் குறிக்கின்றது}) \ldots \quad (9.7)$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில், துகள் $A(x_0, v_0)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து, $\beta\,(0, 0)$ என்ற புள்ளிக்கு மிகக் குறுகிய கால அளவில் செல்லுமாறான, $u\,(t)$ என்ற இணக்கச் சார்பைக் காண்க; $|\,u\,| < 1$ $\left(u = \frac{dx^2}{dt^2}\right.$ ஆதலால், ஓர் அலகுத் திணிவுள்ள துகளின்மீது செயற்படும் விசையாக u–ஐக் கொள்ளலாம்).

இணக்கச் சார்பு $u\,(t)$ பிரிவு சார்ந்த தொடர்ச்சி உடையது. கணக்கை சிறிது எளிதாக்க, இது ஒரே ஒரு புள்ளியில்தான் தொடர்ச்சியற்றது எனக் கொள்வோம்; எனினும் கடைசி முடிவு இவ்வாறு கொள்ளாமலேயே உண்மையாகும் என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

திருத்தியான பாதைகள் $u = \pm 1$ என்பதை எளிதில் அறியலாம். ஏனெனில் இம்மதிப்புகளுக்கு, $\left|\frac{dx}{dt}\right|$-ம் $\left|\frac{dv}{dt}\right|$-ம்

பெரும மதிப்பை அடைகின்றன. எனவே துகள் அதிகபட்ச வேகத்துடன் நகருகின்றது.

(9.7)–ல் $u = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$v = t + C_1, \; x = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

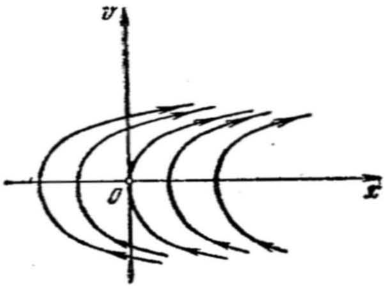
எனப் பெறுகிறோம், அல்லது $v^2 = 2(x - C)$.

இதேபோல் $u = -1$ எனில்,

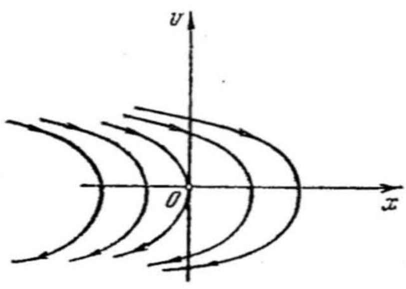
$$v = -t + C_1 ; \; x = -\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

$$v^2 = -2(x - C).$$

படங்கள் 9.4-ம், 9.5–ம் இப்பரவளைவுகளின் குடும்பங்களைக் காட்டுகின்றன; அம்புக் குறிகள் t அதிகமாகும் நிலையில் இயக்க திசையைக் குறிக்கின்றன.

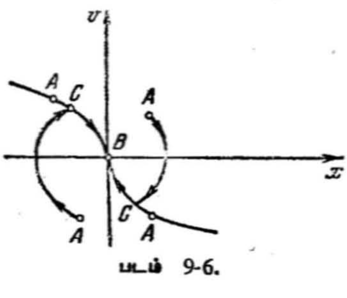


படம் 9.4



படம் 9.5

ஆதியின் வழியே செல்லும் $v = -\sqrt{x}, \; v = \sqrt{-x}$ ... (9.8) என்னும் பரவளைவுகளின்மேல் $A(x_0, v_0)$ இருந்தால், திருத்திப் பாதை, A எனும் புள்ளியை, B என்ற புள்ளியோடு இணைக்கும் இப்பரவளைவுப் பாதைகளில் ஒன்றின் வில்லாகும் (படம் 9.6).



படம் 9-6.

A எனும் புள்ளி, இப்பரவளைவுப் பாதைகளின் மீது அமையாவிட்டால். திருத்திப் பாதை, A வழியே செல்லும் பரவளைவின் வில் AC-ம், (9.8) கொடுக்கும் பரவளைவுகள் ஒன்றின் வில் CB-ம் ஆகும். (படம் 9.6–ல் AC-ல் இருக்கக்கூடிய இரு நிலைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன).

இக்கணக்கில், A என்ற நிலையில் இருந்து B-க்குச் செல்ல எடுத்துக்கொள்ளப்படும் நேரமான T, (9.7)-ல் முதலில் உள்ள சமன்பாட்டினுல் வரையறுக்கப்படுகின்ற சார்பரம் ஆகும் ;(9.7)ல் காணும் இரண்டாவது சமன்பாட்டை, கட்டுப்பாடு ஒன்றைக் கொடுக்கும் சமன்பாடாகக் கொள்ளலாம். இங்கு திருத்தி இணக்கம் ஏற்கத்தக்க இணக்கங்கள் $|u| \leqslant |$ குறிக்கும் பரப் பீடத்தின் வரம்பில் அமைகின்றது; எனவே இருபக்க மாறல்கள் முடியாததொன்று ; மேலும் பிரிவு சார்ந்த தொடர்ச்சியுள்ள இணக்கங்களின் இனத்தில் தீர்வு இருக்கவேண்டும். எனவே இத்தீர்வமைவுக்கு முன்னர் கூறப்பட்ட பழக்கமான தீர்வுகாணும் முறைகளை பயன்படுத்துவது மிகவும் கடினமாகும்.

இவ்விரண்டு சூழ்நிலைகளும், பல்வேறு செயல்முறைத் திருத்தி இணக்கத் தீர்வமைவுகளிலும் காணப்படுவனவாகும்.

அத்தியாயம் 9

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. $\int_0^1 y^2\, dx = 2,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, கீழ்க்காணும் சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவின் எல்லயவரைகளைக் காண்க.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2)\, dx.$$

2. $r = R$ என்ற வட்ட உருளையின் புவிகுறைத் தொலைவு வரை காண்க. பயில் குறிப்பு : r, ϕ, z என்ற வட்டக் கூறுகளில் தீர்வு காண முயல்க.

3. a ஒரு நிலையான மதிப்புடையது எனக்கொண்டு, $\int_{x_0}^{x_1} y\, dx = a$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, கீழ்க் காணும் சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவின் எல்லயவரைகளைக்காண்க :

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2\, dx.$$

4. $\int_0^1 r(x)\, y^2\, dx = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = 0$

எனக் கொண்டு,

$$v[y(x)] = \int_{x_2}^{x_1} [p(x)\, y'^2 + q(x)\, y^2]\, dx$$

என்ற சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்தும் சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவில் எல்லயவரைகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\, dx = 2 ;\ y(0) = 0 ;\ z(0) = 0 ;$

$y(1) = 1 ;\ z(1) = 1$ எனக் கொண்டு,

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\, dx$$

என்ற சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்தும் சமச் சுற்றளவுத் தீர்வமைவில், எல்லயவரையைக் காண்க.

10. மாறுபடு தீர்வு அமைவுகளில் நேரடி முறைகள்

1. நேரடி முறைகள்
(Direct Methods in variational Problems)

மாறுபடு தீர்வு அமைவுகளின் சமன்பாடுகளின் தொகைகளை முழுமையான (closed) வடிவில் மிகவும் அரிதாகவே காண முடியும். ஆகவே தீர்வு காண வேறு முறைகள் இருக்கின்றனவா எனத் தேடுவது இயற்கையே. மாறுபடு தீர்வமைவு என்பது குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய ராசிகளின் சார்பலன்களின் எல்லயத்தின் அணுகு எண் காண்பதாகும். குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள ராசிகளின் சார்பலன்களின் இந்த எல்லயம் காண்பதைச் சாதாரண முறையில் கண்டு, பிறகு அணுகு எண் காணக் குறிப்பிட்ட மாறுபடு தீர்வு அமைவைக் காணலாம்.

$v[y(x)]$ எனும் சார்பரத்தை எண்ணிலா ராசிகளின் தொகுதியின் சார்பலனாகக் கருதலாம். எடுத்துக்கொள்ளக் கூடிய சார்பலன்களை அடுக்குத் தொடரில்,

$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots a_nx^n$ என விரிக்க முடியும் எனக் கொண்டாலோ, அல்லது ஃபூர்யர் தொடரில்

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனவோ அல்லது வேறுவிதமான தொடரில்

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

$\psi_n(x)$ என்பது தரப்பட்ட சார்பலன்கள்) எனவோ கொண்டால் நமது கூற்றின் உண்மை புலப்படும்.

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ என $y(x)$ எனும் சார்பலனைத் திட்டப்

படுத்த a_n எனும் குணகங்களின் மதிப்புக்கள் தரப்பட்டால் போதும். ஆகவே, $v[y(x)]$ எனும் சார்பரத்தின் மதிப்பு $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ எனும் முடிவில் எண் வரிசையைத் திட்டப்படுத்த வரும். அதாவது சார்பரமானது எண்ணிலா ராசிக்கணத்தின் சார்பு ஆகும்.

$$v[y(x)] = \varphi(a_0, a, \ldots a_n \ldots)$$

ஆகவே குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய ராசிகளில் உள்ள சார்பலனின் எல்லையம் காணும் பிரச்சினைக்கும், மாறுபடு தீர்வு அமைவுப் பிரச்சினைக்கும் உள்ள வேறுபாடு பின்னத்தில் எண்ணிலா ராசியில் உள்ள சார்பலனின் எல்லயம் காண்பதாகும்.

ஆகவே நேரடி முறைகளின் அடிப்படை என்னவெனில், முன்னர் கூறியதுபோல, குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய ராசியில் உள்ள சார்பலன்களின் எல்லயம் கண்டு, அவற்றின் அணுகும், மாறுபடு தீர்வமைவைக் காண்பதாகும்,

மாறுபடு நுண்கணிதத்தின் ஆராய்ச்சியின் முதலில் நேரடி வேறுபாட்டு முறை (method of finite differences) எனப்படும் முறையை ஆயிலர் கையாண்டார். வெகுகாலம் இந்த முறையை யாரும் பயன்படுத்தவில்லை. சென்ற முப்பதாண்டுகளாக மட்டுமே சோவியத்து கணித அறிஞர்கள் L லிஸ்டர்னி (Lyusternik), I பெட்ரோவி (Petrovsky) இன்னும் பலர் தங்கள் ஆராய்ச்சியில் பயன்படுத்தியுள்ளனர்.

மற்றொரு நேரடி முறை ரிட்ஸ் முறை (Ritz) எனப்படும், இதனைப் பிரபலப்படுத்தியவர்கள் N. கிரிலா (Krylov) N. போகாலிபோ (Bogolyubov) இன்னும் பலர் பலதரப்பட்ட மாறுபடு நுண்கணித பிரச்சினைகளின் தீர்வு காண்பதில் இம்முறை பெரிதும் கையாளப்படுகிறது.

மூன்றுவது நேரடிமுறை L. காந்திரோவி (Kantorovich) என்பவரால் புகுத்தப்பட்டு பல தனிமாறிகள் கொண்ட சார்பலன்களைச் சாரும் சார்பரங்களுக்குப் பயன்படுகிறது. ரிட்ஸ் முறை பயன்படுமிடங்களில் இன்னும் பரவலாக இம்முறை பயன்படுகிறது.

இந்த மூன்று அடிப்படை நேரடி முறைகளை மட்டும் ஆராய்வோம். (பல கூற்றுக்களின் நிரூபணங்கள் தரப்படமாட்டா). நேரடி முறைகளை இன்னும் ஊன்றிப் படிக்க விரும்புகிறவர்கள், L. காந்தராவி. V. கிர்லா (10), S. மிகிலின் (11) இவர்கள் நூல்களைப் பார்க்கலாம்.

2. ஆயிலரின் வேறுபாட்டு முறை
(Euler's Finite Difference Method)

வேறுபாட்டு முறையின் அடிப்படைக் கருத்து பின்வருமாறு ஒரு சார்பரத்தின் மதிப்பு.

உதாரணமாக,

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx,\ y(x_0) = a;\ y(x_1) = b$$

என்பன தரப்பட்டுள்ள மாறுபடு அமைவுப் பிரச்சினைக்குட்பட்ட இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் வரைகளின் மீது அல்ல; ஆனால் n நேர்கோட்டுத் துண்டுகளாலான பல கோட்டு வரைகளின் மீதாகும். இதன் முனைகள் திட்டப்படுத்தப்பட்டவை.

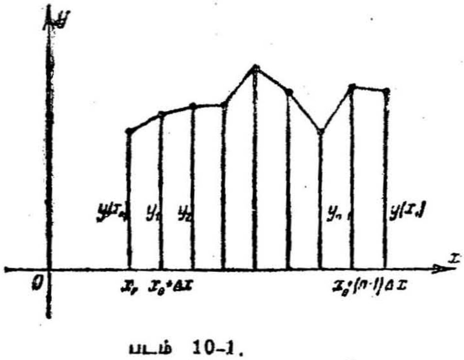
$$x_0+\triangle x, x_0+2\triangle x,\ x_0+(n-1)\triangle x.$$

இங்கு $\triangle x = \dfrac{x_1 - x_0}{n}$ [படம் 10–1].

இந்தப்பல கோட்டு வரையில், $v\ [\,y(x)\,]$ எனும் சார்பரம் $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ எனும் y உறுப்புக்கள் கொண்ட முனைகளையுடைய $\phi\ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1})$ எனும் சார்பலனாக மாற்றப்படுகிறது. ஏனெனில் வரை இந்த உறுப்புக்களால் திட்டப்படுத்தப்படுகிறது.

$y_1, y_2, \ldots, y_{-n}$ எனும் y கூறுகளை சார்பலன் $\phi\,(y_1, y_2 \ldots, y_{n-1})$ எல்லயப்படுமாறு கொள்ளப்படுகின்றன. அதாவது

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_1} = 0,\ \frac{\partial\phi}{\partial y_2} = 0,\ \frac{\partial\phi}{\partial y_{n-1}} = 0.$$



படம் 10–1.

எனும் சமன்பாடுகளிலிருந்து $y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_{n-1}$ என்பன திட்டப்

படுத்தப்படுகின்றன. பிறகு $n \to \infty$ எனக்கொள்ளப்படுகிறது. F எனும் சார்பலன் மேல் சில கட்டுக்களைச் சுமத்த, அணுகு முடிவில், மாறுபடு தீர்வு அமைவின் தீர்வைக் காண்கிறோம்.

ஆயினும், $v[y(x)]$ எனும் சார்பலனின் மதிப்பை மேல் காட்டியுள்ள பல கோட்டு வரையின் மேல் தோராயமாகக் கணக்கிடுவது சவுகரியமானது. உதாரணமாய் மிக எளிதான பிரச்சினைகளில்

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \approx \sum_{k=0}^{n=1} \int_{x_0 + k\Delta x}^{x_0+(\Delta+1)kx} F\left(x, y, \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right)dx$$

எனும் நுண் தொகைக்குப் பதிலாக

$$\sum_{i=1}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$ எனும் சிறு வேறுபாட்டுத் தொகையைக் கொள்ளல் நலம்.

இதனை நன்கு விளக்க,

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

எனும் சார்பரத்திற்கு ஆயிலர் சமன்பாட்டை அமைப்போம்.

இந்த இடத்தில் பல கோட்டுவரை மீது

$$v[y(x)] \approx \phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

இந்தத் தொகையில் ith, $(i+l)$-th உறுப்புக்கள் இரண்டு மட்டும் y-ஐச் சார்ந்து நிற்பதால்

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x,$$ ம்

$$F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$-ம்

ஆகும். ஆகவே $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \quad n - 1)$ எனும் சமன்பாடுகள் அடையும் வடிவம்

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0.$$

$$i = 1, 2, \ldots n - 1)$$

அல்லது

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)$$

$$-\frac{F_{y'}\left(x_i \; y_i \; \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1} \; \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0.$$

அல்லது

$$F_y\left(x_i, y_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_y'}{\Delta x} = 0.$$

$n \to \infty$ எனும் போது வரும் ஆயிலர் சமன்பாடு

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

எல்லயம் காணும் சார்பலன் $y(x)$ இதற்குப் பொருந்த வேண்டும். இதேபோல, வேறு பிரச்சினைகளிலும், அடிப்படை எல்லயம் வருவதற்குள்ள நியதிகளையும் காணலாம்.

அணுகும் கிரியை செய்யாவிடில், $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளிலிருந்து நமக்குத் தேவையான y உறுப்புக்கள் $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ இவற்றைக்காண முடியும். அதிலிருந்து பல கோட்டுவரை காண முடியும். இது மாறுபடு தீர்வு அமைவுக்குத் தோராயமாகும்.

3. ரிட்ஸ் முறை
(Ritz Method)

ரிட்ஸ் முறையின் அடிப்படைக் கருத்து என்னவெனில்: $v[y(x)]$ எனும் சார்பரத்தின் மதிப்பை ஏதேனும் வரை மீது

கொள்வதில்லை. $W_1(x)$, $W_2(x)$, ..., $W_n(x)$,..., எனும் குறிப்பிட்ட W சார்பலன் வரிசைகளின், நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய எல்லா சாத்தியமான ஒரு படிச்சேர்க்கை $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ ஆகும். சார்பலன் $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ என்பது எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சினைக்கு ஏற்றதாக இருக்க வேண்டும். இது அத்தகைய $W_i(x)$ எனும் சார்பலன்கள் என்பதில் ஒரு நியதியை ஏற்படுத்துகிறது. அத்தகைய ஒருபடிச்சேர்க்கையில், $v[y(x)]$ எனும் சார்பரம் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ எனும் குணகங்களின் $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ எனும் சார்பலனாக மாறுகிறது. இந்த $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ எனும் குணகங்களை, சார்பரம் எல்லயப்படுமாறு தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது. ஆகவே $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பனவற்றை

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதி திட்டப்படுத்துகிறது. $n \to \infty$ எனும்போது அணுகு மதிப்பு, இருந்தால் $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W_i(x)$ எனும் சார்பலனை அடைகிறோம். $v[y(x)]$ எனும் சார்பரத்தின்மீதும், வரிசை, $W_1(x)$, $W_2(x)$, ..., $W_n(x)$ மீதும் சுமத்தப்பட்ட நியதி கட்குட்பட்டு, இது மாறுபடு அமைவுப் பிரச்சினையின் சரியான தீர்வாகும். அணுகுக்கிரியை செய்யாமல், $y_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ என முதல் n உறுப்புக்களைமட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் பிரச்சினைக்குத் தோராயமான தீர்வை அடைகிறோம்.

சார்பரத்தின் மிகக் குறைந்தபட்ச மதிப்பை அடைய இம் முறையைப் பயன்படுத்தினால், தோராய மதிப்பு சற்றே அதிகமாக இருக்கும். ஏனெனில், பிரச்சினைக்கு உகந்த வரைகளில்வரும் குறைந்தபட்ச மதிப்பு $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ எனும் வரைகளில் வருவதைவிட அதிகமாகாது. மிக உயர்ந்தபட்ச மதிப்பை

அடையும்போது இதுபோல, இதே காரணங்களினால், தோராய மதிப்புச் சற்றுக் குறைவாகவே இருக்கும்.

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$$ எனும் வரைகள் உகந்தனவாக இருக்க,

முதல் முதலாக அது வரம்பு நியதிகட்கு பொருந்துவனவாக இருக்கவேண்டும் (மற்ற நியதிகளையும் மறக்கலாகாது). எடுத்துக் காட்டாக ஒழுங்குமாறுதல் (Smoothness) தொடர்ச்சி முதலியன வரம்பு நியதிகள் ஒரு படித்தான சமபடித்தானதாக இருந்தால், உதாரணமாக மிகச் சுலபமான பிரச்சினையைக் கொள்வோம். $y(x_0) = y(x_1) = 0$.

அல்லது,

$$\beta_{1j}\, y(x_j) + \beta_{2j}\, y'(x_j) = 0 \quad (j = 0, 1)$$

β_{ij} என்பன நிலை எண்கள். இங்கு y சார்பலன்களை வரம்பு நியதிக்குட்பட்டுத் தேர்ந்தெடுத்தலே நலம். அப்போது,

$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$, α_j-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் $y(x_0) = y(x_1) = 0$ எனும்படி இருக்கும். y சார்பலன்களை $W_i(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ \varphi_i(x)$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு $\varphi_i(x)$ தொடர்ச்சி உடையவை; அல்லது,

$$W_k(x) = \sin \frac{k\pi (x-x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k = 1, 2 \ldots)$$

அல்லது, $(W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$ எனும்படியுள்ள வேறு ஏதேனும் சார்பலன்கள் நியதிகள் சமபடித்தானதல்லாதவையானால், உதாரணமாய் $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ எனில், (இங்கு y_0 அல்லது y_1 ஒன்று ஆவது பூச்சியமல்ல).

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x) + W_0(x)$$

எனும் வடிவில் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு தேடுவது எளிதாகும்.) மேலே, $W_0(x)$ என்பது $= y_0, W_0(x_1) = y_1$ என வரம்பு நியதிக்குட்பட்டும், மற்ற $W_1(x)$ சமபடித்தான வரம்பு நியதிக்குட்பட்டும் அதாவது, இங்கு $W_i(x_0) = W_1(x_1) = 0$ எனவும் இருக்க

வேண்டும் இவ்வாறு, எடுத்துக்கொண்டால், எந்த α_i-க்கும், $y_n(x)$ எனும் சார்பலன் வரம்பு நியதிக்குட்படும் என்பது தெளிவு. $W_0(x)$ எனும் சார்பலனை ஒருபடித்தாக $W_0\ (x) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $(x - x_0) + y_0$ எனக் கொள்ளலாம்.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0\ (i = 1, 2 \ldots n)$ எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு காண்பது மிகவும் சிக்கலானது. இதை எளிதாக்க, காணவேண்டிய சார்பலன்களிலும், அதன் வகையீடுகளிலும் இருபடித்தான v எனும் சார்பரத்தின் எல்லயத்தை ஆராய்தல் நலம். ஏனெனில் இங்கே $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ என்பவை α_i-ல் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகும்.

$W_1, W_2, \ldots, W_n \ldots,$ எனும் வரிசைச் சார்பலன்கள், கூறுச் சார்பலன்கள் எனப்படும். இவற்றைத் தேர்ந்தெடுப்பதைப் பொருத்தது பின்வரும் கணக்கீடுகளின் சிக்கல். ஆகவே ஒரு முறையின் நலம், சரியான கூறுச்சார்பலன்களைப் பொருத்தது.

மேற் கூறியவை $v\ [z\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ எனும் சார்பரத்திற்கும் [இங்கு W_i எனும் சார்பலன்கள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனும் தனி மாறிகளாகும்] பல சார்பலன்களைச் சார்ந்து நிற்கும் சார்பரங்களுக்கும் பொருந்தும்.

கணித இயல்பியல் பிரச்சினைகளுக்குத் தோராயத்தீர்வு காண ரிட்ஸ் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. உதாரணமாக, ஒரு D எனும் சிறு வெளியில் (Domain)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

எனும் போசான் சமன்பாட்டின் தீர்வை D எனும் சிறு வெளியின் வரம்பில் உள்ள z-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்குக் காண இந்தப் பிரச்சினையை ஆஸ்ட்ரோக்ராட்ஸ்கி சமன்பாடு (பக்கம் 394 பார்க்கவும்.) வரும் சார்பரத்தின் எல்லயம் காண் மாறுபடு தீர்வு அமைவுப் பிரச்சினையாக மாற்ற முடியும். இந்த இடத்தில் வரும் சார்பரம்

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z\,f(x, y) \right] dx\,dy.$$

z எனும் சார்பலனை எல்லயப்படுத்தலை ஏதேனும் ஒரு நேரடி முறையில் செய்யலாம்.

கணித இயற்பியல் பிரச்சினைகள், காணவேண்டிய சார்பலன்கள், அவற்றின் வகையீடுகள் இவற்றில் இருபடித்தான சார்பலனின் எல்லயம் காண்பதாக முடிகிறது. ஏற்கெனவே கூறியது போல, ரிட்ஸ் முறை மிகவும் எளிதாகிறது.

[ரிட்ஸ் முறையில் காணப்பட்ட] தோராயங்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வுக்கு ஒருங்குதல் பற்றியும், அவற்றின் திருத்த அளவு பற்றியும் உள்ள ஆராய்ச்சி மிக மிக சிக்கலானது. ஆகவே இவற்றைப் பற்றி ஒருசில குறிப்புகள் மட்டும் தருவோம். இன்னும் காண விரும்புவர்கள் மிகிலின் (Mikhlin) [11], காந்தாரோவியும், கிரிலாவும்[10] ஆகிய நூல்களைப் பார்க்கலாம். திட்டமாகக் கூற,

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

எனும் சார்பரத்தைக் கொள்வோம். நாம் இதன் மீச்சிறு மதிப்பு வேண்டுபவர் என்போம். $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_n(x)$ எனும் கூற்றுச் சார்பலன் வரிசையைப் பார்ப்போம். இவை முற்றுப் பெற்ற வரிசை எனக் கூற முதற்படித் திருத்தத்திற்கு n மிகவும் பெரிதாக இருக்கும்போது $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k W_k(x)$ என ஒருபடிச் சேர்க்கை அமைய வேண்டும். அப்போது ரிட்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தி $y_1, y_2, \ldots, y_n$ எனும் சார்பலன்களைக் காணலாம். இங்கு $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k W_k(x)$. இந்த ஒருபடிச் சேர்க்கையில் உள்ள வரிசை குறைவாக்கும் வரிசை எனப்படும். அதாவது,

$$v[y_1], v[y_2], \ldots, v[y_n] \ldots$$

எனும் சார்பர வரிசை மீக் குறைவுக்கு ஒருங்குவது அல்லது, $v[y(x)]$ என்பது கீழ் எல்லை மதிப்புக்கு ஒருங்குவதாக வேண்டும். எனினும் $\lim_{n\to\infty} v[y_n(x)] = \min v[y(x)]$ என்பதால் $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ என ஆகவேண்டுமென்பதில்லை. மீக்குறைவுபடுத்தும் வரிசை உகந்த சார்பலன்களில் எல்லயப்படுத்தும் சார்பலனை வேண்டுவதில்லை.

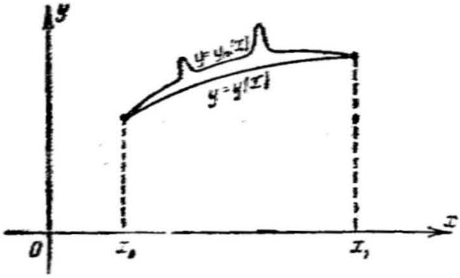
ஏன்,

$$v[y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y'_n(x))\, dx,$$

எனும் சார்பரம்,

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

இதிலிருந்து வடிவில் சற்றே மாறுபட்டிருக்கிறது. இது தொகை காண் இடைவெளியில் $y_n(x)$ என்பது $y(x)$–க்கு முதற்படித் தோராய அணிமையில் மட்டுமல்ல, (x_0, x_1)-ல் சில போதுமான



படம் 10–2.

அளவு சிறு இடைவெளியில், மிகக் கணிசமாக $y_n(x)$-ம், $y(x)$-ம், அல்லது அவற்றின் வகையீடுகள் மாறுபடும்போதும், (x_0, x_1) மற்ற இடங்களில் இல்லாவிடினும் ஆகும். [படம் (10·2)] இந்தக் காரணத்திற்காக மீக்குறைவு படுத்தும் வரிசை $y_1, y_2, \ldots, y_n$ உகந்த சார்பலன் தொகுதியில் அவை உகந்த சார்பலன்களாயினும், அவை அணுகும் சார்பலன்கள் உகந்ததாக இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை.

நடைமுறையில் எதிர்ப்படும் சார்பரங்களுக்கு, மாறுபடு தீர்வு அமைவுப் பிரச்சினையில் ரிட்ஸ் முறையில் காணப்படும் y_n- எனும் சார்பலன்களின் ஒருங்கலையும் ஒருங்கல் வேகத்தையும் N கிரிலாவு (Krylov)–ம் N பொகாலிபோவும் (Bogolyubov) ஆராய்ந்துள்ளனர்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$, = \int_{0}^{1} \left[p(x)\, y'^2 + q(x) y^2 + f(x) y \right] dx,\ y(0)=y(1)=0$$

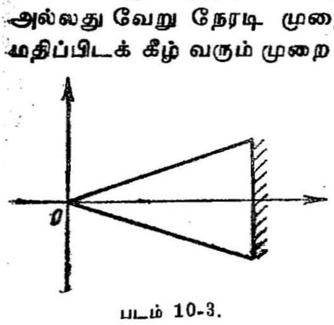
$p(x) > 0 \quad q(x) \geqslant 0$ எனும் சார்பரம் பயன்படுகளில் அடிக்கடி காணப்படுவதாகும். $(W_k\, x) = \sqrt{2}\sin k\pi x\ (k = 1, 2, \ldots,)$ எனும் கூறு சார்பலன்கள் தரப்பட சார்பரத்தை மீச்சிறிதாக்கும் $y(x)$-க்கு (ரிட்ஸ் முறையில் கண்ட தோராயத்தின் ஒருங்கலை நிறுவினது மட்டுமல்லாமல், $|\, y(x) - y_n(x)\,|$ எனும் பிழை அளவையும் திட்டமாக அளவிடப்பட்டுள்ளது.

$(0, 1)$ என்ற இடைவெளியில் $|\, y(x) - y_n(x)\,|$ என்பதன் மீப்பெருமத்தின் அளவிடுதலைத் தருகிறோம்.

$$\max |\, y - y_n | \leqslant \frac{1}{(n+1)} \left[\max p(x) + \frac{\max q(x)}{(n+1)^2\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}}{\pi^2\sqrt{2}\,[\min p(x)]^{\frac{5}{2}}} \times \left[\max |\, p'(x)\,| + \frac{1}{\pi} \max q(x) \pi \min p(x) \right]^{*}$$

இந்த சுலபமான உதாரணத்திலும் பிழை மதிப்பீடு மிகச் சிக்கலானது. இந்தக் காரணத்திற்காக ரிட்ஸ் முறையிலோ, அல்லது வேறு நேரடி முறையிலோ கண்ட முடிவின் பிழைமை மதிப்பிடக் கீழ் வரும் முறை கையாளப்படுகிறது. அது கொள்கையளவில் குறைவாய்ந்தது என்னும் நடைமுறையில் நம்பத் தகுந்தது. $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$ இவற்றைக் கண்ட பின்னர், (x_0, x_1) என்ற இடைவெளியில் பல இடங்களில் அவை ஒப்பிடப்படுகின்றன. வேண்டிய பிழை அளவுக்குள். அவை ஒன்றுபட்டால் $y_n(x)$ என்பது மாறுபடு தீர்வு அமைவின், இந்த பிழைக்குட்பட்ட முடிவாகும் எனக் கருதப்படுகிறது.



படம் 10-3.

* காந்தாரோவியும் கிரிலாவும் [10] பார்க்கவும்

ஆனால் எடுத்துக்கொண்ட சில இடங்களில் குறிப்பிட்ட பிழை அளவுக்குள் $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$ ஒன்றுபடவில்லை என்றால் $y_{(n+2)}(x)$ என்பது கணக்கிடப்படுகிறது. பிறகு $y_{(n+1)}(x)$ $y_{n+1}(x)$ ஒப்பிடப்படுகின்றன. இவ்வாறு இதனைக் குறிப்பிட்ட பிழை அளவுக்குள் $y_{n+k}(x)$ம் $y_{n+k+1}(x)$ம் பொருந்தும் வரைத் தொடர்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

பொருத்தப்பட்ட முனை (wedge)யின் அலைவுகளை ஆராயும் போது கீழ்வரும் சார்பலனின் எல்லயத்தை ஆராயவேண்டி வருகிறது.

$$v = \int_0^1 \left(ax^2 y''^2 - bxy^2\right)dx,\ y(1)=y'(1)=0.$$

a, b என்பவை நேர் நிலை எண்கள் வரம்பு நியதிக்குட்பட்ட கூறுச் சார்பலன்களாக,

$$(x-1)^2,\ (x-1)^2x,\ (x-1)x^2,\ \ldots,\ (x-1)^2\,x^{k-1}\ \ldots$$

என்பவற்றைக் கொள்வோம்.

ஆகவே,

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(x-1)^2\,x^{k-1}.$$

முதல் இரு உறுப்புக்களுடன் நிறுத்திக் கொள்வோம். அப்போது,

$$y_2 = (x-1)^2\,(\alpha_1 + \alpha_2 x).$$

$$v_2 = v\,[y_2] = \int_0^1 [ax^3\,(6\alpha_2 x + 2\alpha_1 - \Delta\alpha^2)^2 - bx(x-1)^4.$$

$$(\alpha_1+\alpha_2 x)^2 dx = \alpha\left[(\alpha-2\alpha_2)^2 + \frac{24}{5}\alpha_2\,(\alpha_1-2\alpha_2).\right.$$

$$\left.+\,6\alpha_2^2\right] - b\left[\frac{\alpha_1^2}{30} + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{105} + \frac{\alpha_2^2}{280}\right].$$

ஆகவே, எல்லயம் வருவதற்குள்ள தேவையான நியதிகள், $\dfrac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} = 0$, $\dfrac{\partial v_2}{\partial \alpha} = 0$, தருவது.

$$\left(a - \frac{b}{30}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2}{5}\alpha - \frac{b}{105}\right)\alpha_2 = 0,$$

$$\left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{105}\right)\alpha_1 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{280}\right)\alpha_2 = 0.$$

$\alpha_1 = 0 = \alpha_2 = 0$ என அல்லாத மற்ற தீர்வுகளைக் காண இவை முளைக்கு அலகுகள் இல்லை என்கின் றன. சமபடித்தான ஒரு படிததான சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் அணிகோவை பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\begin{vmatrix} a - \dfrac{b}{30} & \dfrac{2}{5}a - \dfrac{b}{105} \\ \dfrac{2}{5}a - \dfrac{b}{105} & \dfrac{2}{5}a - \dfrac{b}{280} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(a - \frac{b}{30}\right)\left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{280}\right) - \left(\frac{2}{5}a - \frac{b}{105}\right)^2 = 0.$$

இது அலைவுச் சமன்பாடு எனப்படும். இது முளையின் இயற்கையான அலைவு b

$u(x,t) = y(x) \cos b\, t$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதை விவரிக்கிறது. b_1, b_2 என்ற இரு மூலங்களில் சிறிய மதிப்பு முளையின் அடிப்படை சாய்வர அலைவுக்குத் தோராய மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

பட்டகம் அல்லது உருளையின் முறுக்கு பற்றிய கணக்குகளில் ஆராயப்படும் சார்பரம்

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\right)^2\right] dxdy.$$

இதன் எல்லயத்தைப் பார்க்க வேண்டும். நீள்வட்ட குறுக்கு வெட்டு உள்ள உருளைக்கு தொகை காண வெளி D-ன் வரம்பு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும். இந்த இடத்தில் xy எனும் ஒரு கூறுச்

சார்பலன் மட்டும் கொள்ள நாம் பெறுவது $z_1 = axy$. $v[z_1] = v_1 = \frac{\pi ab}{4}\ [(\alpha + 1)^2 + (\alpha - 1)\ b^2]$ எல்லையத்தின் நியதி $\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = 0$ இங்கு தருவது.

$$(\alpha + 1)^2\ a^2 + (\alpha - 1)^2\ b^2 = 0.$$

ஆகவே,

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\quad , z_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\ xy$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

இரண்டாவது உதாரணத்தில் D எனும் குறுக்குவெட்டு வரம்பு $2a$, $2b$ எனும் பக்கங்களையுடைய செவ்வகமானல் $-a < x < a, -b < y < b$. கூறுச் சார்பலன்களை xy, xy^3, x^3y எனக்கொள்ள,

$$z_3 = \alpha_1\ xy + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3\ x^3 y.$$

நாம் அடைவது

$$v_3 = v\,[z_3] = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \left[\left(\frac{\partial z_3}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y} + x\right)^2 \right] dx\, dy$$

$$= \frac{4}{3}\ ab^3\,(\alpha_1 - 1)^2 + 4ab^3 \left(\frac{b^2}{7} + \frac{3a^2}{5}\right) \alpha_2{}^2$$

$$+ 4a^3b \left(\frac{a_2}{7} + \frac{3b^2}{5}\right) \alpha_3{}^2$$

$$+ \frac{4}{3}\ a^3b\,(\alpha_1 + 1)^2 + \frac{8}{5}\ ab^3\,(\alpha_1 - 1)\,\alpha_2$$

$$+ \frac{8}{5}\ a^3b\,(\alpha_1 + 1)\,\alpha^2$$

$$- \frac{8}{5} a^5 b (\alpha_1 + 1) \alpha_8 - \frac{8}{5} a^3 b^3 (a^2 + b^2) \alpha_2 \alpha_8$$

$$- \frac{8}{3} a^3 b^3 (\alpha_1 - 1) \alpha_8.$$

எல்லய நியதிகள் $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} = 0.\ \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} = 0.\ \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} = 0$ தருவது

$$\alpha_1 = - \frac{7 (a^6 - b^6) + 135 a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{7 (a^6 + a^6) + 107 a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$

$$\alpha_2 = - \frac{7a^2 (3a^2 + 35b^2)}{21 (a^6 + b^6) + 321\ a^2 b^2) (a^2 + b^2)}$$

$$\alpha_3 = - \frac{7b^2 (35a^2 + 3b^2)}{21 (a^6 + b^6) + 321\ a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$-ன் தீர்வு காண்க. இடைவெளி $D, 0 < x < a, 0 < y < b$ வரம்பில் தீர்வு பூச்சியமாக வேண்டும் $f(x.y)$ எனும் சார்பலன் சீராக ஒருங்கும் இரட்டை ஃபூரியர் தொடர் ஆகும்.

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{b} \sin p \frac{\pi y}{b}.$$

இந்த எல்லய மதிப்புப் பிரச்சினையை மாறுபடுத் தீர்வு அமைவுப் பிரச்சினையாக மாற்றலாம். அதாவது ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கியின் சமன்பாடாகும் சார்பரம் காணல். பிறகு நேரடி முறைகளில் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி சார்பரத்தை எல்லயப் படுத்தும் சார்பலன் காணல். இவ்வாறு முதல் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணவேண்டும்.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ என்பது.}$$

$$v[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x,y) \right] dx\, dy$$

எனும் சார்பரத்தின் ஆஸ்ட்ரோகிராட்ஸ்கி சமன்பாடாகும் என எளிதில் சரிபார்க்கலாம் [பக்கம் 394 பார்க்கவும்]. வரம்பு நியதி D எனும் இடைவெளிக்கு $z = 0$ என்பதாகும். ரிட்ஸ் முறையில் சார்பரத்தின் எல்லயத்தைப் பார்ப்போம்.

கூறுச் சார்பலன்களாக,

$$\sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \ldots, n)$$

என்பவற்றைக் கொள்வோம்.

D எனும் இடைவெளி வரம்பில் $z = 0$ எனும் வரம்பு நியதிக்குட்பட்டன. இந்த ஒவ்வொரு சார்பலனும் இவை நிறைவுப் பண்பும் உடையன.

$$z_{n,n} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \alpha_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$$

எனக்கொண்டு அடைவது,

$$v[z_{n,m}] = \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial y} \right)^2 \right.$$

$$\left. + 2z_{nm} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{p} \sin q \frac{\pi y}{b} \right] dx\, dy$$

$$= \frac{\pi^2 ab}{4} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \alpha^2_{pq} +$$

$$+ \frac{ab}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \alpha_{pq} \beta_{pq}.$$

D எனும் இடைவெளியில் $\sin p\frac{\pi x}{a}$ $\sin q\frac{\pi x}{b}$ $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் கூறுச் சார்பலன்கள் குத்துத் தொகுதி, அதாவது,

$$\iint\limits_D \sin p\frac{\pi x}{a} \sin q\frac{\pi y}{b} \sin p_1\frac{\pi x}{a} \sin q_1\frac{\pi x}{b}\, dx\, dy = 0.$$

எனும்படி அமைகின்றதென்பதைக் கருத்தில் கொண்டால் மேற் கூறிய முடிவை உடனே அடையலாம். [$p = p_1$, $q = q_1$ என்பதைத்தவிர மற்றிடங்களில் p, q, p_1, q_1 நேரெண்கள் $p=p_1$, $q=q_1$ என்றால், $\iint\limits_D \sin^2 p\frac{\pi x}{a} \sin^2 q\frac{\pi x}{b}\, dx\, dy = \frac{ab}{4}$. ஆகவே, இரட்டை நுண்தொகைக் குறியீட்டின்கீழ் $v[z_{nm}]$-க்குச் சமமாக உள்ள எல்லா உறுப்புக்களிலும் $\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$, $\sin p\frac{\pi x}{a}$ $\cos q\frac{\pi y}{b}$ $\cos p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}$ என்ற சார்பலன்களின் வர்க்கம் மட்டுமே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். பார்வைக்கே புலனாவது $V[z_{nm}]$ என்பது,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha_{pq}} = 0 \quad (p = 1, 2 \ldots, n;\quad q = 1, 2 \ldots, m)$$

எனும் அடிப்படையாக எல்லயம் காண்பதற்குத் தேவையான நியதியிலிருந்து காணப்படும் குணகங்கள் $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm}$) இவற்றின் சார்பலனாக $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm})$ ஆக அமையும் இந்த இடத்தில் இந்தத் தொகுதி சமன்பாடு

$$\alpha_{pq}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\pi^2+\beta_{pq} = 0 \quad \begin{pmatrix} p = 1, 2 \ldots, n \\ q = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

ஆகவே $\alpha_{pq} = -\dfrac{\beta_{pq}}{\pi^2\left(\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}\right)}$.

ஆகவே

$$z_{nm} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi x}{b}.$$

$n, m \to \infty$ எனும் போது அணுகு மதிப்பைக் காண

$$z = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\sin p\frac{\pi x}{a}\sin q\frac{\pi y}{b}.$$

4. காந்தாரோவி முறை
(Kantorovich's Method)

பல தனி மாறிகளின் சார்பலன்களைச் சார்ந்து அமையும் சார்பரம் $v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$-க்கு ரிட்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தும் போது $W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $W_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$W_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனும் கூறுச் சார்பலன்களைப் பயன்படுத்தவேண்டி வருகிறது. மாறுபடு தீர்வு அமைவுக்கு,

$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ வடிவில் (α_k என்பன நிலை எண்கள்). தோராயத் தீர்வு காணப்படுகிறது.

காந்தாரோவி முறையிலும்

$W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $W_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $W_m(x_1, y_2, \ldots, x_n)$ எனும் கூறுச் சார்பலன்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்)

$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_j) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனும் வடிவில் தோராயத் தீர்வும் காண வேண்டும். ஆனால் $\alpha_k(x_i)$ என்பன நிலை எண்களல்ல. அவை தனிமாறிகளில் ஒன்றின் சார்பலனுகும்.

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

எனும் சார்பலன்களினுல், $v[z]$ எனும் சார்பரம் $\bar{v}[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i) \ldots \alpha_m(x_i)]$ எனும் சார்பரமாக மாற்றப்படுகிறது. இது $\alpha_1(x_i)$, $\alpha_2(x_i), \ldots \alpha_m(x_i)$ ஒரு தனிமாறிச் சார்பலன்களைச் சார்ந்து நிற்கிறது. $\alpha_1(x_i) \ldots \alpha_m(x_j)$ எனும் சார்பலன்களை v எனும் சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்துமாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

இதற்குப் பிறகு $m \to \infty$ என அணுகு மதிப்புக்காணும்போது சில கட்டுக்குட்பட்டுத் திட்டமான தீர்வு காண இயலும். ஆனுல் அணுகுக் கிரியை செய்யாவிடில் இந்த முறை தோராயத் தீர்வைத் தரும். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, இதே கூறு சார்பலன்களை இதே m எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்டு ரிட்ஸ் முறையில் காணும் தீர்வைவிடத் துல்லியமாகக் காணமுடியும்.

இந்தமாதிரி பிழைக்குறைவு, இம்முறையில் ஏனெனில்,

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

என $\alpha_k(x_i)$'க்களின் சார்பலன் தொகுதி,

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

என α_kக்களை நிலை எண்களைக்கொண்ட சார்பலன்களைவிட பரந்தவையாவதால் ஆகும். இதனுல்,

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

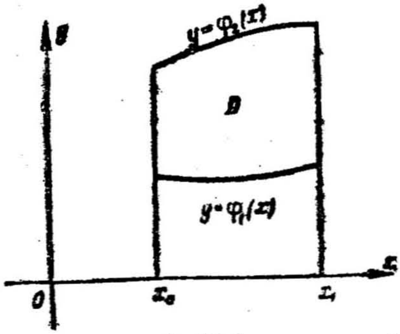
எனும் சார்பலன்களிடையே α_kக்களை நிலை எண்களாகவுடைய $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனும் சார்பலன்களிடையே விட மாறுபடு தீர்வு அமைவுப் பிரச்சினைக்குப் பிழை குறைந்த முடிவை காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

எனும் D எனும் இடைவெளியில், சார்பரத்தின் ஓர் எல்லயத்தை காண்போம். இங்கு D-ன் வரம்புக்கள்

$$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ x = x_0,\ x = x_1.$$



படம் 10-4.

[படம் 10.4] வரம்புகளின் மீது $z\ (x, y)$-ன் மதிப்புக்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

$W_1(x, y), W_2(x, y), \ldots W_n(x, y) \ldots$, என கூறு சார்பலன் வரிசையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். தற்பொழுதுக்கு இந்த வரிசையின் முதல் m சார்பலன்களை மட்டும் கொள்வோம். தீர்வு அமைவை

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x)\, W_k(x, y)$$ சார்பலன்களின் தொகையாகவோ,

அல்லது குறியீட்டை மாற்ற $\alpha_k(x)$-ஐ $u_k(x)$ எனக்கொள்ள நாம் அடைவது $z_m(x,y) = u_1(x)\, W_1(x,y) + u_2(x)\, W_2(x,y) + \ldots u_m(x)\, W_m(x,y)$. இங்கு W_k எனும் சார்பலன்கள் நாம் தேர்ந்தெடுப்பவை u_k என்பன அறியப்படாத சார்பலன்கள். இவை v எல்லயப்படும் வகையில் கொள்ள வேண்டும்.

$$v\,[z_m(x,y)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z_m(x, y)\, \frac{\partial z_m}{\partial x}\quad \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dy.$$

தொகை காணவேண்டிய சார்பலன் y-ல் அறியப்பட்டதானதால் y-ஐச் சார்ந்த நுண்தொகை அறியப்படும். அப்போது $v[z_m(x, y)]$ எனும் சார்பரத்தின் வடிவம்,

$$v[z_m(x,y)] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi\,(x, u_1(x) \dots u_m(x), u'_1, \dots u'_m)\, dx.$$

$u_1(x), u_2(x) \dots u_m(x)$ எனும் சார்பலன்களை $v_m[z_m(x,y)]$ எனும் சார்பரம் எல்லயப்படுத்தும் வகையில் காணப்படவேண்டும். ஆகவே $u_i(x)$ என்பன ஆயிலர் சமன்பாடுகளுக்குப் பொருந்த வேண்டும்.

$$\varphi u_1 - \frac{d}{dx}\varphi u'_1 = 0,$$

$$\varphi u_2 - \frac{d}{dx}\varphi u'_2 = 0,$$

$$\dots\dots,\dots\dots\dots$$

$$\varphi u_m - \frac{d}{dx}\varphi_{u'm} = 0.$$

இச்சைக்கேற்பக் கொள்ளும் நிலை எண்களை, $z_m(x, y)$ எனும் சார்பலன் $x = x_0$, $x = x_1$ எனும் வரம்பு மீது கட்டுக்கடங்குமாறு கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

கீழ்வரும் சார்பரத்தை எல்லயப்படுத்துக.

$$v[z(x,y)] = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right]dx\, dy.$$

தொகை காண இடைவெளியின் வரம்பு மீது $z = 0$; இடைவெளி ஒரு செவ்வகம் $-a < x < a$, $-b < y < b$, $z_1 = (b^2 - y^2)u(x)$ எனும் வடிவில் தீர்வு தேடுகிறோம் என்றால் $y = \pm\, b$ மீது வரம்பு நியதி பொருந்துகிறது. சார்பரம்.

$$v[z_1] = \int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15} b^5 u'^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2 - \frac{8}{3} b^3 u\right]dx$$

இந்தச் சார்பரத்திற்கு ஆயிலர் சமன்பாடுகள்

$$u'' - \frac{5}{2b^2}u = -\frac{5}{4b^2}\,.$$

இது நிலை எண் குணகங்களுடன் கூடிய ஒரு படித்தான சமன்பாடாகும்.

இதன் பொதுத் தீர்வு,

$$u = C_1 \cos h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b} + C_2 \sin h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b} + \frac{1}{2}\,.$$

நிலை எண்கள் C_1, C_2 என்பனவற்றை வரம்பு நியதிகள் $z(-a) = z(a) = 0$ என்பதிலிருந்து காணவேண்டும்.

ஆகவே, $C_2 = 0$, $C_1 = -\dfrac{1}{2 \cos h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}$

முடிவில் நாம் அடைவது,

$$u = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\cos h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}}{\cos h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}\right].$$

ஆகவே,

$$z_1 = \frac{1}{2}(b^2 - y^2)\left[1 - \frac{\cos h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}}{\cos h \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}\right]$$

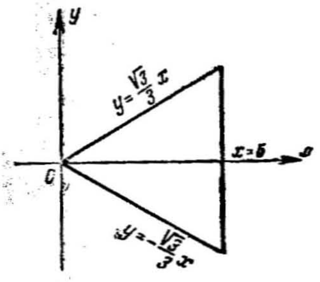
இன்னும் திருத்தமான விடை வேண்டுமானல், விடையை,

$$z_2 = (b^2 - y^2)\, u_1(x) + (b^2 - y^2) u_2(x),$$

எனும் வடிவில் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\Delta z = -1$ எனும் சமன்பாட்டிற்குக் கீழ்க் காணும் நியதிகட்கிணங்க தொடர்ச்சியுடைய தீர்வு காணவும். காணவேண்டிய இடைவெளி D என்பது $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\, x$, $x = b$ எனும் வரம்புகளையுடைய சமபக்க முக்கோணம் (படம் 10·5) வரம்பின் மீது தீர்வு பூச்சியமாகிறது.



படம் 10-5.

$\Delta z = -1$ எனும் சமன்பாடு

$$v[z] = \int_0^b \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z\right] dx\, dy$$

எனும் சார்பரத்தின் ஆஸ்ட்ரோக்ராட்ஸ்கி சமன்பாடாகும். இந்த இடைவெளியின் வரம்பு மீது $z = 0$. காந்தாரோவி முறையைப் பயன்படுத்தித் தோராயமாக,

$$z_1 = \left[y^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, x\right)^2\right] u(x)$$

எனும் வடிவில் முடிவைக் காண்போம். இவ்வாறு z-ஐத் தேர்ந்தெடுக்க $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\, x$ எனும் கோடுகள் மீது வரம்பு நியதிகள் பொருந்துகின்றன.

y-ஐச் சார்ந்து நுண்தொகை கண்ட பின்னர் $v[z_1]$-ன் வடிவம்

$$v[z_1] = \frac{8\sqrt{3}}{405} \int_0^b (2x^5 u'^2 + 10x^4 u u' + 30x^3 u^2 + 15x^3 u)\, dx.$$

இந்தச் சார்பரத்திற்கு ஆயிலர் சமன்பாடுகள்,

$$x^2 u'' + 5xu' - 5u = \frac{15}{4}.$$

இத்தகைய ஒருபடித்தான சமன்பாடுகள் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக் கணிதத்தில் ஆயலர் சமன்பாடு காணப்படும்.

இந்த சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாட்டின் ஒரு தனித் தீர்வு எளிதில் புலனாகிறது. அது $u = -\frac{3}{4}$, $u = x^k$ எனும் வடிவில் இதற்கொத்த சமபடித்தான சமன்பாடு தேடுகிறோம். முடிவில் கிடைப்பது $u = C_1 x + C_2 x^{-5} - \frac{3}{4}$. $x = 0$ எனும் புள்ளிக்

கணிமையில் u எல்லையுடையதாக வேண்டும். ஆகவே C_2 என்பது பூச்சியம் எனத் தேற வேண்டும். $u(b)=0$ என்பதிலிருந்து

$$C_1 = -\frac{3}{4b} \text{ அப்போது } z_1 = -\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}x^2\right)$$

குறிப்பு : வரம்பு மதிப்புப் பிரச்சினைகள் இன்னுமொரு நேரடி முறையில் (மாறுபடு முறையல்லாமல்) தீர்வு காணப்படுகிறது. அதனை காலர்கின் (B. Galerkin) முறை என்பர். இது குறிப்பாக நேர்கோட்டு வரம்பு பிரச்சினைகளில் மிகவும் சவுகரியமாக இருக்கும். மற்று ஒரு படித்தானதல்லாத பிரச்சினைகளிலும் இதனைப் பயன்படுத்தலாம். திட்டமாக இதனை விளக்க அடிக்கடி எதிர்படும் இரண்டாம் வரிசை ஒருபடித்தான சமன்பாடாகிய $y''+p(x)y'+q(x)y = f(x)$ ..., (10.1) என்பதற்குப் பயன்படுத்துவோம். இங்கு சமபடித்தான வரம்பு நியதிகள் $y(x_0)=0$ $y(x_1)=0$ [சமபடித்தானதல்லாத வரம்பு நியதிகள் $y(x_0)=y_0$ $y(x_1)=x_1$. ஆனால்,

$$z = y - y_0 - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

என ராசி மாற்றம் செய்ய சமபடித்தான நியதிக்கு ஒடுக்கலாம்]. (10.1)ல் உள்ள சமன்பாட்டை

$$L(y) = f(x)$$

எனச் சுருக்கமாக எழுதலாம்.

$[x_0, x_1]$ எனும் இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய ஒரு படித்தான ஒன்றுக்கு ஒன்று சாராத சார்பலன்கள்

$$W_1(x),\quad W_2(x)\ \dots,\ W_n(x)\ \dots, \qquad (10{\cdot}2)$$

என்பனவற்றைக் கொள்வோம்.

இவை $W_n(x_0) = W_n(x_1) = 0$ $(n = 1, 2, \dots,)$ எனும் வரம்பு நியதிக்குட்பட்டன. நாம் (10.2)ன் தொகுதியில் முதல் சார்பலன்களின் ஒரு படிச்சேர்க்கையான

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 W_i(x)$$

எனும் வடிவில் வரம்புப் பிரச்சினையின் தோராயத் தீர்வை நாடுவோம்.

(10.1) N, y_n-ஐப் பிரதியிடுக.

α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் குணகங்களை,

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(x)\right) - f(x).$$

எனும் சார்பலன் $[x_0, x_1]$ இடைவெளியில் $w_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ எனும் ஒவ்வொரு சார்பலனுக்கும் குத்தாக அமையும்படிக் கொள்க. அதாவது,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(x)\right) - f(x)\right] w_i(x)\, dx = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ ... (10.3)

$$y_n \text{ என்பது } \bar{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x)$$

எனும் சரியான தீர்வுக்கு $n \to \infty$ எனும்போது அணுகும் என எதிர்பார்ப்பது இயற்கையே. ஏனெனில் கிடைக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்கு தொடராகவும், இருமுறை வகையிடற்குரிய தாகவும், அனுல் $L[\bar{y}] - f(x)$ எனும் சார்பலன் (x_0, x_1) எனும் இடைவெளியில் (10.2)-ல் ஒவ்வொரு சார்பலன் $w_1(x)$ உடன் குத்தாகும். அல்லாமல் (10,2) நிறைவு பெற்றதாகும். ஆகவே $L[\bar{y}] - (x) \equiv 0$ இது (10.1)-ன் சமன்பாட்டின் தீர்வு y என் பதைக் காட்டுகிறது. $\bar{y}$ என்பது $\bar{y}(x_0) = y(x_1) = 0$ எனும் வரம்பு நியதிகட்கும் உட்பட்டது என்பது தெளிவு [ஏனெனில் எல்லா $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ ஆனதால்].

வெகு அரிதாகவே மட்டும், (10.3)-ல் உள்ள தொகுதியி னின்று எல்லா α_i-க்களையும் ஒருபடித்தானதாகக் கண்டு $n \to \infty$ எனும்போது அணுகு மதிப்பு காண முடியும். ஆகவே, $n(n = 2, 3, 4, 5)$ என மிகச்சிறிய எண்ணிக்கையுள்ள சில பொழுது $n = 1$ கூட) உறுப்புக்கள் மட்டுமே கொள்கிறோம்.

இங்கு, $w_i(x)$ எனும் n சார்பலன்களைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும், நிறைவு நியதியைப் பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டிய தில்லை. $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ எனும் வரம்பு நியதிக்குட்பட்டு

ஒருபடித்தான சாரச் சார்பலன்களாக மட்டும் இருந்தால் போதும். அநேகமாக கூறுச் சார்பலன்களாக,

$$(x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)^2(x-x_1),\ (x-x_0)^3(x-x_1)\ \ldots,\ (x-x_0)^n(x-x_1)\ \ldots, \qquad (10.4)$$

எனும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளையோ [மூலப்புள்ளியை x_0 எனும் புள்ளிக்கு மாற்றுதல் நலம். அப்போது (10.4)-ல் $x_0 = 0$] அல்லது கோண விகிதச் சார்பலன்களையோ

$$\sin \frac{n\pi (x-x_0)}{x_1 - x_0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

கொள்கிறோம்.

இந்த முறை எந்த n வரிசை சமன்பாட்டுக்கும் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கும், பகுதி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் பயன்படும்.

அத்தியாயம் 10-ல்
உத்திக் கணக்குகள்

1. $\Delta z = -1$ எனும் சமன்பாட்டுக்குத் தோராயத் தீர்வு காணவும். தீர்வு இடைவெளி $-a<x<a$, $-a<y<a$, எனும் சதுரம் இதன் வரம்பு மீது தீர்வு பூச்சியமாகிறது.

குறிப்பு :

$$\int\int_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx\, dy$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயம் காண்பதாகிறது.

$z_0 = \alpha\ (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$ எனும் வடிவில் தோராயத் தீர்வு காண்க.

2. $v[y(x)] = \int_0^1 (x^3 y''^2 + 100xy^2 - 20xy)dx; y(1) = y'(1) = 0$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயம் காண்பதில் தோராய மதிப்புக் காண்க.

குறிப்பு : $y_n(x) = (x-1)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots, \alpha_n x^n)$ எனும் வடிவில் தீர்வு காண்க; $n = 1$ என்பதற்குக் கணக்கிடுக.

3. கீழ்கண்ட சார்பரத்தின் தோராயமான தீர்வைக் காண்க.

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)dx; \; y(0) = y(1) = 0.$$

சரியான தீர்வுடன் ஒப்பிடுக.

குறிப்பு: தோராயமான தீர்வு எல்லயமான வடிவம்
$y_n = x(1-x)(\alpha_0, \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)$;
$n = 0, \; n = 1.$

4. $$v[y(x)] = \int_1^2 \left(x y'^2 - \frac{x^2-1}{x} y^2 - 2x^2 y \right) dx$$

$$y(1) = y(2) = 0$$

எனும் சார்பரத்தின் எல்லயப் பிரச்சினையின் தோராயத் தீர்வு காண்க ; அதனைச் சரியான தீர்வுடன் ஒப்பிடுக.

குறிப்பு : $y = \alpha(x-1)(x-2)$ எனும் வடிவில் தீர்வு காணவும்.

5. ரிட்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்திச் சார்பரத்தின் மீப் பெருமத்தைத் தோராயமாகக் காண்க.

$$v[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy)\, dx \; ; \; y(0) = y(2) = 0.$$

சரியான தீர்வுடன் ஒப்பிடுக.

குறிப்பு : கணக்கு 3-ஐப் பார்க்கவும்.

6. ரிட்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தி,
$y'' + x^2 y = x; \; y(0) = y(1) = 0$ எனும் வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தோராயத் தீர்வு காண்க, $y_2(x), y_3(x)$ என்பனவற்றைக் கண்டு அவற்றின் மதிப்பை $x = 0.25$ $x = 0.5$, $x = 0.75$ எனும் இடங்களில் ஒப்பிடுக.

விடை

அத்தியாயம் 1

1. $\sin y \cos x = C$. 2. $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = C$.
3. $x^2 - 2Cy = C^2$. 4. $y = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}$. 5. $\frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = C$.

6. $x = ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$. 7. $y = c\cos x + \sin x$. 8. $e^x - e^y = c$.
9. $x = ce^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ 10. சமபடித் சமன்பாடு $x = y\, e^{cy+1}$ 11. $y = cx; y^2 - x^2 = c$ 12. $y^3 = \frac{1}{(3x+c)^2}$

13. $\ln(t) = c - e^{-\frac{x}{t}}$. 14. துணை அலகு புகுத்த
$$y' = \cos t \begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c \end{cases}$$
15. $y = cx + \frac{1}{c}$ தனத்

தீர்வு $y^2 = 4x$ 16. $x = p^3 - p + 2; y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c$

17. x-லும் $\frac{dx}{dy}$ -லும் சமன்பாடு ஒரு படித்தானது. $x = cy + \frac{y^3}{2}$

18. $x = \frac{4}{3}p^3 - \frac{3}{2}p^2 + c$; $y = p^4 - p^3 - 2$. 19. அதிபர வளையங்கள் $x^2 - y^2 = c$. 20. வேண்டிய வரைகளின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு $\frac{y}{2x} = y'$ விடை $y^2 = 2cx$. 21. $y - xy' = x$ விடை $y = cx - x\, l_n\,|x|$ 22. $x^2 + y^2 - 2\,cy = 0$ கோண தூர உறுப்புக்களைக் கொண்டால் எளிதில் தீர்வு காண முடியும்.
23. பிரச்சினையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ விடை : 1 மணியில் 24. பிரச்சினையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{dv}{dt} = kv$, v என்பது வேகம். விடை $v = 0{\cdot}466$ கி. மீ./மணி.
25. மூலப்புள்ளியைத் தரப்பட்ட புள்ளியாகக் கொண்டு, தரப்பட்ட திசையில் x அச்சைக் கொள்ள சுழல்வதால் வளை தலம் தரும் வரைகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$
(அல்லது $dx - d\rho = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). விடை : தலத்தின் குறுக்கு வெட்டு $y^2 = 2\,cx + c^2$ வளை தலம் சுழல பரவளையமாகும்.

26. $y = 2\sin(x - c)$. 27. நேரிய வரைகளின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு $y' = -\frac{y}{x}$. விடை $xy = c$. 28. $(x+y+1)^3 = c(x - y + 3)$. 29. $y = \frac{2(1 + x)}{c+2x+x^2}$. 30. $y(0{\cdot}5) \approx 0.13$ 31. $y(0{\cdot}6) \approx 0.7$ 32. $y(0{\cdot}02) \approx 1.984$; $y(0{\cdot}04) \approx 1.970$; $y(0.06) \approx 1.955$; $y(0.08) \approx 1.942$; $y(0{\cdot}10) \approx 1{\cdot}930$; $y(0.12) \approx 1.917$; $y(0{\cdot}14) \approx 1.907$; $y(0.16) \approx 1.896$; $y(0.18) \approx 1.886$; $y(0.20) \approx 1.877$; $y(0{\cdot}22) \approx 1.869$; $y(0{\cdot}24) \approx 1.861$; $y(0{\cdot}26) \approx 1.854$; $y(0{\cdot}28) \approx 1{\cdot}849$; $y(0.30) \approx 1.841$. 33. $x = \frac{c}{p^2} + \frac{2p}{3}$; $y = 2px - p^2$; $y = 0$. 34. $x + \cot\frac{(x - y)}{2} = c$ 36. $(x+y+1)^3 = ce^{2x+y}$. 37. $y = c$; $y = e^x + c$; $y = -e^x + c$. 38. $y^2 = 2cx + c^2$ 39. இல்லை. 40. $y_1 = \frac{x^2 - 1}{2}$; $y_2 = \frac{x^2-1}{2} + \frac{2}{15} - \frac{1}{4}x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20}$. 41. $y = 2x^2 - x$. 42. இல்லை. 43. $x = ce^{\frac{x}{y}}$. 44. $x^2+\frac{3y^2}{2}=c^2$. 45. $x=2t$. 46. $x = t^2$. 47. $y = -x + 1$; $y = -\frac{x^2}{4}$. 48. மெய்த் தீர்வு இல்லை. 49. $3x - 4y + 1 = ce^{x-y}$. 50. $x=(4t + c)\sin t$. 51. $y = cx + \frac{c^2 - x^2}{2}$; தனித்தீர்வு $y = -x^2$. 52. $y = \frac{7x^3}{x^7 + c}$, $y=0$. 53. $x-c = \frac{a}{2}(2t - \sin 2t)$, $y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t)$ என்பது உருள் வரைத் தொகுதி. தனித்தீர்வு $y = a$ குறிப்பு: $y' = \cot$ எனத் துணை அலகு t புகுத்தல் நலம். 54. $3(x^2 + y) + xy^3 = cx$. 55. $\mu = \frac{c}{(y^2+x)^3}$. 56. $x=ce^{\frac{x}{y}}$. 57. $x^2+2xy-y^2 - 6x - 2y = c$. 58. $y=\frac{1}{1 + cx + \ln x}$ $y = 0$. 59. $(x^2 - 1)y - \sin x = c$. 60. $8y + 4x + 5 = ce^{4x-8y-4}$. 61. $y^3 + x^3 - 3xy = c$. 62. $y = c(x^2+y^2)$

63. $y^3 = x + \frac{c}{x}$. 64. $y = c(x + a) + c^2$; தனித்தீர்வு $y = -\frac{(x+a)^2}{4}$. 65. $x = \frac{2}{3}t + \frac{c}{t^2}$, $y = 2xt - t^3$. இத்துடன் $y = 0$; $y = \frac{3}{4}x^2$. 66. $y = \frac{c}{1 \pm \cos x}$.

அத்தியாயம் 2

1. $y = 5e^{3x}\sin x + 10$. 2. $x = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{t\cos t}{2}$. 3. $(y - c_2)^2 = c_1 x + c_2$. 4. $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2\sin x}$. 5. $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{3}$. 6. $y = c_1\sin x + c_2\cos x + \frac{1}{2}\cosh x$. 7. $y = \frac{1}{c_1 x + c_2} + 1$. 8. $x = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + \frac{t^3 e^{2t}}{2} + e^t + \frac{1}{4}$. 9. $y = -\frac{x}{c_1} + \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2}\ln|1 + c_1 x| + c_2$. 10. $c_1 x^2 + 1 = c_1^2 (t + c_2)^2$. 11. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x - \frac{x^2}{16} + \frac{1}{15}e^x$. 12. $y = \cos(x - c_1) + c_2 x + c_3$. 13. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6 - \frac{x^4}{24}$. 14. $x = e^t(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t) + 1 + t^2$. 15. $y = c_0\left(1 - \frac{4x^3}{2\cdot 3} + \frac{4^2x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \dots + \frac{(-1)^k 4^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\dots(3k-1)3k} + \dots\right) + c_1\left(x - \frac{4x^4}{3\cdot 4} + \frac{4^2x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \dots + \frac{(-1)^k 4^k x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\dots 3k(3k+1)} + \dots\right)$. 16. $c_1 J_{\frac{1}{3}}(3x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(3x)$. 17. $y = x$. 18. $y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4$. 19. $y = c_1\cos x + c_2\sin x + 1 + x\cos x - \sin x\ \ln|\sin x|$. 20. $u = \frac{c_1}{r} + c_2$. 21. பிரச்சினையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{k}{r^2}$

அல்லது $v\frac{dv}{dr} = \frac{k}{r^2}$. இங்கு r என்பது பூமையத்திலிருந்துள்ள துகளின் தூரம், v துகளின் வேகம், $k = -6400^2g$. விடை: $v \approx 11$ கிமீ./விநாடி. 22. இயக்கச் சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} = -g + k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ விடை: $x = \frac{75^2}{g} \ln\cosh \frac{g}{75} t$. 23. இயக்கச் சமன்பாடு $\frac{d^2s}{dt^2} = k(s+1)$ அல்லது $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{6}(s+1)$. விடை: $t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6+\sqrt{35})$. 24. $t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9+\sqrt{80})$. 25. $s = \frac{F-a}{b}t - \frac{(F-a)p}{b^2g}\left(1 - e^{-\frac{bg}{p}}\right)$. 26. $x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$. 27. $x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$. 28. இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} + k_1\dot{x} - k_2x = 0$, $k_2 > 0$ விடை: $x = c_1e^{\left(-\frac{k_1}{2}+\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+k_2}\right)t} + c_2e^{\left(-\frac{k_1}{2}-\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+k_2}\right)t}$.

29. $x = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nt}{(n^2-2)n^3}$. 30. $y^2 = c_1(x^2 + x\sqrt{1+x^2}) + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c_2$. 31. $y = c_2e^{c_1x} + c_1$, $y = \frac{4}{c-x}$. 32. $x = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t - \frac{1}{12}t^2\cos 3t + \frac{1}{36}\sin 3t$. 33. $y = e^{-x}\left(c_1 + c_2x - \frac{1}{4}x^2\right) + \frac{1}{8}e^x$. 34. $y = c_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}xe^x$.

35. $y = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{xe^x\cos x}{4} + \frac{x^2e^x\sin x}{4}$

36. $y = c_1(x-x^3) + c_2[4 - 6x^2 + 3(x^3-x)]\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{6}$.

37. $u = c_1\ln(x^2+y^2) + c_2$. 38. $u = \frac{c_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c_2$.

39. இயக்கச் சமன்பாடு $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$. விடை:

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

40. (a) $$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}}.$$

(b) $$x - x_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)}\ ;\ (t - t_0) = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}$$

இங்கு $v = \dot{x}$. **41.** $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + e^x(c_4 + c_5 x + c_6 x^2) - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{24}$. **42.** $x = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t - \frac{1}{8}t^2 \cos t$. **43.** $y = c_1 \cos \ln(1+x) + c_2 \sin \ln(1 + x) + \ln(1 + x)\sin \ln(1 + x)$.

44. $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2)\sin nt - 2n\cos nt}{[(2-n^2)^2 + 4n^2]n^4}.$$

45. $$x = \frac{\alpha_0}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-(n^2-a_2)\alpha_n - \alpha_1 n\beta_n}{(n^2-a_2)^2 + a_1^2 n^2}\cos nt + \frac{a_1 n\alpha_n - (n^2-a_2)\beta_n}{(n^2-a_2)^2 + a_1^2 n^2}\sin nt\right].$$

இங்கு $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ என்பன $f(t)$ எனும் சார்பலனின் ஃபூரியர் குணகங்கள்.

46. $x = \frac{\cos t}{2} + \frac{\mu}{24}(1 + 3\cos 2t)$. **47.** $y = c_1 x + c_2 x e^{-\frac{1}{x}}$

48 $x^2 y'' + xy' - y = 0$. **49** $x = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4\right.$ sin

$\left.\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + t^3$. **50.** $x = t^3 + t + 1,\ y = \frac{3}{8}t^6 + \frac{3}{10}t^5 + \frac{3}{16}t^4 + \left(c_1 + \frac{1}{6}\right)t^3 + c_1 t + c_2$. **51.** $x = (c_1 + c_2 t)e^{-5t} + \frac{2t}{(5+\ln 2)^2} + \frac{t^3 e^{-5t}}{6}$. **52.** $y = c_2 e^{c_1 x^2}$. **53.** $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left[c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + e^{-\frac{x}{2}}\left[c_5 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \frac{e^{2x}}{63}$. **54.** $y = (c_1 x + c_2)\cos x + (c_3 x + c_4)\sin x + c_5 + c_6 x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}e^x$.
55. $y = (c_1 x + c_2)^3 + c_3 x + c_4$. **56.** $y = e^{1 + c_1 x}\left(\frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2}\right) + c_2$. **57.** $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{\sin 2x}{6} - \frac{\sin 4x}{30}$. **58.** $y = -\frac{1}{x-2}$. **59.** $y = c_2 e^{c_1 x} + \frac{1}{c_1}$.

அத்தியாயம் 3

1. $x = \sin t,\ y = \cos t$. **2.** $x_1 = 2e^t$. $x_2 = 2e^t$. **3.** $x = c_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} + c_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}$. முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து y-ஐக் காண்கிறோம். $y = e^t - \frac{dx}{dt} - 5x$. **4.** $x = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_2 \cos\sqrt{\frac{3}{2}}t + c_3 \sin\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)$; $y = \frac{dx}{dt}$; $z = \frac{d^2x}{dt^2}$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து y, z இவற்றைக் காண்கிறோம். **5.** $x = c_1 e^{c_2 t}$; $y = c_1 c_2 e^{c_2 t}$.
6. $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3$; $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$.
7. $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$, $z = x[c_1 J'_0(x) + c_2 Y'_0(x)]$
8. $x + y + z = c_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2^2$. **9.** $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$; $y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}$; $z = c_1 e^t - (c_2 + c_3)e^{-2t}$.

10. $x = c_1 t + \frac{c_2}{t}$; $y = -c_1 t + \frac{c^2}{t}$. **11.** $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t + \sin t \log | \sin t |$; $y = \frac{dx}{dt} - 1$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து y காணப்படுகிறது. **12.** $x^2 - y^2 = c_1$, $y - x - t = c_2$. **13.** $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \sin t$; $y = -c_1 e^t + c_2 e^{-t}$; **14.** $x = e^t$, $y = 4e^t$. **15.** $\theta(1) = 0{\cdot}047$ **16.** $x = e^{at}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$, $y = e^{at}(c_1 \sin t - c_2 \cos t)$. **17.** $x = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t}$, $y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t}$. **18.** $x = e^{-6t}(2 c_1 \cos t + 2 c_2 \sin t)$, $y = e^{-6t}[(c_1 - c_2) \cos t + (c_1 + c_2) \sin t]$. **19.** $x = c_1 e^t + c_2$, $y = (c_1 t + c_3)e^t - t - 1 - c_2$, $z = y - c_1 e^t$. **20.** $x + y + z = c_1$, $xyz = c_2$. **21.** $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$, $xyz = c_2$. **22.** $X = \begin{Vmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} \end{Vmatrix}$

அத்தியாயம் 4

1. சமநிலைப்புள்ளி ஈற்றருகு உறுதிப்பாடுடையது. **2.** சமநிலைப்புள்ளி உறுதிப்பாடில்லை. **3.** $\alpha < -\frac{1}{2}$ எனின் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு, $\alpha = -\frac{1}{2}$ எனின் உறுதிப்பாடுள்ளது. $\alpha > -\frac{1}{2}$ உறுதிப்பாடில்லை. **4.** $\alpha < 0$ எனின் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு $\alpha > 0$ உறுதிப்பாடில்லை. **5.** $1 < t < 2 \; x(t, \mu) \to \sqrt{4 - t^2}$; $2 < t < 3 \; x(t, \mu) \to -\sqrt{9 - t^2}$; $t > 3 \; x(t, \mu) \to \infty$. **6.** $x(t, \mu) \to \infty$, **7.** உறுதிப்பாடில்லை. **8.** உறுதிப்பாடுள்ளது. **9.** இல்லை. **10.** உள்ளது. **11.** சேணப்புள்ளி. **12.** திரும்பு சார்புத் தீர்வு. $x = \frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t$ — ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது. **13.** திரும்பு சார்புத் தீர்வுப்பட எல்லாத் தீர்வுகளும் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையவை. **14.** உறுதிப்பாடில்லை. $v = x^4 - y^4$ எனும் சார்பலன் செதயெவின் தேற்ற நியதிகட்குட்பட்டது. **15.** எல்லாத் தீர்வுகட்கும் உறுதிப்பாடில்லை. **16.** $x \equiv 0$ எனும் தீர்வு உறுதிப்பாடில்லாதது. **17.** $1 < \alpha < 2$ எனின் $x \equiv 0$ ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடுடையது. $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ எனின் உறுதிப்பாடுள்ளது. $\alpha > 2$ அல்லது < 1 எனின் $x \equiv 0$ உறுதிப்பாடில்லாதது. **18.** $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ தொடர்ந்து செயல்படும் அசைவுகளுக்கு உறுதிப்பாடுள்ளது. $v = 4x^2 + 3y^2$ எனும் சார்பலன் மால்கின்

தேற்ற நியதிக்குட்பட்டது. 19. $x(t) \equiv 0$ எனும் தீர்வு உறுதிப்பாடில்லாதது. 20. எல்லாத் தீர்வுகளும் உறுதிப்பாடுள்ளவை எனினும் ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு இல்லை. 21. அது போன்றே. 22. $x = \frac{\cos t - \sin t}{2}$ எனும் திரும்பு சார்புத் தீர்வு உறுதிப்பாடில்லாதது. 23. உறுதிப்பாட்டிடை வெளி $0 < \alpha < 1$. ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடிடை வெளி $0 < \alpha < 1$. 24. உறுதிப்பாடிடைவெளி $\alpha \geqslant 5$ ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடிடைவெளி $\alpha > 5$.

அத்தியாயம் 5

1. $z = \Phi(x+y)$. 2. $z = e^{2x}\Phi(x-y)$. 3. $z = e^{\frac{y}{x}} \Phi(x)$. 4. $\Phi\left(z, ye^{\frac{x}{z}}\right) = 0$. 5. $z = 5 + \frac{\Phi(x^3 y^5)}{y^5}$. 6. $u = \Phi(x-y, y-z)$. 7. $u = x^4 \Phi\left(\frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^3}\right)$. 8. $z = x\Phi_1(y) + \Phi_2(y)$. 9. $z = (x^2+y-1)^2$. 10. $z = ye^{\frac{x-2}{y}}$. 11. $z = 3x$. 12. $z = \left(y^2 - \frac{2x}{z}\right)^{\frac{3}{2}}$. 13. $\Phi(z^2+x^2, x^2-y^2) = 0$. 14. $\Phi(z^2-x^2, x^2-y^2) = 0$. 15. இல்லை. 16. $2xy + y^2 + 6xz^2 = c$. 17. $z = ax^3 + \frac{y^3}{9a} + b$. (வேறு விடைகளும் இருக்கலாம்). 18. $z = ax + by + a^3 b^3$ (வேறு விடைகளும் இருக்கலாம்.) 19. $z = be^{\frac{3}{a}(a^2x+y)}$ (வேறு விடைகளும் இருக்கலாம்). 20. $z = x\sin a + ay + b$ (வேறு விடைகளும் இருக்கலாம்). 21. $x^3y - 3xyz = c$. 22. (F. சுழல் F) = 0. ஆதலால் தலங்கள் இல்லை. 23. வெக்டர் வரைகள் $\frac{y}{x} = c_1$, $xz = c_2$ வெக்டர் தலங்களின் சமன்பாடு

$z = \frac{1}{x}\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$. வரைகளுக்குக் குத்துத் தலச் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - z^2 = c$. 24. $z = xy + 1$. 25. $z = 3xy$. 26. $z=x^2+y^2$.

அத்தியாயம் 6

1. எல்லய வரைகள் வட்டங்கள் $(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$. 2. தொகைகாண் பாதையைச் சார்ந்ததில்லை. தொகை மாறுபடு தீர்வு அமைவுக்கு அர்த்தமற்றது. 3. தொடர்ச்சியுடைச் சார் பலன் தொகுதியில் எல்லயம் காண இயலாது. 4. எல்லய வரைகள் அதிபர வளையங்கள் $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. 5. $y=C_1 \sin(4x - C_2)$. 6. $y = -\frac{x^2}{4} + C_1x+C_2$. 7. $y= \sinh(C_1x+C_2)$. 8. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$. 9. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$. 10. $y = \frac{x^7}{7!} + C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3 +C_4x^2+C_5x+C_6$. 11. $y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\sin x$, $z=2y+y''$, z எளிதாகத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. 12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z)$. 14. $y= C_1x^4+C_2$. 15. $y = \frac{1}{2}xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$. 16. $y = -\frac{x\cos x}{2}+C_1\cos x+C_2\sin x$. 17. $y=C_1\cosh x+C_2\sinh x+ x\sinh x-\cosh x\ln\cosh x$. 18. $y = C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{1}{3}x\ln|x|$. 19. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x-\frac{x^2\sin x}{4}$. 20. $y= C_1e^x + C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^6$.

அத்தியாயம் 7

1. இரண்டு பலகோட்டுருவத்திலும் சார்பரம் தனி மீச்சிறுமம் அடைகிறது. 2. இல்லை. 3. வரம்புப் புள்ளிவழிச் செல்லும் பலகோட்டுருவக் கோடுகள் $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ சரிவுடைய கோட்டுத்துண்டுகளாகும். 4. $\frac{\varphi' - y'}{1 + y'\varphi'} = 1$ அதாவது $y_1 = \varphi(x_1)$ எனும் வரையை $\frac{\pi}{4}$ எனும் கோணத்தில் நழுவும் வரம்பு புள்ளியில் எல்லய வரை வெட்டுகிறது. 5. $x = c_1 e^{c_2 t}$; $y = c_1 c_2 e^{c_2 t}$. 6. $y = \pm\frac{3}{4}x$; $0 < x \leqslant \frac{16}{5}$ எனும்போது, $\frac{16}{5} < x < \frac{34}{5}$ எனும்போது $y = \pm\sqrt{9-(x-5)^2}$. $\frac{34}{5} < x \leqslant 10$ எனும் போது $y = \pm\frac{3}{4}(x - 10)$ அதாவது வரையான வட்டத்தின் தொடுகோடு, வட்டவில் மீண்டும் வட்டத் தொடுகோடு இவைகளால் ஆனது. 7. $y \equiv 0$. 8. $y = \pm\sqrt{8x - x^2}$ எனும் வட்டவில்.

அத்தியாயம் 8

1 $y = -\frac{x^2}{4} + 1$ எனும்போது வலிய மீச்சிறுமம்.
2. $y = 0$; $\left(0 < a < \frac{\pi}{4}\right)$ எனும்போது வலிய மீச்சிறுமம் ஆனல் $a > \frac{\pi}{4}$ மீச்சிறுமம் இல்லை. 3. மீச்சிறுமம் அல்லது பெருமம் தொடர்ச்சியுடைய வரைகளில் ஏற்படுவதில்லை.
4. $y = 7 - \frac{4}{x}$ எனின் வலிய மீச்சிறுமம். 5. $y = 1$ என்பதற்கு மீச்சிறுமம். 6. $y = \sin 2x - 1$ என்பதற்கு வலிய மீப்பெருமம்.
7. $y = x^3$ என்பதற்கு வலிய மீச்சிறுமம். 8. $y = \frac{1}{3}e^{2x}$ என்பதற்கு வலிய மீச்சிறுமம். 9. $y = \sin 2x$ என்பதற்கு வலிய மீப்பெருமம். 10. $y = \frac{y_1}{x_1}x$ எனும் நேர்கோட்டின் எளிய மீச

சிறுமம். 11. $y = \frac{y_1}{x_1} x$ எனும் நேர்கோட்டில் எளிய மீச்சிறுமம். 12. $y = x^2$ எனின் எளிய மீச்சிறுமம். 13. $y = x^3 - 1$ எனின் வலிய மீப்பெருமம். 14. $y = \frac{\sinh x}{\sinh 2} + x$ என்ருல் வலிய மீச்சிறுமம்.

அத்தியாயம் 9

1. $y = \pm 2 \sin n\pi x$ (n முழு எண்). 2. $\phi = C_1 + C_2 z$; $r = R$. 3. $y = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$. இங்கு C_1, C_2, λ எனும் எண்கள் எல்லய நியதி, சமச்சுற்றளவு நியதிகளிலிருந்து காண வேண்டும். 4. $\frac{d}{dx} \{p(x)\ y'\} + [\lambda r(x) - q(x)]\, y = 0$; $y(0) = 0$; $y(x_1) = 0$; $y \equiv 0$ எனும் சாரமற்ற தீர்வு சமச் சுற்றளவு நியதிக்குட்பட்டதல்ல; ஐஜன் மதிப்பு எனும் மதிப்புகளுக்கு λ-சாரமுள்ள தீர்வுகளுக்குப் பொருந்தும். ஆகவே, λ-ஐஜன் மதிப்பாகும். ஆய்லர் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வில் உள்ள ஒரு நிலை எண் $y(0) = 0$ என்பதிலிருந்தும் மற்றது சமச் சுற்றளவு நியதியிலிருந்தும் காணப்படுகிறது.

5. $y = -\frac{5}{2} x^2 + \frac{7}{2} x$; $z = x$.

அத்தியாயம் 10

1. $z_1 = \frac{5}{16a^2} (x^2 - a^2)\ (y^2 - b^2)$. இன்னும் திருத்தமான தீர்வு வேண்டுமானுல் $z_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)[\alpha_0 + \alpha_1(x^2 + y^2)]$ எனும் வடிவில் தீர்வு காணவேண்டும். 2. $y_1 = (x-1)^2\ (0{\cdot}124 + 0{\cdot}218x)$. 3. சரியான தீர்வு $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$. 4. ஆயிலர் சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = 3{\cdot}6072\, J_1(x) + 0{\cdot}75195\ Y_1(x) - x$; J_1, Y_1 என்பவை பெஸ்ஸல் சார்பலன். 5. சரியான தீர்வு $y = \frac{2 \sinh x}{\sinh^2} - x$. 6. $y_2 = x(x-1)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$, $y_3 = x(x-1)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)$ எனும் வடிவானுல் $y_2 = x(x-1)(0{\cdot}1708 + 0{\cdot}17436x)$, $y_3 = x(x-1)(0{\cdot}1705 + 0{\cdot}1760x - 0{\cdot}0018x^2)$, குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் y_2, y_3-ன் மதிப்புகள் $0{\cdot}0001$ திருத்தமாக உள்ளன.

RECOMMENDED LITERATURE

PART I

1. Petrovskii, I., *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Lectures on Ordinary Differential Equations). 5th ed., Nauka, 1964.
2. Malkin, I., *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* (Theory of Stability of Motion). Gostekhizdat, 1952 (to Ch. 4)
3. Malkin, I., *Nekotoryie zadachi teorii nelineinykh kolebanii* (Certain Problems in the Theory of Non–Linear Vibrations). Gostekhizdat, 1956 (to Sec. 8, Ch. 2)
4. Tikhonov, A., *O zavisimosti reshenii differentsial'nykh uravnenii ot malogo parametra* (On the Dependence of Solutions of Differential Equations on a Small Parameter). Matematicheskii sbornik, Vol. 22 (64) : 2 (1948) and Vol. 31 (72) : 3 (1952)(to Sec. 6, Ch. 4).
5. Stepanov, V., *Kurs differentsial'nykh uravnenii* (A Course of Differential Equations), 8th ed., Fizmatgiz, 1959.
6. Krylov, A., *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh* (Lectures on Approximate Calculations). 5th ed., Gostekhizdat, 1950 (to Sec. 7, Ch. 1 and Sec. 6, Ch. 3)
7. Berezin, I., Zhidkov, N., *Metody vychislenii* (Methods of Calculations). Vol. II. Fizmatgiz, 1960 (to Sec. 7, Ch. 1 and Sec. 6, Ch. 3)

PART II

1. Gelfand, I., Fomin, S., *Variatsionnoye ischisleniye* (The Calculus of Variations). Fizmatgiz, 1961
2. Lavrentiev, M., Lyusternik, L., *Kurs variatsionnogo ischisleniya* (A Course of the Calculus of Variations). 2nd ed. Gostekhizdat, 1950
3. Smirnov, V., Krylov, V., Kantorovich, L. *Variatsionnoye ischisleniye* (The Calculus of Variations). KUBUCH, 1933
4. Smirnov, V., *Kurs vysshey matematiki* (A Course of Higher Mathematics). Vol. 4, 4th ed. Fizmatgiz, 1958

5. Günther, N., *Kurs variatsionnogo ischisleniya* (A Course of the Calculus of Variations). Gostekhizdat, 1941

6. Akhiezer, N., *Lektsii po variatsionnomu ischisleniyu* (Lectures on the Calculus of Variations). Gostekhizdat, 1955

7. Lavrentiev, M., Lyusternik, L., *Osnovy variatsionnogo ischisleniya* (Fundamentals of the Calculus of Variations). Parts 1 and 2. Gostekhidat, 1935

8. Pontryagin, L., Boltyanskii, V., Gamkrelidze, R., Mishchenko, E., *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical Theory of Optimal Processes). Fizmatgiz, 1961

9. Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957

10. Kantorovich, L., Krylov, V., *Priblizhennyie metody vysshego analiza* (Approximate Methods of Higher Analysis). 5th ed. Fizmatgiz, 1962

11. Mikhlin, S., *Pryamyie metody v matematicheskoy fizike* (Direct Methods in Mathematical Physics). Gostekhizdat, 1950

கலைச்சொற்கள்

A

Asymptotical stable — ஈற்றணுகு உறுதிப்பாடு

B

Boundary value problems — எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினை
Brachistion — விரை வளைவரை
Broken line extremals — உடைந்தவரை எல்லைய வரை

C

Calculus of variation — மாறுபடு கணிதம்
Catenary — சங்கிலியம்
Catenoids — கனசங்கிலியம்
C-discriminant curve — C-தன்மை காட்டி வரை
Central field — மையக்களம்
Characteristic equation — தன்மை காட்டிச் சமன்பாடு
Characteristic strips — தன்மை காட்டித் துண்டுகள்
Comparison curve — ஒப்புமை வளைவரை
Complete integral — முழுத்தீர்வு
Constraints, holonomic — கட்டுப்பாடுகள், முற்றிணைக்க முள்ள
,, non-holonomic — கட்டுப்பாடுகள், முற்றிணைக்க மற்ற

D

Degenerate equation — சிதைந்த சமன்பாடு

E

Exact differential equation — சரியான வகையீட்டுச் சமன்பாடு
Existence and uniqueness — உள்ளமை தனித்தன்மை
Extremal — எல்லைய வரை
Extremal field — எல்லைய வரைக்களம்

F

Functional — சார்பரம்

G

Geodesics — புவிக்குறைத் தொலைவரை

H

Homogeneous Linear Equation — சமபடித்தான ஒரு படித்தான சமன்பாடுகள்

I

Influence function — பாதிக்கும் சார்பலன்
Integrating factor — தொகைகாண் காரணி
Isoclines — சமச்சரிவு வரைகள்
Isoperimetric — சமச் சுற்றளவுள்ள

F

Limit cycle — எல்லைச் சுழல்

M

Metric space — அளவுடைவெளி
Moving boundary — இயங்கு வரம்பு

O

Optimal control — உச்சத்திறன்
Orthogonality conditions — குத்து நியதிகள்

P

Partial differential equation — பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Perlodic solution — திருப்பு சார்புத் தீர்வு
Pericdic solution non-resonance — ஒருங்கு இயைவிலா
Periodic resonance — ஒருங்கு இயைவுடை
Perturbations-instantaneous — கண அசைவுகள்
Point conjugate — துணையியபுள்ளி

R

Reciprocity Principle — நிகர்மாற்றுக் கொள்கை
Rest points — சமநிலைப்புள்ளிகள்

S

Saddle point	—	சேணப்புள்ளி
Small parameter method	—	சிறு துணை அலகு முறை
Stable focal points	—	குவியப்புள்ளி உறுதிப் பாடுடைய
Stable nodal points	—	கணுப்புள்ளி
Strong maximum	—	வலிய மீப்பெருமம்
Successive approximation	—	தொடர்ந்து தோராயப் படுத்தல்

T

Transversality condition	—	ஊடு வெட்டாமை நியதி

W

Weak minimum	—	எளிய மீச்சிறுமம்

பொருட்குறிப்பகராதி

(எண்கள் பக்கங்களைக் குறிக்கின்றன)

அ

அசைவுகள், கணநேர, 289
அடர்த்தி, லாக்ராஞ்சியன் சார்பின், 406
அடிப்படைத் துணைத் தேற்றம் மாறுபடுநுண்கணிதத்தின், 367
அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு, 242
அடுத்தடுத்த தோராய முறை, 57
அலைவுச் சமன்பாடு, 518
அழிவுக் குணகம், 17
அளவுடைய பூரணவெளி, 50

ஆ

ஆற்றல் காப்பு விதி, 468
ஆமில்டன், 401
ஆமில்டன் ஜேகோபி சமன்பாடு, 469
ஆயிலர், 167, 349, 350
ஆயிலர் சமன்பாடு, 131, 132, 363, 371, 450
ஆயிலர் சமன்பாட்டின் தீர்வு, 410
,, சார்பரத்தின் தீர்வு, 528
,, சமன்பாட்டு உருவமாற்றம், 467
,, பாய்சன் சமன்பாடு, 389
,, காமா சார்பலன், 147
,, ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தீர்வு, 125
,, பலகோண வரை, 5
,, சமபடித்தான சமன்பாடு, 309, 312
ஆஸ்ட்ரோ கிராட்ஸ்கி, M, 126, 393, 401
,, சமன்பாடு, 393, 394, 403, 508, 516
,, லியோனிவ் வாய்பாடு, 126

இ

இடைவெளிக் கணக்கீடு, 40
இணக்கச் சார்பு, 493
இயக்கத் தொகுதி, 206
இருமுறை நுண்தொகை, 108

உ

உறுதிநிலை ஈற்றணுகு, 249
,, கணுப்புள்ளி, 252
,, கோட்பாடு, 247
உறுதிப்பாடுடைய தீர்வு, 284, 289
உறுதியற்ற கணுப்புள்ளி, 252, 256
உறுதியற்ற குவியப்புள்ளி, 255
,, தீர்வு, 284
,, வியாபுனுவு பொருளில், 252
உறுதியான சிறுமம், 361
உறுதியான பெருமம். 361
உர்விட்சின் தேற்றம், 279
,, நியதி. 279
,, அணிக்கோவை, 279

ஊ

ஊடு வெட்டாமை நிபந்தனை, 416, 422

எ

எல்லை உறுதிப்பாடுடைய, 277
எல்லைச் சுருள்கள், 277
எல்லைச் சுழல்கள், 18
எல்லைப் பாதி உறுதிப்பாடுடைய, 278
எல்லை மதிப்புப் பிரச்சினை, 192
எல்லை மதிப்பு இரண்டாம் படி, 194

எல்லை மதிப்புச் சமன்பாடு, 194
எல்லையம் உள்ளமைக்கு நியதி, 444
எல்லையம் சார்பரத்தின், 360
எல்லைவரை இணைக்கப்பட்ட, 350
,, உடைந்த, 487
,, கட்டுப்பட்ட, 350
,, மாறுபடு தீர்வு, 387
,, மூலைகளுள்ள, 426
எல்லைய வரை, 370
,, வரைக்களம், 444

ஒ

ஒப்புமை வளைவரை, 364
ஒன்றன்மேல் ஒன்று பொருந்துதல் நெறி, 137, 148, 160, 175, 280
ஒருபடிச் சமன்பாடு, 24
,, செயலி, 112
ஒருபடியாகச் சார்ந்து நிற்காத சமன்பாடுகள், 113
,, வெக்டர்கள், 224
ஒருங்கு இயைவு, 182
ஒருங்கு இயைவு இல்லாத சமன்பாடு, 181
ஒருங்கு $n$thவகை, 184

ஃ

ஃபாஃபியன் சமன்பாடு, 314

க

கட்டுப்பாடுகள், முற்றிணைக்கமற்ற, 484
,, முற்றிணைக்கமுள்ள, 484
கன சங்கிலியம், 379
காந்தராவி, 502, 509
,, முறை, 518
காலர்கின், B, 524
காலர்கின் முறை, 524
கிரிலா, N, 502
கிரிலா, U, 502
கிரீன் சார்பலன், 195, 392
கிளாரா சமன்பாடு, 324
குத்தாக இருக்கநியதி, 9, 424
குறைவாக்கும் வரிசை, 509
கூறுச் சார்பலன், 421
கோலவஸ்காவின் தேற்றம், 298
கோஷி முறை, 145, ३२७, 330, 341, 342
கோஷி பிரச்சினை, 5

ச

சங்கிலியம், 495
சமச்சரிவு வரைகள், 10
சமச்சீர் ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, 21, 25, 110, 299
சமச்சீர் ஒருபடிச் சமன்பாடு அடிப்படைத்தீர்வுத் தொகுதி, 120
சமச்சீர் ஒருபடிச் சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு நிலை எண் குணகங்களுடன், 127
சமச்சீர் வடிவச் சமன்பாடு, 219
சமச் சுற்றளவுத் தீர்வு அமைவு நியதி, 488
,, பிரச்சினை, 350, 397, 488
சமபடித்தானதல்லாத சமன்பாடுகள், 25, 195, 299
சமநிலைப்புள்ளி, 208
,, சாமானியவகை, 251
சமன்பாடு கதிரியக்க அழிவு விதி, 2
சமன்பாடு சரியான வகையீடு, 81
,, நிபந்தனை அற்ற, 476
,, ராசிகள் பிரிவுபடும், 18, 20
சமன்பாடு ரிகாட்டி, 29
சரியான களம், 445
சரியான கணுப்புள்ளி, 256
சார்பரம், 351
சார்பரம் பலசாராமாறி, 390
சார்பரங்கள் பலவரிசை வகைக்கெழுக்களைச் சார்ந்த, 384
சார்பரத்தின் மாறல்கள், 412
சார்பலன் $E(x, y, p, x, y)$, 451
சார்பலன் பாதிக்கும், 195
சார்பின் மாறல், 363
சார்பிட், 324
சாராத சமன்பாடுகள் 186,
சிதைந்த சமன்பாடு, 382

சிறிய துணை அலகு முறை, 177
சிறுமச் செயல் கோட்பாடு, 401
சீரான ஒடுக்கம், 44
சுருங்குமுறை உருவ மாற்றுத் தத்துவம், 50
சேதயாவ், G., 266, 270
சேதயாவ் உறுதியற்ற தேற்றம், 266
சேணப்புள்ளி, 65, 253

ட

டெயிலர் தொடர் முறையில் விரைவு, 75
டெயிலர் சூத்திரப்படி விரிவு, 243
டிரிஷ்லே பிரச்சினை, 394

த

தட்டுத்தளர்வற்ற பெருமம், 359
தன்மை காட்டி C, 92, 448
,, P, 90
,, சமன்பாடு, 127, 236, 301, 306, 336
,, முறை, 278
தனிக்களம், 468
தனித் தீர்வு வரை, 90
தனிப்புள்ளி, 65
தனி வரை, 78
திக்கணுவு, 61, 288
திசைக்களம், 8
திரும்புச் சார்புத் தீர்வு, 177
,, உள்ளமைத்தேற்றம், 180, 189
திரும்பு நியதி, 191
தீர் உள்ளமைத் தனித்தன்மை, தேற்றம், 100
தீர்வின் துணை அலகின் மேல் பகுப்பாய்வு முறையில் சார்ந்து நிற்கும் தன்மை, 61
தீர்வுடைத் தொகுதிகள், 187
துபோஷன், G., 289
துணையலகு மாறும் முறை, 25
துணையிய புள்ளி, 449
துவக்க மதிப்பைச் சார்ந்து நிற்றல், 58
தூரம், 50
தொடக்க மதிப்புப் பிரச்சினை, 6, 192
தொடர்ச்சியுடைய சார்பலன், 353
தோராயத் தீர்வு காணும் முறை 242

ப

பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, 2
,, ஒருபடித்தான, 299
,, தொகை காணல், 299
பல்லுறுப்புச் செயலி, 155
,, கோவை சாதாரண, 157
,, வகுத்தல், 162

ப

பாதி உறுதியுடைத் தீர்வு, 284
பான் ரேஜின், 497
பாய் சமன்பாடு, 1, 394, 508
பிரதிபலிப்புத் தீர்வு அமைவு, 427
பிரிவுபடும் சமன்பாடுகள், 18, 20
புவிக்குறைத் தொலைவுவரை, 350
பெட்ரோவெட்ஸ்கி, 502
பெரிஜின், 78
பெர்னலி ஜேகோப், 349
,, ஜோஹன், 349
,, சமன்பாடு, 29
பெர்லிட்சி, 270
பெரான் O, 270
பெல்மன், 497
பெஸ்ஸல் சமன்பாடு ஒருபடி, 167
பெஸ்ஸல் சார்பலன் முதல்வகை, 169, 170
இரண்டாம் வகை, 169, 170
பொன்காரே, A., 177
பொன்காரேயின் தேற்றம், 61
போகோலிபோவ், N., 502, 510
பௌதிக மாறுபடு கோட்பாடு, 348

ந

நிகர் மாற்றுக் கொள்கை, 492
நிலைப்புள்ளியைக் கொண்டு நிறுவும் முறை, 50

ம

மாறல்கள், 352
மாறுபடு கணிதம், 347
மாறுபடு தீர்வமைவு, 348

மாறுபடுதீர்வமைவு நேரடிமுறை, 501
மாறுபடு தீர்வமைவுகளில் எல்லைய வரை, 387
மாறுபடு தீர்வமைவுகளில் துணை அலகு அமைப்பு, 397
மாறுபடு தீர்வமைவுகளில் நிபந்தனைக்குட்பட்ட, 475
மார்கின், 270
,, தேற்றம், 290
மிகிலின், S, 502
மில்ன், 70
மீச்சிறுமத்திற்குப் போதுமான நியதிகள், 459
முக்கோண விதிக்குப் போதுமான நியதிகள், 51
முதற்கண் தோராயச் சமன்பாடுகள், 270
முழுத்தீர்வு, 322
மூலங்களின் எதிரெண் மெய்ப் பகுதி, 279
மையக்களம், 444
மையம், 63, 255

ர

ரன்ஜ், 70
,, முறை, 75, 76, 245
ரான்ஸ்கி, 116
ரான்ஸ்கியன், 116
ரிட்சு முறை, 502, 505

ல

லாக்ராஞ்சு, 350
,, சமன்பாடு, 88
லாக்ராஞ்சியன், 406
லியபுனவ், 177, 261
லியபுனவ் இரண்டாவது முறை, 261
லியபுனவ் சுற்றணுகு உறுதிப் பாட்டுத் தேற்றம், 264
லியபுனவ் உறுதிப்பாட்டுத் தேற்றம், 261
லியபுனவ் உறுதிபாட்டுத் தேற்ற நிருபணம், 290
லியபுனவ் சார்பலன், 261, 293
லிஸ்டர்னிக், 502
லீப்சிஸ் நியதி, 41, 59 101, 205, 282
லெஜண்டர நியதி, 463, 466
,, ,, வலிய, 458
லெப்னிட்சு, 349
லே ஆஸ்பிடல், 349

வ

வகைக்கெழுக்கான உடன்படுகை, 82
வகையிடத் தக்க சார்பு, 357
வகையீடு, 357
வகையீட்டு உள்ளமை தனித் தன்மை 100
வகையீடு சரியான, 81
வகையீட்டுச் சமன்பாடு முழுத் தீர்வு, 13
வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தொகை காணல், 2
வகையீட்டுச்சமன்பாடுவரிசை, 2
,, சாதாரண, 2
,, பகுதி, 2
,, தீர்வு, 2
,, பொதுத்தீர்வு, 7
,, தொகை, 13
வரைக்களம் எல்லைய, 444
வாசிலாவு, A. 288
விரை வளைவரை, 349, 379
வெக்டர் சார்பு, 497
வெக்டர் மண்டலம், 299
,, வரைகள், 299
வெய்ஸ்ட்ராய் நியதி, 454
,, சார்பலன், 458

ஜ

ஜேகோபி சமன்பாடு, 449, 450, 466
ஜேகோபி நியதி, 449 454, 464, 466
ஜேகோபி முதல் முறை, 341
ஜோர்டானின் திட்டவடிவம், 240

ஸ

ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம், 317
ஸ்டார்மர், 70
,, முறை, 70, 74, 244